

В. В. ПОПОВСКИЙ, д-р техн. наук, Ю. Ю. КОЛЯДЕНКО, канд. техн. наук,
И. В. СТРЕЛКОВСКАЯ, канд. физ.-мат. наук

МОДИФИКАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОЦЕНИВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Многие из реальных процессов на практике имеют непрерывные реализации $x(t)$. Вместе с тем часто приходится процесс $x(t)$ представлять в дискретном виде $x(k)$, что вызвано, например, необходимостью помехоустойчивой передачи его по каналу связи или его обработки. Оцифровка случайного процесса $x(t)$ может производиться по-разному. Так, широко используется теорема отсчетов (Котельникова), когда интервал между $x(k)$ и $x(k-1)$ выбирается из условия $\Delta t = \frac{1}{2 F_{\max}}$, где $F_{\max}$ – максимальная частота дискретизируемого процесса $x(t)$. Пусть далее полученная дискретная последовательность $x(k)$, усиленная или ослабленная в $H(k)$ раз, наблюдается на фоне помех $n(k)$ типа белой гауссовой последовательности:

$$y(k) = H(k)x(k) + n(k), \quad (1)$$

где $H(k)$ – матрица, которая задает ослабления сигнала; $n(k)$ – шум наблюдения, представляющий собой белый гауссовский шум с дисперсией $D_n(k)$ и нулевым средним.

По полученным наблюдениям $y(k)$ можно построить процедуру оценки $\hat{x}(k)$. Здесь же отметим, что при оценке $x(k)$ по результатам выборочного массива стремятся увеличивать Δt до таких размеров, чтобы отсчетные значения $x(k)$, $k = \overline{1, N}$ оказались некоррелированными, что сокращает объем вычислительных процедур. Выборочные оценки

$$\hat{x} = N^{-1} \sum_{k=1}^N x(k) \quad (2)$$

являются несмещенными и эффективными. Вместе с тем использование выборочных оценок (2) для решения реальных задач становится проблематичным, поскольку часто задержка времени $\tau = \sum_{i=1}^N \Delta t_i$ на сбор статистики объемом N и ее обработку становится чрезмерно большой, не позволяющей решать динамические задачи. В этом случае переходят к получению рекурсивных оценок, процедуру вычисления которых можно прервать на любом этапе; или же, получив текущее значение оценки $\hat{x}(k)$, можно продолжить ее вычисление далее.

Во многих задачах используются процедуры рекурсивной оценки по наблюдениям y , осуществляющейся по схеме Калмана – Бьюси.

Математическими марковскими моделями случайного процесса являются [1]: для непрерывного представления

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = F(t)\bar{x}(t) + \Gamma(t)\bar{w}(t), \quad (3)$$

для дискретного представления

$$\bar{x}(k+1) = \Phi(k+1, k)\bar{x}(k) + \Gamma(k)\bar{w}(k). \quad (4)$$

Здесь $\tilde{w}(k)$ – виртуальный порождающий шум, представляющий собой белый гауссовский шум с дисперсией $D_w(k)$ и нулевым средним, где k – дискретное время; $\Phi(k+1, k)$, $\Gamma(k)$ – матрицы состояния и возбуждения.

Однородную одномерную модель можно получить непосредственно из (4), положив

$$\Phi = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\text{кор}}}\right), \quad (5)$$

$$\Gamma = \sqrt{D_w \Phi (1 - \Phi)^2}, \quad (6)$$

где Δt – интервал временной дискретизации (шаг); $\tau_{\text{кор}}$ – интервал временной корреляции; D_w – дисперсия (мощность) централизованного процесса $x(t)$.

При использовании оптимальных процедур оценки Калмана – Бьюси [1] получают оценку $\hat{x}(k)$ с минимальной среднеквадратической погрешностью по отношению к $x(k)$:

$$\hat{x}(k) = \Phi(k, k-1) \hat{x}(k-1) + K(k) \left[y(k) - H(k) \Phi(k, k-1) \hat{x}(k-1) \right]. \quad (7)$$

Здесь $\hat{x}(k)$ – текущая оценка на k -м шаге; $y(k)$ – процесс наблюдения; K – коэффициент усиления, который находится по формуле $K(k) = D_{\tilde{x}}(k) H^T(k) D_n^{-1}(k)$, где T – знак транспонирования; $D_{\tilde{x}}(k+1|k)$ – априорная дисперсия ошибки оценки, $D_{\tilde{x}}(k+1|k) = \Phi(k+1, k) D_{\tilde{x}}(k) \Phi^T(k+1, k) + \Gamma(k) D_w(k) \Gamma^T(k)$; $D_{\tilde{x}}(k)$ – апостериорная дисперсия ошибки оценки, $D_{\tilde{x}}(k) = [I - K(k) H(k)] D_{\tilde{x}}(k|k-1)$.

Вместе с тем точность воспроизведения исходного процесса $x(t)$ во многом зависит как от правил оцифровки, так и от выбора аппроксимирующей функции на интервалах между соседними отсчетами k и $k+1$.

На практике часто восстановление последовательности $x(k)$ по оценкам $\hat{x}(k)$ осуществляется на основе линейной аппроксимации, а точность восстановления повышается по мере уменьшения шага дискретизации Δt .

На рис.1 представлен пример фрагмента линейной аппроксимации последовательности $x(t)$.

Апостериорная дисперсия ошибки оценки не зависит от результатов наблюдения. Точность оценки процесса $x(k)$, $k = \overline{1, N}$ для линейного алгоритма (6) изменяется согласно зависимости [2]

$$\frac{D_{\tilde{x}}(k)}{D_{\tilde{x}}(k+1|k)} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + P_c / P_{\text{ш}}}}. \quad (8)$$

Точность оценки в виде соотношения апостериорной дисперсии и априорной зависит от отношения сигнал-шум $P_c / P_{\text{ш}}$ в канале наблюдения.

Как видно из соотношения (8), при типичных для каналов связи значениях $P_c / P_{\text{ш}} \geq 40$ дБ отношение дисперсий составляет около 10^{-2} .

Следует отметить, что представленная выражением (8) точность оценки является максимально достижимой, полученной при $\Delta t \rightarrow 0$. Для реальных шагов дискретизации она несколько больше. Очевидно, что с шагом Δt связана и точность линейной аппроксимации

$x(t)$ по последовательности полученных оценок $\hat{x}(k)$, $k = \overline{1, N}$. Практика показывает, что линейная аппроксимация не является лучшим вариантом. Такую аппроксимацию можно рассматривать как аппроксимацию интерполяционным сплайном первого порядка вида

$$s_1(t) = x_j \frac{t_{j+1} - t}{\Delta t_j} + x_{j+1} \frac{t - t_j}{\Delta t_j}, \text{ или } s_1(t) = x_j + \frac{t - t_j}{\Delta t_j} (x_{j+1} - x_j),$$

где $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$; $S_1(t_j) = x_j$, $j = 0, \dots, N$.

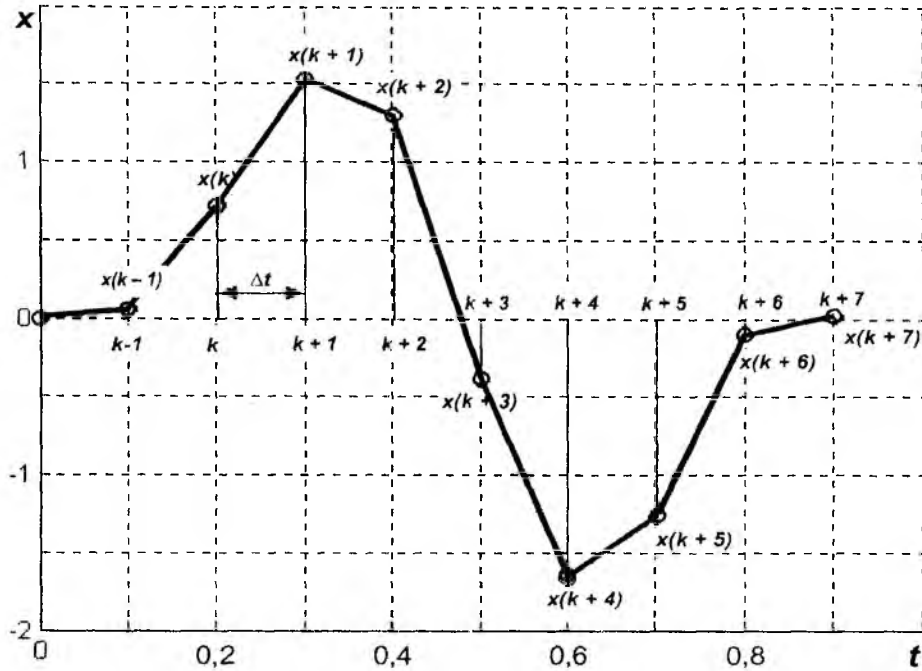


Рис. 1

Из теории сплайн-функций известно [3], что если сплайн первой степени $S_1(t)$ интерполирует функцию $x(t)$ на сетке $\Delta: a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$, то справедливы оценки

$$\|R(t)\|_{\infty} = \|S_1(t) - x(t)\|_{\infty} \leq R,$$

где R представлены в табл. 1.

Таблица 1

Класс функций	R
$C[a; b]$	$w(x(t))$
$W_{\infty}^1[a; b]$	$\frac{\Delta t}{2} \ x'(t)\ _{\infty}$
$CC_{\Delta}^1[a; b]$	$\frac{\Delta t}{4} w(x'(t))$
$CW_{\Delta, \infty}^2[a; b]$	$\frac{\Delta t^2}{8} \ x''(t)\ _{\infty}$

В табл. 1 $C[a, b]$ – класс непрерывных на $[a, b]$ функций $x(t)$; $W_p^l[a; b]$ – класс функций $x(t)$, имеющих на $[a, b]$ абсолютно непрерывную производную порядка $l-1$ и l -ю производную из $L_p[a, b]$, $1 \leq p \leq \infty$, где $L_p[a, b]$ – пространство измеримых на $[a; b]$ функций $x(t)$, для которых $|x(t)|^p$ интегрируема по Лебегу на $[a; b]$. Нормы в этом пространстве

$$\|x(t)\|_{L_p[a; b]} = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}};$$

$C^k C_{\Delta}^l[a; b], l > k$ – класс функций $x(t)$ – таких, что $x(t) \in C^k[a; b]$, $x(t) \in C^l[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, где $C^k[a; b]$ – класс функций, имеющих на $[a; b]$ непрерывную производную k -порядка.

$C^k W_{\Delta, p}^l[a; b], l > k, 1 \leq p \leq \infty$ – класс функций, удовлетворяющих условиям

$$x(t) \in C^k[a; b], \quad x(t) \in W_p^l[t_j, t_{j+1}], \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

$\overline{\Delta t} = \max_j \Delta t_j$, $w(x(t))$ – модуль непрерывности функции $x(t)$

$$w(x(t)) = \max_{0 \leq j \leq N-1} w_j(x) = \max_{0 \leq j \leq N-1} \max_{t', t'' \in [t_j, t_{j+1}]} |x(t'') - x(t')|.$$

Однако дальнейшее повышение гладкости функции $x(t)$ не дает повышения порядка аппроксимации. Происходит так называемое насыщение интерполяционного процесса.

В данном случае более конструктивным является применение сплайн-функций более высокого порядка. Рассмотрим эту процедуру аппроксимации более подробно.

Обозначим через $s_3^\alpha(t)$ кубический сплайн класса $C^2[a; b]$ (класс дважды непрерывно дифференцируемых функций), который на каждом промежутке $[t_j, t_{j+1}]$ представляется одной из следующих формул:

$$s_3^\alpha(t) = (1-p)^2(1+2p)x_j^\alpha + p^2(3-2p)x_{j+1}^\alpha + p(1-p)^2 m_j^\alpha \Delta t_j - p^2(1-p)m_{j+1}^\alpha \Delta t_j, \quad (9)$$

$$s_3^\alpha(t) = (1-p)x_j^\alpha + px_{j+1}^\alpha - \frac{\Delta t_j^2}{6} p(1-p)[(2-p)M_j^\alpha + (1+p)M_{j+1}^\alpha], \quad (10)$$

$$\text{где } m_j^\alpha = \frac{ds_3^\alpha}{dt} \Big|_{t=t_j}, \quad M_j^\alpha = \frac{d^2 s_3^\alpha}{dt^2} \Big|_{t=t_j}, \quad \Delta t = t_{j+1} - t_j, \quad p = \frac{t - t_j}{\Delta t_j},$$

$$x(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))^T,$$

$$x_j^\alpha = x^\alpha(t_j), \quad \alpha = \overline{1, n}.$$

При построении сплайнов для стыковки звеньев между собой накладываются ограничения на производные сплайна (обычно требуется их непрерывность). Однако этот способ не является единственным. Рассматривается другой подход, состоящий в том, что стыковка звеньев осуществляется путем приравнивания разделенных разностей от многочленов, описывающих соседние звенья сплайна. Это так называемые дискретные кубические сплайны.

Для модели сообщения $x(k)$ или $x(k)$ оказывается более целесообразным использовать дискретные кубические сплайны.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана сетка $\Delta: a = t_0 < \dots < t_n = b$, в узлах которой известны значения $x_j = x(j)$, $j = 0, 1, \dots, N$. Отметим, что задаваемая в теории сплайнов сетка Δ в данном случае является равномерной. Дискретным интерполяционным кубическим сплайном называется функция $S(k) = S_\Delta(t)$, которая удовлетворяет таким условиям:

1. На каждом из интервалов $\Delta t = [t_j, t_{j+1}]$ она является кубическим многочленом:

$$S_\Delta(t) = P^j(t) = \sum_{i=0}^3 a_{ij} (t - t_j)^i, \quad t \in \Delta t = [t_j, t_{j+1}].$$

2. При заданных $\varepsilon_j \geq 0$, $o = 1, \dots, N-1$ имеют место равенства

$$\frac{P^j(t_j + \varepsilon_j) - P^j(t_j - \varepsilon_j)}{2\varepsilon_j} = \frac{P^{j-1}(t_j + \varepsilon_j) - P^{j-1}(t_j - \varepsilon_j)}{2\varepsilon_j}, \quad (11)$$

$$\frac{P^j(t_j + \varepsilon_j) - 2P^j(t_j) + P^j(t_j - \varepsilon_j))}{\varepsilon_j^2} = \frac{P^{j-1}(t_j + \varepsilon_j) - 2P^{j-1}(t_j) + P^{j-1}(t_j - \varepsilon_j))}{\varepsilon_j^2}. \quad (12)$$

3. Всегда $S_d(t_j) = x_j$, $j = 0, \dots, N$.

Условия (11), (12) можно рассматривать как дискретный аналог условий непрерывности первой и второй производных.

Очевидно, что при $\varepsilon_j \rightarrow 0$ дискретный кубический сплайн переходит в кубический сплайн класса C^2 .

Для дискретного сплайна $S_d(t)$, как и для интерполяционного кубического сплайна $S_3^\alpha(t)$, необходимо выполнение одного из четырех типов граничных условий:

- I. $S'_d(x; a) = x'(a)$, $S'_d(x; b) = x'(b)$;
- II. $S''_d(x; a) = x''(a)$, $S''_d(x; b) = x''(b)$;
- III. $S_d^{(r)}(x; a) = S_d^{(r)}(x; b)$, $r = 1, 2$;
- IV. $S_d'''(x, t_p + 0) = S_d'''(x, t_p - 0)$, $p = 1, \dots, N-1$.

Рассмотрим алгоритм построения дискретного сплайна. Введем обозначения

$$M_j = \frac{1}{\varepsilon_j^2} [P^j(t_j + \varepsilon_j) - 2P^j(t_j) + P^j(t_j - \varepsilon_j)], j = 0, \dots, N, \quad (13)$$

$$P^N(t) = P^{N-1}(t).$$

Тогда сплайн $S_d(t)$ при $t \in [t_j, t_{j+1}]$ записывается в виде

$$S_d(t) = x_j(1-p) + px_{j+1} - \frac{p(1-p)}{6} \Delta t_j^2 [(2-p)M_j + (1+p)M_{j+1}], \quad (14)$$

где $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$; $p = \frac{t - t_j}{\Delta t_j}$.

Формула (14) по виду совпадает с формулой (10) для кубического сплайна класса C^2 . Различный смысл имеют лишь величины M_j .

Из (13) следует, что

$$S_d''(t_j + 0) = S_d''(t_j - 0) = M_j, j = 0, \dots, N. \quad (15)$$

Сплайны $S_d(t)$ вида (14) удовлетворяют условиям интерполяции и условиям (12).

Подставив в (11) вычисленные из (14) значения сплайна, получим

$$\begin{aligned} \mu_j \left(1 - \frac{\varepsilon_j^2}{\Delta t_{j-1}^2} \right) M_{j-1} + \left(2 + \frac{\varepsilon_j^2}{\Delta t_{j-1} \Delta t_j} \right) M_j + \lambda_j \left(1 - \frac{\varepsilon_j^2}{\Delta t_j^2} \right) M_{j+1} = \\ = \frac{6}{\Delta t_{j-1} + \Delta t_j} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t_j} - \frac{x_j - x_{j+1}}{\Delta t_{j-1}} \right), \quad j = 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (16)$$

где $\mu_j = \frac{\Delta t_{j-1}}{\Delta t_{j-1} + \Delta t_j}$, $\lambda_j = 1 - \mu_j$.

К соотношениям (16) добавляем уравнение, вытекающее из граничного условия (одного из условий I – IV). Например, для условий типа II имеем

$$M_0 = x_0'', M_N = x_N'' \quad (17)$$

В силу соотношений (16) и (17) матрицы систем относительно неизвестных M_j имеют диагональное преобладание при любых ε_i и для всех рассматриваемых типов граничных условий. Таким образом, всегда существует единственный дискретный кубический сплайн для произвольного ε_j .

Если при равномерной сетке положить $\varepsilon_j = \Delta t$, то из (16) получим

$$M_j = \frac{x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}}{\Delta t^2}, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Для достаточно гладкой функции $x(t)$

$$\left\| \frac{d^r S_3}{dt^r} - \frac{d^r x}{dt^r} \right\|_{\infty} = O(\Delta t^{4-r}), \quad r = 0, 1, 2, 3, \quad (18)$$

где $\Delta t = \max_j \Delta t_j$.

Рассмотрим аппроксимацию эрмитовыми кубическими сплайнами.

Пусть в узлах сетки $\Delta: \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ заданы значения некоторой функции $x(t)$ и ее производной $x'(t)$:

$$x_i = x(t_i), \quad x'_i = x'(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Кубическим интерполяционным сплайном дефекта 2 (эрмитовым кубическим сплайном) будем называть функцию $S_{3,2}(x, t) = S_{3,2}(t)$, удовлетворяющую двум условиям:

1. На каждом из промежутков $[t_i, t_{i+1}]$

$$S_{3,2}(t) = a_{i0} + a_{i1}(t - t_i) + a_{i2}(t - t_i)^2 + a_{i3}(t - t_i)^3.$$

2. Функция $S_{3,2}(t_i) = x_i$, $S'_{3,2} = x'_i$, $i = 0, \dots, N$.

Эрмитов кубический сплайн имеет вид

$$S_{3,2}(t) = \varphi_1(p)x_i + \varphi_2(p)x_{i+1} + \varphi_3(p)\Delta t_i x'_i + \varphi_4(p)\Delta t_i x'_{i+1},$$

причем

$$\begin{aligned} \varphi_1(p) &= (1-p)^2(1+2p), & \varphi_2(p) &= p^2(3-2p), & \varphi_3(p) &= p(1-p)^2, \\ \varphi_4(p) &= -p^2(1-p), & \Delta t_i &= t_{i+1} - t_i, & p &= (t - t_i)/\Delta t_i. \end{aligned}$$

Для эрмитова кубического сплайна верны следующие оценки остаточного члена интерполяции $R(x) = S_3(f; x) - f(x)$ в зависимости от гладкости функции $f(x)$.

Если $S_3(x)$ интерполирует на сетке Δ функцию $f(x)$, имеют место оценки:

$$\|S_3(t) - x(t)\|_{\infty} \leq R,$$

где R даны в табл. 2.

Таблица 2

Класс функций	R_0
$C^1[a; b]$	$\frac{3}{8} \overline{\Delta t} w(x')$
$W_{\infty}^2[a; b]$	$\frac{1}{16} \overline{\Delta t}^2 \ x''(t)\ _{\infty}$
$C^1 C_{\Delta}^2[a; b]$	$\frac{1}{32} \overline{\Delta t}^2 w(x'')$
$C^1 W_{\Delta, \infty}^3[a; b]$	$\frac{1}{96} \overline{\Delta t}^3 \ x'''(t)\ _{\infty}$
$C^1 C_{\Delta}^3[a; b]$	$\frac{1}{192} \overline{\Delta t}^3 w(x''')$
$C^1 W_{\Delta, \infty}^4[a; b]$	$\frac{1}{384} \overline{\Delta t}^4 \ x^{IV}(t)\ _{\infty}$

С помощью дискретного кубического сплайна $S_{\Delta}(t)$ можно вычислить первую и вторую производные функции $x(t)$ в узлах сетки Δ с более высокой точностью, чем это гарантируется оценкой (18). При соответствующем выборе параметров, входящих в системы для определения величин m_j, M_j , на произвольной неравномерной сетке имеем:

$$S'_{\Delta}(t_j) = x'_j + O(\Delta t)^{-4}, \quad (19)$$

$$S''_{\Delta}(t_j) = x''_j + O(\Delta t)^{-3}, \quad (20)$$

где $S_{\Delta}(t)$ – кубический нелокальный сплайн класса C^1 .

Рассмотрим интерполяционный эрмитов сплайн степени $S_{5,3}(t)$ вида

$$\begin{aligned} S_{5,3}(t) = & x_j(1-p)^3(1+3p+6p^2) + x_{j+1}p^3(10-15p+6p^2) + \\ & + \Delta t_j x'_j p(1-p)^3(1+3p) - \Delta t_j x'_{j+1} p^3(1-p)(4-3p) + \\ & + \frac{1}{2} \Delta t_j^2 x''_j p^2(1-p)^3 + \frac{1}{2} \Delta t_j^2 x''_{j+1} p^3(1-p)^3. \end{aligned} \quad (21)$$

Для такого сплайна при достаточно гладких функциях получена оценка

$$\|S_{5,3}(t) - x(t)\|_c = O(\Delta t)^{-6}. \quad (22)$$

Заменим в (21) величины $x_j^*, x_{j+1}^*, x_j', x_{j+1}'$ по формулам (19), (20). Для полученного таким образом сплайна $\tilde{S}_{5,3}(t)$ очевидно, что

$$|\tilde{S}_{5,3}(t) - S_{5,3}(t)| = O(\Delta t)^{-5}.$$

С учетом (28) запишем

$$\|\tilde{S}_{5,3}(t) - x(t)\|_c = O(\Delta t)^{-5}.$$

Следовательно, порядок приближения сплайном $\tilde{S}_{5,3}(t)$ на единицу выше, чем у любого из кубических сплайнов, причем для построения $\tilde{S}_{5,3}(t)$ не требуется знания производной функций $x(t)$

Выкладки производились в предположении, что исходные значения x_j не содержат ошибок. Однако на практике они всегда присутствуют. Если ошибки велики, целесообразно использовать сглаживающий сплайн, выбрав параметры сглаживания в зависимости от значения ошибки. Если же ошибки в исходных данных невелики, можно применять интерполяционные сплайны. При этом нужно обратить внимание на выбор шага сетки.

Пусть на равномерной сетке с шагом Δt известны приближенные значения $\tilde{x}_j$ функции $x(t) \in C^4[a, b]$, причем $|\tilde{x}_i - x_i| \leq \varepsilon$. Если приближать функцию $x(t)$ кубическим сплайном $\tilde{S}_3(t)$, интерполирующим значения $\tilde{x}_j$, то $\|\tilde{S}_3(t) - x''(t)\|_c \leq \varphi(\varepsilon, \Delta t) + o(\Delta t^2)$, где

$$\varphi(\varepsilon, \Delta t) = \frac{1}{12} \Delta t^2 \|x^{(IV)}(t)\|_c + \frac{12\varepsilon}{\Delta t^2}.$$

Оптимальный шаг Δt^* определяется из условия минимума функцией $\varphi(\varepsilon, \Delta t)$:

$$\Delta t^* = 2\sqrt[3]{\varepsilon \|x^{(IV)}(t)\|_c^{-1}}, \quad \varphi(\varepsilon, \Delta t^*) = 2\sqrt[3]{\varepsilon \|x^{(IV)}(t)\|_c}.$$

Очевидно, при заданном ε не имеет смысла использовать сетки с шагом, меньшим Δt^* .

Например, если речь идет о восстановлении огибающей и $\varepsilon = 10^{-8}$, то $\Delta t^* \approx 0,035\tau_{\text{кор}}$, где $\tau_{\text{кор}}$ – интервал корреляции. Тогда $\varphi(\varepsilon, \Delta t^*) = 2 \cdot 10^{-4}$. На практике выясняется, что уже при $\Delta t^* = 0,1\tau_{\text{кор}}$ достигаются предельные свойства.

Как было отмечено выше, для сигналов сообщения или их оценок целесообразно использовать дискретные кубические сплайны (14).

С помощью имитационного моделирования проведен анализ процедуры оценивания (7) с интерполяцией результатов оценок дискретными кубическими сплайнами. На рис. 2 отражены марковский процесс (кривая 1), его аппроксимации дискретными кубическими сплайнами (кривая 2) и линейная аппроксимация (кривая 3). Видно, что аппроксимация с помощью дискретных кубических сплайнов позволяет получить более точное восстановление исходного сообщения (3), чем при линейных методах восстановления.

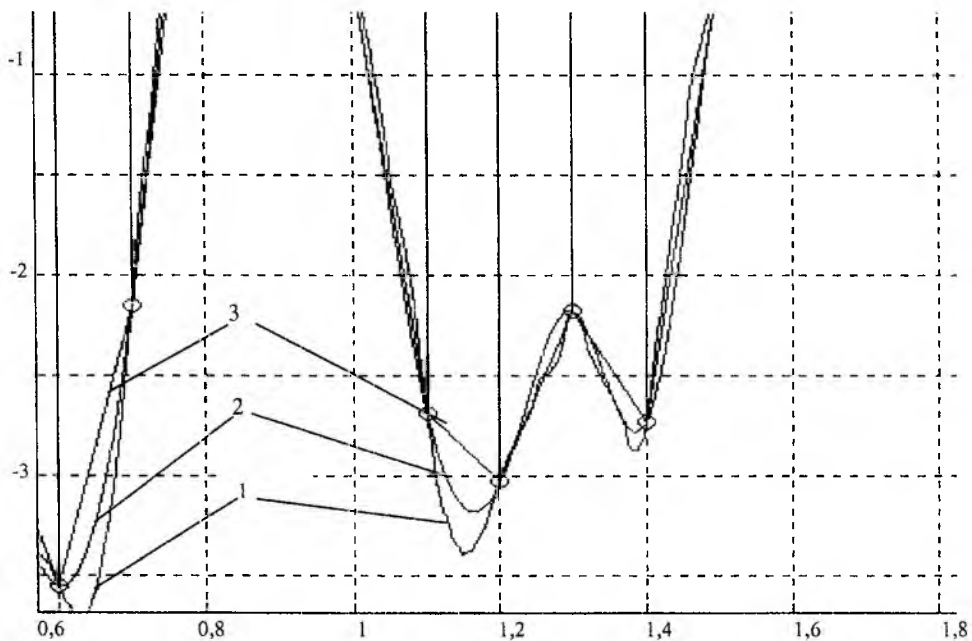


Рис. 2

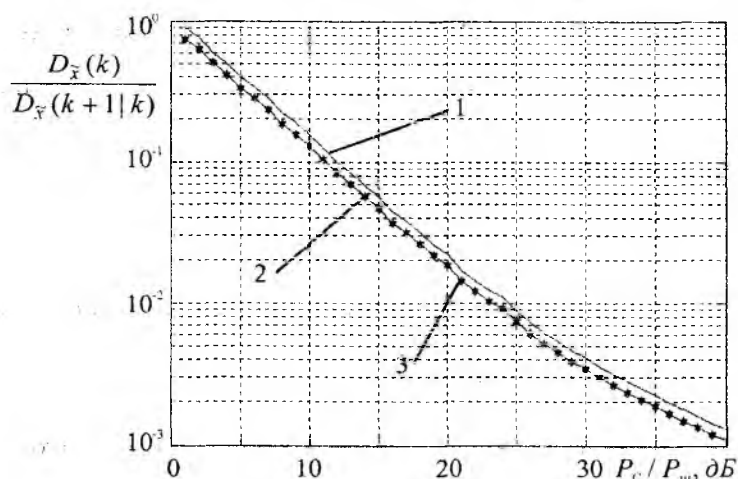


Рис. 3

Проведен также сравнительный анализ эффективности процедур интерполяции дискретными кубическими сплайнами (14), эрмитовыми кубическими сплайнами (21) и методами линейной аппроксимации. В качестве количественной меры выбрана точность оценки сигнала в виде среднеквадратического отклонения σ оценок сообщения $x(k)$ от исходного сигнала сообщения $x(k)$. Следует отметить, что данная количественная мера при $\Delta t \rightarrow 0$ стремится к теоретической зависимости $\frac{D_{\tilde{x}}(k)}{D_{\tilde{x}}(k+1|k)}$. В результате имитационного модели-

рования получены зависимости точности оценок от отношения сигнал-шум $P_c/P_{ш}$ при различном шаге квантования Δt . На рис. 3 представлены данные зависимости при $\Delta t = 0,02\tau_{кор}$. Как видно из графиков, при линейной аппроксимации (кривая 1), аппроксимации дискретными кубическими сплайнами (кривая 2) и эрмитовыми кубическими сплайнами (кривая 3) точности оценок практически не отличаются от теоретических. Дискретные кубические сплайны и эрмитовы кубические сплайны позволяют получить одинаковую точность оценок.

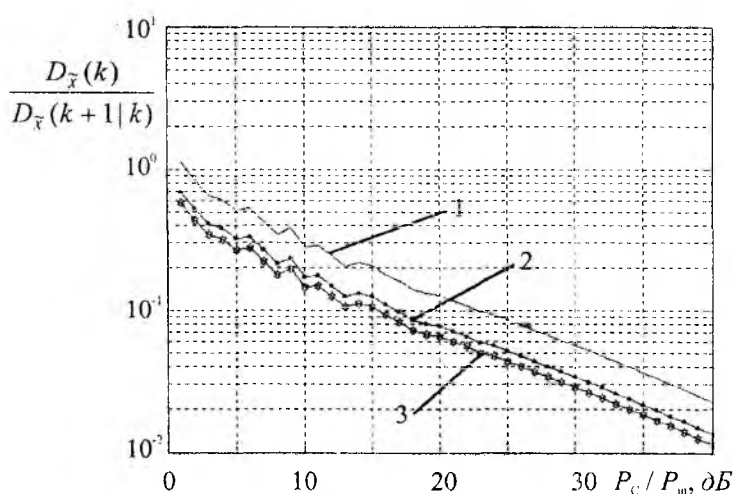


Рис. 4

При шаге квантования $\Delta t = 0,1\tau_{кор}$ (рис. 4) линейная аппроксимация (кривая 1) позволяет получить значительно более низкую точность восстановления, чем при использовании дискретных кубических сплайнов (кривая 2) и эрмитовых кубических сплайнов (кривая 3).

Кроме того, и точность аппроксимации дискретными кубическими сплайнами несколько ниже точности аппроксимации эрмитовыми кубическими сплайнами, что также можно объяснить тем, что восстанавливающие функции более сложны и совершенны.

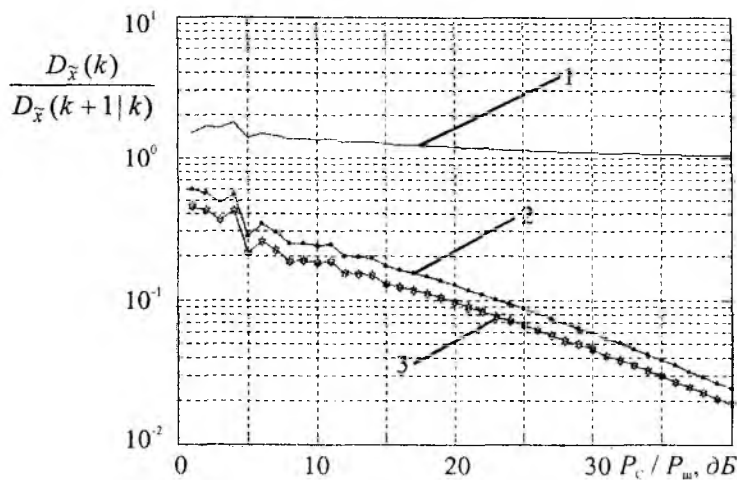


Рис. 5

При дальнейшем увеличении шага квантования результаты восстановления при линейной аппроксимации выходят за пределы допустимых значений. Так, на рис. 5 представлены зависимости для точности оценок при $\Delta z = 0,5\tau_{\text{кор}}$ (кривая 1 — линейная аппроксимация, 2 — аппроксимация дискретными кубическими сплайнами, 3 — эрмитовыми кубическими сплайнами). Из графиков видно, что результаты как оценивания, так и восстановления с использованием дискретных кубических сплайнов и эрмитовых кубических сплайнов дают значительное, почти на порядок, ухудшение. А линейный метод восстановления здесь просто неприемлем.

Проведенный анализ показывает, что при интерполяции последовательности оценок, получаемых по методу Калмана — Бьюси, аппроксимация кубическими сплайнами оказывается более эффективной, чем линейными.

Список литературы: 1. Сейдж Э.П. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении / Э.П. Сейдж, Дж.Л. Мелс; Пер. с англ. под ред. Б.Р. Левина. М.: Связь, 1976. 496 с. 2. Родимов А.П. Статистическая теория поляризационно-временной обработки сигналов и помех / А.П. Родимов, В.В. Поповский. М.: Радио и связь, 1984. 272 с. 3. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. М.: Наука, 1980. 352 с.

Харьковский национальный
университет радиозлектроники

Поступила в редколлегию 28.05.2003