

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ 06 ” листопада 2023 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Журавлю Ігорю Олександровичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Максимізація інформаційної ентропії в системах із марковською властивістю

затверджена наказом по університету від 2 листопада 2023 р. № 1276 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 січня 2024 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель системи «Людина-Машина-Середовище»

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	6 – 12 листопада 2023 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	13 – 26 листопада 2023 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	27 листопада – 10 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	11 грудня – 24 грудня 2023 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	25 грудня 2023 р. – 9 січня 2024 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2024 р.	виконано

Дата видачі завдання 6 листопада 2023 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ доц. Наумейко І.В.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 48 с., 7 рис., 2 дод., 14 джерел.

ЛЮДИНО-МАШИННА СИСТЕМА, СИСТЕМА ІЗ ЗАХИСТОМ, МАРКІВСЬКІ СИСТЕМИ, ОПТИМІЗАЦІЯ, МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЇ ІНФОРМАЦІЙНОЇ ЕНТРОПІЇ.

Об'єкт дослідження – задача моделювання людино-машинних систем із захистом та відновленням працездатності в умовах катастрофи.

Мета роботи – знаходження оптимальних ймовірностей станів системи Маркова, яка є моделлю даної системи.

Методи дослідження – моделювання з використанням найбільш загального підходу – максимізація інформаційної ентропії.

Задача належить до класу задач оптимізації та керування ергатичними системами, які мають марковські властивості. Засобом досягнення є побудова відповідної оптимізаційної задачі, її аналіз та розв'язання чисельним методом з використанням адекватного методу та математичного пакету Mathematica. Деякі попередні розрахунки виконуються в інтерактивному режимі в пакеті Mathcad. Поряд з очевидними – максимальна ентропія досягається при найменших обмеженнях на систему захисту, виходять і парадоксальні – оптимальна інтенсивність роботи відновлення системи в нестационарному випадку менше інтенсивності відмов.

ABSTRACT

Introductory note: 48 pages, 7 figures, 2 appendixes, 14 sources.

HUMAN-MACHINE SYSTEM, SYSTEM WITH PROTECTION, MARKOV SYSTEMS, OPTIMIZATION, METHOD OF MAXIMUM INFORMATION ENTROPY.

The object of research is the task of modeling man-machine systems with protection and restoration of operational capacity in disaster conditions.

The goal of the work is to find the optimal probabilities of the states of the Markov system.

Research methods – modeling using the most general approach – maximization of information entropy.

This problem belongs to the class of problems of optimization and control of energy systems that have Markov properties. The means of achievement is the construction of a suitable optimization problem, its analysis and solution by numerical method using an adequate method and the mathematical package Mathematica. Some preliminary calculations are done interactively in the Mathcad package. Along with the obvious ones – the maximum entropy is achieved with the smallest restrictions on the protection system, the paradoxical ones are also obtained - the optimal intensity of system restoration work in the non-stationary case is less than the intensity of failures. This result requires understanding and further research.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	8
1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження	10
1.1 Інформаційна ентропія як характеристика невизначеності станів Марковської системи «Людина-Машина-Середовище»	10
1.2 Аналіз сценарію розв'язання задачі	12
1.3 Змістовна та формальна постановки задачі	13
1.3.1 Змістовна постановка задачі	13
1.3.2 Формальна постановка задачі	14
1.4 Постановка задач дослідження	15
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	16
2.1 Цільова функція оптимізації – ентропія як міра невизначеності	16
2.2 Методи оптимізації нелінійних опуклих функцій	17
2.2.1 Метод сполучених градієнтів	17
2.2.2 Квазіньютонівський метод	21
2.3 Розв'язання задачі оптимізації марковської системи	24
2.3.1 Одноканальна система з експоненційним законом розподілу часу обслуговування	24
2.3.2 Розширення кількості станів системи	31
Висновки за розділом 2	35
3 Програмна реалізація	36
3.1 Інтерактивні оцінки та експерименти з моделлю на MathCad	36
3.2 Mathematica як система символної математики	36
Висновки за розділом 3	37
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	38
Висновки за розділом 4	39
Висновки	40
Перелік джерел посилання	42

Додаток А Лістинг програми MathCad	44
Додаток Б Лістинг програми Mathematica	46

ВСТУП

Актуальність теми. Максимальна ентропія стала популярною статистичною моделлю в різних галузях медицини, мережових, технічних та економічних системах, може бути корисним для оцінок інформації в біологічних системах, що лежить в основі багатьох видів машинного навчання. Її використовують для класифікації текстів, моделювання або сегментація текстів. Досить часто досліджувані системи представляють у вигляді марковських процесів і використовують метод максимальної ентропії у разі нестачі статистики з інформації або її некоректності для того, щоб знайти розподіл ймовірностей, обчислений за певних обмежень, який з найбільшою ймовірністю може спостерігатися в реальній системі [1 – 3].

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою роботи є математичне моделювання та оптимізація стану технічної системи та її оператора. Для досягнення мети необхідно вирішити такі завдання:

- провести огляд та аналіз поточного стану задачі «Максимізація інформаційної ентропії в системах із марковською властивістю»;
- проаналізувати структуру та ефективність самоорганізованих систем;
- змоделювати систему у вигляді марковського ланцюгу та оптимізувати її за допомогою методу максимізації інформаційної ентропії.

Об'єктом дослідження є працездатність та ефективність системи «людина-машина-середовище».

Предметом дослідження є оптимізація марковських моделей системи у вигляді методу максимальної інформаційної ентропії.

Методи дослідження. У роботі використовується метод максимізації ентропії, який був строго доведений для замкнутих систем, адекватним та ефективним для розрахунку широкого класу моделей у різних галузях науки. Спираючись на це, у роботі для розрахунку перехідних ймовірностей та ймовірностей станів людино-машинної системи було застосовано метод максимізації ентропії [3, 4]. Для обчислювальних експериментів були

застосовані сучасні методи оптимізації, алгоритми для яких використані з програмних пакетів MathCad та Mfthematica.

Публікації. Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, були представлені на 27-му Міжнародному молодіжному форумі «Радіoeлектроніка та молодь у XXI столітті», Харків, 2023 р.) [5].

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Інформаційна ентропія як характеристика невизначеності станів

Марковської системи «Людина-Машина-Середовище»

В загальне поняття «система» входить сукупність елементів, взаємопов'язані функції яких координовані до виконання деякої спільної задачі.

Ергатична система (ЕС) – це система «людина-машина», що містить якісно різноманітні компоненти – людину та технічні засоби.

Ергатичні системи надзвичайно різноманітні та ієрархічні. Наприклад, система «командир корабля (перший пілот) – прилади, органи управління – літак» і система «штурман-радист – радіоапаратура літака» перебувають у взаємозв'язку, а й підпорядковані загальної складнішою системою «літак, виконує завдання», яку обслуговують та низку інших наземних систем та комплексів, які є також ергатичними системами.

В рамках цієї роботи вважаємо, що потік подій з боку підсистем «машина» та «середовище» є найпростішим з інтенсивністю λ , а час реакції на них з боку «людини – оператора» розподілено експоненційно з параметром μ . Обидва типи подій можуть призвести із заданою ймовірністю зміни стану системи. Величина $P_i(t)$ є ймовірність стану S_i системи в момент часу t .

Модель 1. Розглядається ситуація типова для одноканальних СМО без черги: людина відповідає на вплив (аварію) детермінованою послідовністю n операцій, тривалість яких експоненційно розподілено з параметром μ_i . Простір станів природно вважати самі операції з ліквідації аварії, S_0 – є стан очікування – безаварійна робота системи.

Модель 2. Час і якість операцій з ліквідації аварії залежить стану людини-оператора, яке, своєю чергою, залежить стану системи (шкідливі впливу і стрес). Вважатимемо, що оператор може перебувати у двох станах, умовно кажучи, «цілком працездатний» і «обмежено працездатний». Імовірність

відновлення працездатності у процесі ліквідації аварії дорівнює нулю, а ймовірність настання непрацездатного стану під час виконання i -ої операції дорівнює b_i . Після закінчення всієї роботи працездатність оператора відновлюється або замінюється. Тоді перехідні можливості для кожної пари станів $i+1$ і $(i+1)_b$, сусідніх з i -м, за повної працездатності оператора є $b_i\mu_i$ і $(1-b_i)\mu_i$ стану системи, інтенсивності відновлювальних робіт та ймовірності при неповній працездатності оператора, відповідно, i_b , μ^b і P_{ib} .

Необхідно отримати розрахункові формули для ймовірності всіх станів в обох моделях, розглядаючи об'єкти як СМО з Марківською властивістю. Перехідні можливості визначити за макро-характеристиками об'єкта, які мають характер математичних сподівань

$$\sum_{j=1}^n p_j q_{ij} = M_i,$$

використовуючи метод максимізації інформаційної ентропії $SI = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$.

Отже, скористаємося ентропійним підходом до моделювання динаміки стохастичних систем. У його основі лежить уявлення системи як багатовимірного випадкового вектора. Показано, що зміна ентропії багатовимірної стохастичної системи може бути виражена через дисперсію та умовні кореляції компонент випадкового вектора. Це дозволяє виявити причину зміни ентропії системи та оцінити цей випадковий вектор кількісно. Отримано, що ентропія стохастичної системи складається із двох компонентів, які характеризують її властивості. Перша компонента визначає граничну ентропію, що відповідає повній незалежності елементів системи, і характеризує розгляд цілісного об'єкта як частин (адитивність). Друга компонента відбиває ступінь взаємозв'язків між елементами системи, характеризуючи властивості системи як цілого (цілісність). Описаний підхід уможливорює використання ентропійної моделі в задачах

діагностики та контролю стану стохастичних систем, а також ефективного управління ними. До переваг запропонованого підходу слід віднести простоту реалізації та інтерпретації математичної моделі, універсальність і застосовність до стохастичним системам різної природи, можливість її використання на малих вибірках даних. Наведено приклад практичного застосування математичної моделі. Ключові слова: багатовимірна випадкова величина; ентропія; динаміка; стохастична система; дисперсія; кореляція

Ентропія є фундаментальною властивістю будь-яких систем з неоднозначною, або ймовірнісною, поведінкою [1]. В даний час досить поширене використання ентропії для опису поведінки відкритих стохастичних систем у різних галузях [2 – 6]. Однак, незважаючи на часте використання цього терміну, використання ентропії для моделювання відкритих систем, на відміну від термодинаміки, недостатньо формалізоване і має в основному якісний характер. Відсутні досить прості та адекватні математичні моделі, що дозволяють пов'язати ентропію з фактичними характеристиками станів стохастичних систем. Відомо [7], що ентропія безперервної випадкової величини X (диференціальна ентропія) визначається за формулою:

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln f(x) dx, \text{ де } f(x) \text{ – щільність розподілу випадкової величини}$$

X . Отримана за цією формулою ентропія називається ентропією закону розподілу чи диференціальною ентропією.

1.2 Аналіз сценарію розв'язання задачі

Оптимізація об'єкта, що розглядається, можлива за різними, часто суперечливими критеріями. Вибір критерію на неформальному рівні – прерогатива особи приймаючого рішення, а вибір формальних критеріїв та методів оптимізації належить розробнику. Оскільки віддати перевагу одному з них без додаткової інформації важко, запропоновано розглянути найбільш

загальну з можливих – критерій Джейнса (принцип) максимальної інформаційної ентропії [5].

Принцип максимуму ентропії стверджує, що найбільш характерними розподілами ймовірностей станів невизначеного середовища є такі розподіли, які максимізують обрану міру невизначеності при заданій інформації про «поведінку» середовища. Вперше подібний підхід використовував Д. Гіббс для знаходження екстремальних функцій розподілів фізичних ансамблів частинок. Згодом Е. Джейнсом був запропонований формалізм відновлення невідомих законів розподілу випадкових величин при наявності обмежень з умов максимуму ентропії Шеннона.

1.3 Змістовна та формальна постановки задачі

1.3.1 Змістовна постановка задачі

У людино-машинних системах наступний стан їхньої працездатності залежить тільки від поточного стану та дій оператора системи (у нашому випадку – від персоналу) та зовнішнього середовища. У свою чергу, останні характеризуються інтенсивністю впливу в даний час, або інтегральними (за часом від величини інтенсивності) показниками якості. В результаті адитивності інтеграла він має бути представлений як сума показників у даний момент часу, так і показника за інтервал між майбутнім та поточним моментом. Отже, всі загальноновживані людино-машинні системи, показники якості та сам алгоритм зміни станів є марковськими. Оскільки простір станів реальної людино-машинної системи дискретний і закінчений, її динаміка може моделюватися марковським ланцюгом.

Припустимо, що людино-машинна система виробництва працює за принципом «Just-in-Time» – «Саме вчасно», а саме: дотримується такої політики, яка потребує постачання матеріалів та послуг у той час, коли у них

виникає потреба для роботи чи процесу. Тобто для оптимізації всіх станів системи вона не накопичує суттєвих запасів, а працює з коліс.

Цей процес можна представити так, що у випадковому процесі ймовірність переходу системи до кожного наступного стану залежить лише від попереднього стану. Такий процес називається процесом без слідства – марковським процесом. Параметри оптимізації системи – ймовірність станів. Вони вибираються з умови максимізації інформаційної ентропії.

Принцип максимізації ентропії є засіб присвоєння значень імовірнісних розподілів на основі часткової інформації.

У звичайних формулюваннях цього, та пов'язаних з ним методів висновку передбачається, що ця часткова інформація набуває форми обмежень на дозволених імовірнісних розподілах. [5 – 7]

1.3.2 Формальна постановка задачі

Процедура максимізації ентропії складається з пошуку розподілу імовірностей таких, що максимізують інформаційну ентропію, з урахуванням обмежень інформації. Це обмежене завдання оптимізації часто вирішується методом множників Лагранжа.

Обмеження – це природні ймовірностей, завдання з обмеженнями як математичних надій.

Таким чином, якщо обмеження задають середні значення певних функцій $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\}$, таких що

$$\sum_{i=1}^n p_i f_k(x_i) = F_k, \quad 1 \leq k \leq m, \quad (1.1)$$

де $\{F_k\}$ – значення, задані у постановці завдання, то при $m < n$ завдання максимізації ентропії є варіаційним, яке вирішується методом множників Лагранжа. Воно має загальний розв'язок

$$p_i = Z(\lambda_1, \dots, \lambda_m)^{-1} \exp[-\lambda_1 f_1(x_i) - \dots - \lambda_m f_m(x_i)],$$

де $Z(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \sum_{i=1}^n \exp[-\lambda_1 f_1(x_i) - \dots - \lambda_m f_m(x_i)]$ є функцією розподілу;

$\{\lambda_k\}$ – множники Лагранжа, вибрані так, щоб задовольняти обмеження (1.1).

У випадку, коли

$$F_k = -\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \ln Z, \quad 1 \leq k \leq m, \quad (1.2)$$

є система з m рівнянь для m невідомих. Таким чином, отримане значення максимуму ентропії залежить лише від наданої інформації:

$$S(F_1, \dots, F_m) = \ln Z + \sum_k \lambda_k F_k. \quad (1.3)$$

1.4 Постановка задач дослідження

В роботі необхідно:

- з'ясувати особливості і характер цільової функції та обмежень;
- класифікувати завдання;
- вибрати найкращий з методів її вирішення;
- вибрати близький до реальності тестовий приклад, та скласти алгоритм і написати код для вирішення та оцінити отримані результати.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Цільова функція оптимізації – ентропія як міра невизначеності

Існує безліч завдань для людино-машинних систем, які зводяться до необхідності визначення ймовірностей станів, у яких система перебуває зараз, чи перебувала колись, незважаючи на те, що розрахувати чи визначити ці ймовірності майже неможливо. Тому достовірно визначити відносні ймовірності, причини відмов із офіційної статистики дуже складно. Основними факторами, які часто виключають статистичне визначення станів технічних та організаційних систем, є недостатність та/або недостовірність даних [8, 9].

Визначення найімовірніших енергетичних станів є одним із найважливіших задач статистичної термодинаміки. Дж. Гіббсом було отримано розподіл ймовірностей знаходження системи у рівноважному енергетичному стані. Воно отримало назву "канонічний розподіл Гіббса" і, на думку Р. Фейнмана, є "вершиною статистичної механіки". Однак підхід Гіббса винятково складний. Тому Джейнс запропонував інший підхід, заснований на максимізації ентропії по Шенону. Таке поняття, як інформаційна ентропія, було введено Шеноном у 1948 році в рамках його дослідів для американської телефонної компанії Bell System. Ідея Джейнса полягає у наступному: нехай є система, стан якої неможливо обчислити або виміряти в результаті експерименту, однак кожен з них має певний прояв, значення якого відомо «в середньому», або може бути визначено, а середній результат цих проявів відомий із статистичних даних. Тоді найбільш об'єктивні ймовірності станів, при яких досягнуто максимум ентропії Шенона при обмеженнях, що накладаються даними про середні появи станів.

Відповідно до цього, проблема знаходження ймовірностей станів зводиться до проблеми знаходження екстремуму нелінійної функції при заданих обмеженнях.

Ентропія по Шенону може бути записана у явному вигляді:

$$H(X) = \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_b 1/P(x_i),$$

де b є основою логарифму, що застосовується. Звичними значеннями b є 2, число Ейлера e , і 10, а відповідними одиницями ентропії є «біти» для $b=2$, «нати» для $b=e$, і «бани» для $b=10$.

Відомо, що ентропія – опукла (увігнута) функція розподілу ймовірностей елементів системи. Доведення цього наведено у роботі [10].

2.2 Методи оптимізації опуклих нелінійних функцій

Для нашої задачі оптимізації функцією цілі є інформаційна ентропія. Оскільки ентропія є нелінійною функцією усіх можливих видів поведінки системи, для нашого завдання оптимізації марковської системи підходить кілька ітераційних методів [11 – 13].

2.2.1 Метод сполучених градієнтів

Розглянемо квадратичну функцію

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x), \quad (2.1)$$

де A – симетрична додатно визначена матриця розміром $n \times n$.

Ідея методу сполучених градієнтів ґрунтується на прагненні мінімізувати функцію за скінчену кількість кроків. Точніше, у способі пов'язаних градієнтів необхідно визначити напрями $h^0, h^1, \dots, h^{n-1}$ такі, що послідовність n

одновимірною оптимізація вздовж цих напрямків призводить до знаходження мінімуму функції, тобто.

$$f(x^n) = \min_{x \in R^n} f(x) \quad \text{за будь-якого } x^0 \in R^n, \quad (2.2)$$

де $x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k$, $f(x^k + \alpha_k h^k) = \min f(x^k + \alpha_k h^k)$, $k = 0, 1, \dots$.

Виявляється, така властивість має система взаємно пов'язаних із матрицею A напрямів.

Слід зауважити, що термін "метод сполучених градієнтів" – один із прикладів того, як словосполучення, ставши звичними, сприймаються як самі собою зрозумілими та не викликають подиву. Справа в тому, що, за винятком окремого і не становить практичного інтересу випадку, градієнти не є сполученими, а пов'язані напрямки мають мало спільного з градієнтами. Назва методу відбиває, що це спосіб відшукування безумовного екстремуму поєднує у собі поняття градієнта цільової функції та пов'язаних напрямів.

Означення. Вектори (напрями) h' і h'' називаються сполученими (щодо матриці A), якщо вони відмінні від нуля і $(Ah', h'') = 0$.

Означення. Вектори $h^0, h^1, \dots, h^{n-1}$ називаються взаємно сполученими (за матрицею A), якщо вони відмінні від нуля і

$$(Ah^i, h^j) = 0, \quad i \neq j, \quad 0 \leq i, j \leq k = n-1.$$

Лема. Нехай вектори $h^0, h^1, \dots, h^{n-1}$ взаємно сполучені. Тоді вони лінійно незалежні.

Справедлива теорема. Якщо вектори h^k у методі (2.2) взаємно пов'язані, де $k = 0, 1, \dots, n-1$, то для функції (2.1) та довільної точки $x^0 \in R^n$

$$f(x^n) = \min_{x \in R^n} f(x),$$

тобто метод дозволяє знайти точку мінімуму квадратичної функції не більше ніж за n кроків.

Тепер для отримання алгоритмів мінімізації достатньо вказати засоби побудови взаємно пов'язаних напрямків. Оскільки для їх пошуку похідні не обов'язкові, то і такі методи 0-го порядку можуть мати місце.

Опишемо метод спряжених градієнтів першого порядку.

Будуємо систему сполучених напрямків за правилом

$$h^0 = -f'(x^0), h^k = -f'(x^k) + \beta_{k-1}h^{k-1}, k \geq 1. \quad (2.3)$$

За умовами поєднання векторів h^k і h^{k-1} маємо:

$$0 = (h^k, Ah^{k-1}) = (-f'(x^k), Ah^{k-1}) + \beta_{k-1}(h^{k-1}, Ah^{k-1}). \quad (2.4)$$

Звідки маємо

$$\beta_{k-1} = \frac{(-f'(x^k), Ah^{k-1})}{(h^{k-1}, Ah^{k-1})}.$$

Обґрунтування факту, що метод (2.2), (2.3), (2.4) відноситься до методів сполучених градієнтів, дає спеціальна лема.

Нехай $x^0 \in R^n$, точки $x^1, \dots, x^{n-1}$ та вектори $h^0, h^1, \dots, h^{n-1}$ отримані за формулами (2.2), (2.3), (2.4). $f'(x^i) \neq 0, i = 0, \dots, n-1$. Тоді ці вектори взаємно пов'язані, а градієнти $f'(x^0), f'(x^1), \dots, f'(x^{n-1})$ взаємно ортогональні. Тому метод (2.2), (2.3), (2.4) забезпечує відшукування точки мінімуму функції (2.1) трохи більше, ніж при n кроках.

До цього часу передбачалося, що симетрична матриця A додатно означено. Часто зустрічаються завдання, у яких передбачається лише те, що $(Ax, x) \geq 0$ за всіх $x \in R^n$, ϵA – невід'ємно означена.

У цьому випадку аналізований спосіб також забезпечує пошук мінімуму (якщо він є) лише за n кроків. Якщо мінімальне значення не досягається, метод також дозволяє встановити цей факт не більше ніж за n кроків. В останньому випадку $(Ah^k, h^k) = 0$ при деякому $k \leq n-1$ та обчислюваний за формулою (2.4) коефіцієнт β_k звертається до ∞ , є. подальше застосування методу буде неможливим.

Сформулюємо метод мінімізації неквадратичної функції. Для цього перетворимо формулу (2.4) так, щоб у ній фігурувала не матриця A , а якась її наближення, що точно збігається з A для квадратної функції. Тоді справедливі формули: Полака-Райбера (Polak-Ribiere) та Флетчера-Рівса

$$\beta_{k-1} = \frac{(f'(x^k), f'(x^k) - f'(x^{k-1}))}{\|f'(x^{k-1})\|^2}, \quad (2.5)$$

$$\beta_{k-1} = \frac{\|f'(x^k)\|^2}{\|f'(x^{k-1})\|^2}. \quad (2.6)$$

Звичайно, для неквадратичної функції цей метод перестає бути скінченим і отримані ним напрямки $h^0, h^1, \dots, h^{n-1}$, взагалі кажучи, не є взаємно пов'язаними щодо будь-якої матриці.

Зазвичай у методі сполучених градієнтів для неквадратичної функції вводиться процедура відновлення коефіцієнтів: $\beta_{n-1}, \beta_{2n-1}, \beta_{3n-1}$ не обчислюються за формулою (2.5) або (2.6), а періодично дорівнюють нулю, при цьому

$$h^i = -f'(x^i), \quad i = 1, n, 2n, \dots$$

Така процедура дозволяє зменшити вплив похибок під час вирішення одновимірних завдань та векторів h^k зберігають лінійну незалежність. У цьому випадку метод сполучених напрямків (2.5) набуває вигляду:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k, \quad f(x^k + \alpha_k h^k) = \min_{\alpha \geq 0} f(x^k + \alpha h^k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$h^0 = -f'(x^0); \quad h^k = -f'(x^k) + \beta_{k-1} h^{k-1}, \quad k \geq 1,$$

$$\beta_{k-1} = \begin{cases} \frac{(f'(x^k), f'(x^k) - f'(x^{k-1}))}{\|f'(x^{k-1})\|^2}, & k \notin \{n, 2n, 3n, \dots\}, \\ 0 & , \quad k \in \{n, 2n, 3n, \dots\}. \end{cases}$$

Отриманий метод називається методом сполучених градієнтів і може застосовуватись для оптимізації неквадратичної функції.

То ж при застосуванні цього методу для мінімізації обмеженої функції f , градієнт якої задовольняє умовам Липшиця, для будь-якої початкової точки $x^0 \in R^n$ отримуємо:

$$\|f'(x^k)\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Для сильно опуклої гладкої функції, яка задовольняє додатковим обмеженням, $\{x^k\}$ збігається до точки мінімуму x^* із надлінійною швидкістю.

Метод сполучених градієнтів має високу швидкість збіжності. Трудоемність порівняно невелика. Це дозволяє відносити метод сполучених градієнтів до найефективніших алгоритмів першого порядку. Він дещо поступається ефективності квазіньютонівським методам, пред'являючи водночас менші вимоги до обсягу пам'яті.

2.2.2 Квазіньютонівський метод

Нехай функція f буде двічі диференційована і розглянемо метод:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k, \quad h^k = -H_k f'(x^k). \quad (2.7)$$

Матриця H^k , виберемо таким шляхом, щоб вона у певному сенсі наближала матрицю $(f''(x^k))^{-1}$. Відомо, що

$$f'(x^k) - f'(x^{k+1}) = f''(x^{k+1})(x^k - x^{k+1}) + o(\|x^k - x^{k+1}\|).$$

Допускаючи невинродженість матриці $f''(x^{k+1})$, звідси, з точністю до членів вищого порядку малості відносно $\|x^k - x^{k+1}\|$, маємо

$$(f''(x^{k+1}))^{-1}(f'(x^{k+1}) - f'(x^k)) \approx x^{k+1} - x^k. \quad (2.8)$$

При цьому, якщо $f(x) = \langle Ax, x \rangle / 2 + \langle b, x \rangle$ – квадратична функція, де A – симетрична позитивно визначена матриця, то $f'(x) = Ax + b$, $f''(x) = A$ і наближена рівність (2.8) обертається в точну

$$(f''(x^{k+1}))^{-1} \Delta y^k = \Delta x^k,$$

де $\Delta x^k = x^{k+1} - x^k$, $\Delta y^k = f'(x^{k+1}) - f'(x^k)$.

Тому цілком природно вимагати, щоб для матриці H_{k+1} , яка наближає $(f''(x^{k+1}))^{-1}$, виконувалося умова:

$$H_{k+1} \Delta y^k = \Delta x^k. \quad (2.9)$$

Ця умова називається квазиньютонівською. Вона лежить на основі цілого ряду методів апроксимації $(f'')^{-1}$. Відповідні методи оптимізації, для яких на кожному кроці виконується ця умова, також називаються квазиньютонівськими.

Нехай наближення до $(f'')^{-1}$ перераховується від кроку до кроку за формулою

$$H_{k+1} = H_k + \Delta H_k.$$

Зрозуміло, що цій рівності відповідає матриця 1-го рангу, задана формулою:

$$\Delta H_k = \frac{1}{\langle z^k, \Delta y^k \rangle} (\Delta x^k - H_k \Delta y^k) \cdot z^k, \quad (2.10)$$

де $z^k = \Delta x^k - H_k \Delta y^k$, з (2.10) при $\langle \Delta x^k - H_k \Delta y^k, \Delta y^k \rangle \neq 0$.

Тоді отримаємо таку формулу для розрахунку матриць H_k

$$H_{k+1} = H_k + \frac{(\Delta x^k - H_k \Delta y^k) \cdot (\Delta x^k - H_k \Delta y^k)}{\langle \Delta x^k - H_k \Delta y^k, \Delta y^k \rangle}. \quad (2.11)$$

За H_0 можна вибрати будь-яку додатну симетричну матрицю. Насправді зазвичай вибирається одинична матриця.

Довжина кроку в квазиньютонівських методах найчастіше вибирається з умови максимізації функції вздовж заданого напрямку

$$f(x^k + \alpha_k h^k) = \min_{\alpha} f(x^k + \alpha h^k). \quad (2.12)$$

Для квадратної матриці $f(x) = \langle Ax, x \rangle / 2 + \langle b, x \rangle$, де A – симетрична, додатно означена матриця, всі три методи при будь-якому початковому наближенні $x^0 \in R^n$ генерують одну і ту ж послідовність точок $x^1, x^2, \dots, x^n$.

Причому

$$H_n = (f''(x^n))^{-1} = A^{-1}, \quad x^n = x^* = A^{-1}b = \arg \min_{x \in R^n} f(x),$$

тобто, квазиньютонівські методи дозволяють знайти мінімум квадратичної функції по n кроків. Для неквадратичних функцій це не так [13].

Квазиньютонівські методи є ефективним засобом розв'язування задач безумовної оптимізації. Вони мають високу швидкість збіжності, водночас при реалізації квазиньютоновських алгоритмів годі й виконувати трудомістких операцій. Однак, при великій розмірності простору необхідні збереження та перерахунку на кожному кроці матриць H_k , що тягне за собою високі вимоги до обсягу пам'яті комп'ютера.

2.3 Розв'язання задачі оптимізації марковської системи

2.3.1 Одноканальна система з експоненційним законом часу обслуговування

Спочатку розглянемо найпростіше завдання оптимізації людино-машинної системи у вигляді одноканальної СМО з відмовами, що має два стани: S_0 – «вільна» та S_1 – «зайнято». Граф станів системи представлений рисунку 2.1 [4].

На систему надходить пуассонівський потік заявок з інтенсивністю λ , який залежить, від часу:

$$\lambda = \lambda(t).$$

Обслуговування заявки продовжується протягом випадкового часу T_{ob} розподіленого за показовим законом із параметром μ :

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \quad (t > 0).$$

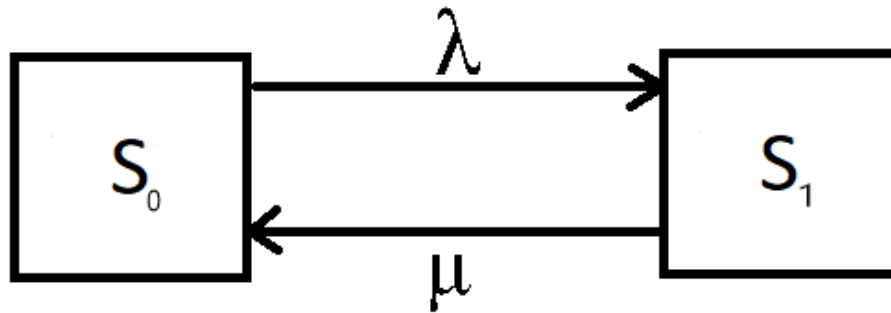


Рисунок 2.1 – Діаграма станів одноканальної системи

Зі стану S_0 до стану S_1 систему переводить потік заявок з інтенсивністю λ , а зі стану S_1 до стану S_0 – «потік обслуговування» з інтенсивністю μ .

Позначимо ймовірність станів як $p_0(t)$ і $p_1(t)$, відповідно. Очевидно, в будь-який момент часу сума ймовірностей дорівнюватиме одиниці:

$$p_0(t) + p_1(t) = 1.$$

Складемо диференціальні рівняння Колмогорова для ймовірностей станів згідно з таким правилом, що: у лівій частині кожного рівняння стоїть похідна ймовірності стану, а права частина містить стільки членів, скільки стрілок пов'язано з цим станом. Якщо стрілка спрямована із цього стану, відповідний член має знак «мінус»; якщо в стан, то знак плюс. Кожен член дорівнює добутку ймовірності переходу, що відповідає стрілці, помноженої на ймовірність того стану, з якого виходить стрілка. Тож, маємо:

$$\begin{aligned}\frac{dp_0}{dt} &= -\lambda p_0 + \mu p_1, \\ \frac{dp_1}{dt} &= -\mu p_1 + \lambda p_0.\end{aligned}$$

Виходячи з того, що сума імовірностей станів є одиницею, можемо відкинути друге рівняння, а в перше, замість $p_1(t)$, підставимо його вираз $(1 - p_0(t))$:

$$\frac{dp_0}{dt} = -(\lambda + \mu)p_0 + \mu.$$

Це рівняння природно розв'язувати за початкових умов $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = 0$.

Розв'язок отримаємо за допомогою функції DSolve із пакета Wolfram Mathematica. В умовах того, що інтенсивність вхідного потоку не змінюється з часом, розв'язок запишемо так:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}.$$

У стаціонарному випадку (при $t \rightarrow \infty$) ймовірність дорівнює

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Який набір λ і μ буде оптимальним для цієї системи?

На це запитання може відповісти задача оптимізації, для якої ми виберемо формулу ентропії Шенона як функцію мети, або, видаляючи знак «-» беремо мінімум замість максимуму. Вона набуде вигляду

$$F(\lambda, \mu) = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i.$$

Застосувавши її для системи (рисунок 2.1) у стаціонарному випадку – отримаємо:

$$F(\lambda, \mu) = \frac{\lambda \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right) + \mu \ln\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)}{\lambda + \mu}.$$

Враховуючи малу розмірність, результат може бути отриманий вручну або за мінімального використання математичного пакета. Виберемо випадкові інтенсивності та мінімізуємо функцію мети методом сполучених градієнтів за допомогою функції FindMinimum з пакета Wolfram Mathematica, також мінімізація за допомогою пакета MathCad наведена у додатку А. Наведемо алгоритм одного з методів мінімізації, а саме методу сполучених градієнтів:

а) означимо $\bar{x}^{(k)}$, ε , $k = 0$;

б) обчислюємо:

$$\beta^{(k+1)} = \begin{cases} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \right)^{(k)}, \left(\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \right)^{(k)} - \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \right)^{(k-1)} \right) \right) \\ \left(\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \right)^{(k-1)}, \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \right)^{(k-1)} \right) \end{cases}, \quad k \notin 1, \quad k \in I = \{0, n, 2n, 3n, \dots\};$$

в) обчислюємо:

$$\bar{p}^{(k)} = \begin{cases} -\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \right)^{(k)} + \beta^{(k-1)} \bar{p}^{(k-1)}, & k = 1, 2, 3, \dots \\ -\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \right)^{(0)}, & k = 0 \end{cases};$$

г) знаходимо α шляхом розв'язання наступної задачі мінімізації

$$\phi_k(\alpha) = F(\bar{x}^{(k)} + \alpha \bar{p}^{(k)}) \rightarrow \min_{\alpha};$$

д) обчислимо:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \alpha \bar{p}^{(k)};$$

е) перевіряємо умову $\left\| \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \right)^{(k+1)} \right\| \leq \varepsilon$. Якщо вона не виконується, тоді

$k = k + 1$ і переходимо до пункту 2; якщо ж умова виконується, тоді покладаємо $\bar{x}^* = \bar{x}^{(k+1)}$;

є) виводимо $\bar{x}^*, F(\bar{x}^*)$.

Після вирішення задачі мінімізації із значеннями $\lambda = 0.1$, $\mu = 0.5$ отримаємо значення максимальної ентропії, оптимальних інтенсивностей, при яких досягатиметься максимальна ентропія дорівнюватиме:

$$F(\lambda, \mu) = 0.693147, \lambda = 0.508253, \mu = 0.508253.$$

Вочевидь, що за відсутності додаткових обмежень інтенсивності однакові. Для стаціонарного випадку завдання оптимізації не варте, формули Ерланга для цього випадку симетричні. З практичної точки зору результат очевидний, оскільки процес відновлення, тобто послідовність аварій, що надходять, і боротьба з ними йдуть постійно. Така модель добре описує систему із постійно завантаженою підсистемою оновлення. Прикладом може бути відновлювальна бригада при постійному та інтенсивному потоці аварій. Ця ситуація зараз є актуальною для опису роботи по відновленню комунальних служб після руйнації.

Тепер візьмемо не стаціонарний випадок, тоді формула ентропії виглядатиме:

$$\frac{(\lambda - e^{-t(\lambda+\mu)}\lambda)\ln\left(\frac{\lambda - e^{-t(\lambda+\mu)}\lambda}{\lambda + \mu}\right) + (\mu + e^{-t(\lambda+\mu)}\lambda)\ln\left(\frac{\mu + e^{-t(\lambda+\mu)}\lambda}{\lambda + \mu}\right)}{\lambda + \mu}.$$

Прийmemo інтенсивність та час як змінні значення. Початковими значеннями оберемо $\lambda = 0.5$, $\mu = 0.5$, $t = 10$. Тоді розв'язуване завдання оптимізації отримаємо значення максимальної ентропії, оптимальних інтенсивностей і часового проміжку при яких досягатиметься максимальна ентропія дорівнюватиме:

$$F(\lambda, \mu, t) = 0.693, \quad \lambda = 0.500, \quad \mu = 0.494, \quad t = 10.$$

Перевіривши результати для $t = \{5, 8, 10\}$, отримаємо різні результати оптимальної інтенсивності обробки, це явище виникає через порушення симетрії, що призводить до зменшення максимальної ентропії.

Цікаво відзначити, що після певного періоду часу оптимальні інтенсивності починають дорівнювати один одному. Це тому, що до певного моменту система не знаходиться в стаціонарному стані, але, як видно з рисунка 2.2 та рисунка 2.3, ймовірності майже дозрівають рівноваги приблизно з $t = 3$, та й ентропія майже наближається до максимуму при $t = 3$.

Усі рисунки зроблено за допомогою математичного пакета Mathematica. Над кожним наведено функції та параметри системи та побудови графіка.

Для випадку, коли t – параметр, а не змінна оптимізації, розглянувши кілька випадків при різних значеннях t , можна зробити висновок, що p_0 зростає зі збільшенням μ . Це зрозуміло і правильно, але в цьому випадку ентропія зменшується через порушення симетрії зі зростанням μ .

`Plot[{p0[0.5, 0.5, t], p1[0.5, 0.5, t]}, {t, 0, 100}, PlotRange -> {{0, 6}, {0, 1}}]`
[график функции] [отображаемый диапазон графика]

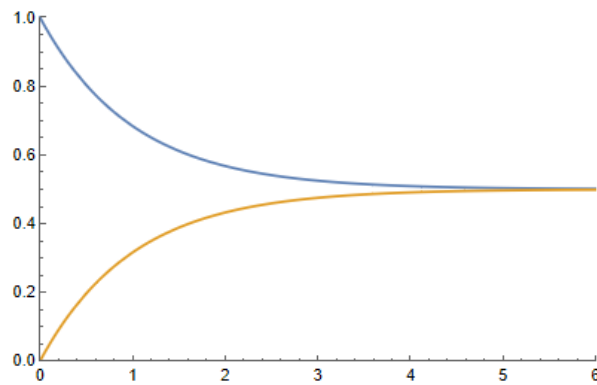


Рисунок 2.2 – Залежність імовірностей від часу

`Plot[{entropy[0.5035035298076843, 0.4967263180740348, t], -0.693147}, {t, 0, 6}, PlotRange -> {{0, 3}, {-0.7, 0}}]`
[график функции] [отображаемый диапазон графика]

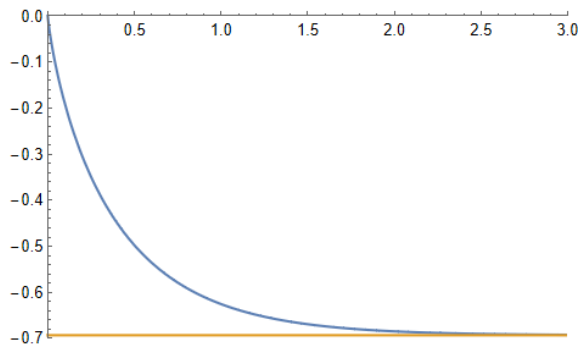


Рисунок 2.2 – Залежність ентропії від часу

Тепер розглянемо нагоду, близьку до реальності, тобто коли ми не можемо впливати на інтенсивність входу, λ – параметр. При початкових значеннях як $\lambda = 0.1$, $\mu = 0.1$, $t = 5$ отримаємо:

$$F(\mu, t) = -0.692, \mu = 0.048, t = 9,163.$$

Розглянемо для цього випадку задачу швидкодії. Апарат принципу максимуму Понтрягіна тут надмірний, тому що диференціальні рівняння у вирішенні у явному вигляді. Мінімізуватимемо час реакції системи відновлення одночасно з максимізацією ентропії. Роль керуючої змінної грає μ . Функцію мети запишемо, як:

$$\frac{(\lambda - e^{-t(\lambda+\mu)}\lambda)\ln\left(\frac{\lambda - e^{-t(\lambda+\mu)}\lambda}{\lambda + \mu}\right) + (\mu + e^{-t(\lambda+\mu)}\lambda)\ln\left(\frac{\mu + e^{-t(\lambda+\mu)}\lambda}{\lambda + \mu}\right)}{\lambda + \mu} + t,$$

При $\lambda = 0.1$ отримаємо мінімум:

$$F(\mu, t) = -4.538 \cdot 10^{-5}, \mu = 4.539 \cdot 10^{-4}, t = -10^{-7}.$$

Без додаткових обмежень, що характеризують систему, результат тривіальний – максимум ентропії досягається при $t=0$ – максимальна швидкодія.

При збільшенні кількості станів хоча до десяти необхідна спеціальна програма оптимізації ентропії, ми розглянемо цей випадок у наступному розділі. Зазначимо, що хоча щодо змінних p_i ентропія – опукла догори функція, для інтенсивностей λ, μ у багатовимірній системі це не так. Виникає питання вибору спеціальної оптимізації для ентропії. Нижче описані методи та причини вибору одного з них.

2.3.2 Розширення кількості станів системи

Нижче показано, як перейти від вищеописаного модельного випадку до реальніших моделей, описаних у [4 – 6], розширюючи кількість станів людино-машинної системи. Граф марковської системи однієї з них наведено на рисунку 2.3, де S_0 – стан повної працездатності системи, з якого вона починає. Він переходить у непрацездатний стан S_3 з інтенсивністю λ ; S_3, S_2, S_1 – стани роботи при відновленні з інтенсивностями μ_i .

Для вищеописаних моделей передбачалося, що потужність аварії невелика, і тому кожна нова подія "відсуває" процес відновлення лише на один

крок назад. З великою щільністю катастрофи відновлення кожного разу починається спочатку, і граф станів, при $n = 3$, має вигляд як у рисунку 2.3.

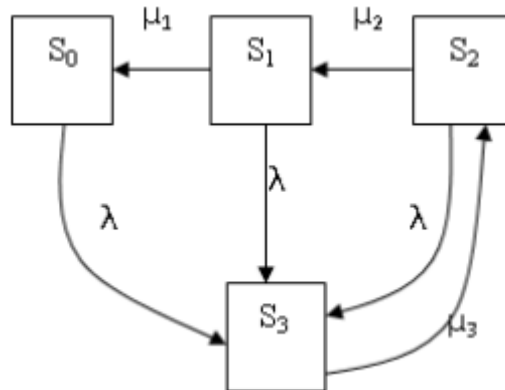


Рисунок 2.3 – Граф станів багатоканального завдання

Рівняння Колмогорова цього випадку теж легко отримати:

$$\begin{aligned} P'_0 &= -\lambda P_0 + \mu_1 P_1; & P'_1 &= \mu_2 P_2 - (\lambda + \mu_1) P_1; & P'_2 &= \mu_3 P_3 - (\lambda + \mu_2) P_2; \\ P'_3 &= \lambda P_0 + \lambda P_1 + \lambda P_2 - \mu_3 P_3. \end{aligned} \quad (2.13)$$

У рівноважному випадку, вирішуючи систему рівнянь алгебри, отримуємо:

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu_3}; & P_2 &= \frac{\lambda \mu_3}{(\lambda + \mu_3)(\lambda + \mu_2)}; \\ P_1 &= \frac{\lambda \cdot \mu_3 \cdot \mu_2}{(\lambda + \mu_3) \cdot (\lambda + \mu_2) \cdot (\lambda + \mu_1)}; & P_0 &= \frac{\lambda \cdot \mu_3 \cdot \mu_2 \cdot \mu_1}{(\lambda + \mu_3) \cdot (\lambda + \mu_2) \cdot (\lambda + \mu_1) \cdot \lambda}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Формули допускають очевидні узагальнення у разі n етапів S .

За формулами (2.14) для реальних λ та μ розраховані значення P_i щодо різних характерних випадків співвідношення інтенсивностей подій.

Як характеристика безпеки ситуації природно розглянути величину відношення середнього інтервалу аварій до середнього часу їх усунення:

$$\alpha = (1/\lambda) / (1/\mu_1 + 1/\mu_2 + 1/\mu_3),$$

тоді середній період аварії: $\tau = (1/\lambda) + (1/\mu_1 + 1/\mu_2 + 1/\mu_3)$.

З метою визначення характерного T виходу на асимптотику на рисунку 2.4 наведено характерний графік розв'язків рівнянь Колмогорова (2.13) для порівняння з числами, отриманими за формулами (2.14).

Для $\alpha = 0.3 < 1$ маємо: $P_0 = 0.13$, $P_1 = 0.16$, $P_2 = 0.28$, $P_3 = 0.43$, $T = 10$, $\tau = 14$. Для $\alpha = 1.3 > 1$ маємо: $P_0 = 0.5$, $P_1 = 0.1$, $P_2 = 0.2$, $P_3 = 0.2$, $T = 18$, $\tau = 18$. Для $\alpha \cong 1$ маємо: $P_0 = 0.4$, $P_1 = 0.2$, $P_2 = 0.2$, $P_3 = 0.2$, $T = 20$, $\tau = 21$.

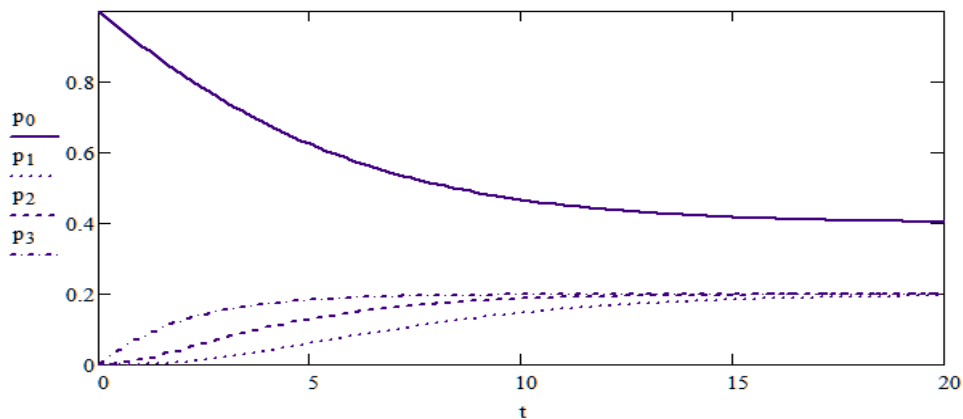


Рисунок 2.4 – Часова залежність ймовірностей станів та вихід на стаціонар

Результат $T \cong \tau$ вказує на збіг за порядком величин цього часу із середнім часом операції та інтервалами між аваріями. Це підтверджує законність переходу від динамічної моделі до стаціонарної, причому тим більше небезпечніша ситуація ($\alpha \ll 1$).

Далі запропоновано узагальнення моделі системи «людина-машина-середовище».

Тут λ і μ_i – константи, n – кількість етапів операцій процесу оновлення.

Відмінність від класичної моделі: кожна операція має свою інтенсивність μ_i за постійної інтенсивності аварій. Для рівнянь Колмогорова в цьому випадку

їх виведення та рішення мало відрізняються від класичного. Тобто обґрунтування переходу в стаціонар і наявність граничних ймовірностей – також не відрізняються. Маємо розмічений граф станів, аналогічний до процесу «загибелі та розмноження» (рис. 2.5).

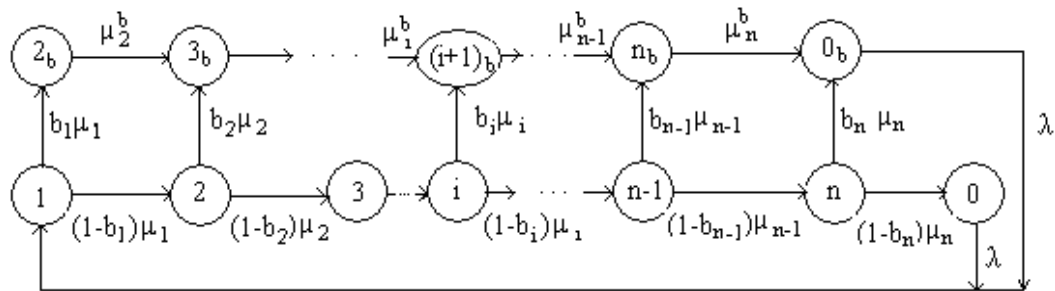


Рисунок 2.5 – Розмічений граф станів повної та неповної працездатності оператора

Отримуємо розв’язок для ймовірностей станів, з яких P_0 , безумовно, найцікавішим:

$$\lambda P_0 = \mu_1 P_1, \quad \lambda P_1 = \mu_2 P_2, \quad \lambda P_{n-1} = \mu_n P_n \quad \text{при} \quad P_0 + P_1 + \dots + P_n = 1, \quad (2.15)$$

$$P_i = \frac{\lambda^i}{\mu_1 \cdot \mu_2 \dots \mu_n} P_0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

За умови (2.15) маємо:

$$P_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^k}{\prod_{i=1}^k \mu_i} \right)^{-1}.$$

Відомо, що для змінних $\mu_i(t)$ остання формула зберігається у сенсі середнього часу роботи кожному етапі. Без суттєвої зміни результату можна запропонувати низку подальших узагальнень на найпростіші потоки подій. У

цьому адекватність припущень слід перевірити чисельним експериментом на імітаційної моделі чи порівнянням з рішеннями рівняння Колмогорова:

а) $\lambda(t)$ є ступінчастою функцією λ_k , а тоді

$$P_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^k \lambda_i / \mu_i \right)^{-1} ;$$

б) $\lambda(t)$ і $\mu(t)$ – довільні, проте задовольняють умовам стаціонарності та існування граничних ймовірностей $P_i(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Висновки за розділом 2

Запропоновано модель системи при слабких руйнуваннях внаслідок аварії та зміни стану оператора при ході її ліквідації. Час і якість роботи на аварії залежить від стану здоров'я людини-оператора. Це в свою чергу, залежить стану системи – прямого шкідливого впливу та стресу. Ми припускаємо, на відміну від першого підрозділу, що оператор може перебувати лише у двох станах, умовно кажучи, «цілком функціональний» і «частково функціональний». Імовірність відновлення ефективності в процесі ліквідації аварії дорівнює нулю, а ймовірність нефункціонального стану під час виконання i -ї операції дорівнює b_i . Після закінчення робіт, працездатність оператора буде відновлено або він буде замінений. Тоді ймовірність переходу кожної пари станів $(i+1)$ так і $(i+1)b$ з повною або частковою функціональністю оператора, відповідно, рівні $b_i\mu_i$ і $(1-b_i)\mu_i$. Стан системи, інтенсивність та ймовірність відновлення роботи системи при неповній функціональності оператора, відповідно, i_b , μ_b і P_{ib} . Розмічений граф станів наведено на рис. 2.5.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Інтерактивні та експерименти з моделлю на MathCad

Для аналізу об'єкта та верифікації ентропійної моделі тут розглядається найпростіший випадок двох станів S_0 і S_1 . Найбільш адекватним програмним середовищем для інтерактивних експериментів повсюдно визнано пакет MathCad [14], що дозволяє поєднувати найпростіші обчислення та досить просторий текстовий коментар у зручному для публікації форматі. Текст першої програми наведено у Додатку А.

3.2 Mathematica як система символьної математики

Система Mathematica була створена американською компанією Wolfram Research, Inc. Основним автором первинних версій розробки є відомий фізик та математик з однойменним прізвищем Стефан Вольфрам (Stephen Wolfram). Концепція системи Mathematica полягає в системі символьної математики, в якій можна обробляти різні технічні обчислення, і не тільки це.

Особливістю пакета є застосування символьної комп'ютерної мови, що дозволяє маніпулювати широким діапазоном об'єктів, необхідних досягнення універсальності, обов'язкових для технічних обчислень, використовуючи лише невелику кількість примітивів. Робота з численними методами та програмування нових алгоритмів тут можлива і навіть продуктивніша, ніж при використанні звичайних алгоритмічних мов.

Тому для роботи обрано вільно розповсюджений (з обмеженим терміном користування) сучасний пакет Mathematica. Текст другої програми наведено у Додатку Б.

Висновки за розділом 3

Завдання роботи складається з розв'язку низки задач, кожна з котрих може бути вирішена за допомогою найбільш адекватного інструментарію – інтерактивно, чи програмно. Для задач першого типу слушно використати найпростіший інструмент – MathCad. Для задач другого типу, де потрібні графічні заходи та програмні обчислення, більш підходить Mathematica. Цім міркуванням і обумовлено вибір програмного забезпечення.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

Через математичні пакети ми отримали оптимальні інтенсивності для наших систем. Виходячи з результатів програмної реалізації наочно видно, що значення максимальної ентропії для систем, яке отримано в MathCad дорівнюють результатам з Wolfram Mathematica, але, як видно на рис. 3.1 та рис. 3.2 за однакових початкових умов і методів мінімізації оптимальні значення інтенсивностей можуть різнитися, це зумовлено різницею алгоритмів у пакетах, але результати можна порівняти. Вони задовільно узгоджуються з реальною фізичною поведінкою моделі. Однак функція FindMinimum з пакета Wolfram Mathematica, що реалізує метод сполучених градієнтів, виходить за область обмежень: час та інтенсивність стають негативними. Процес переривається і призводить до похибок.

```
entropy[λ_, μ_, t_] = Sum[p[[i]] Log[p[[i]]];
                               i=1
                               |натуральный.

ll = 0.45;
mm = 0.5;
tt = 15;

FindMinimum[{entropy[λ, μ, t] && 0 ≤ λ ≤ 1 && 0 ≤ μ ≤ 1 && 0 ≤ t ≤ 100}, {{λ, ll}, {μ, mm}, {t, tt}}, Method -> "QuasiNewton"]
|найти минимум                                     |метод

{-0.693147, {λ -> 0.476458, μ -> 0.476457, t -> 15.}}
```

Рисунок 4.1 – Приклад використання Wolfram Mathematica

```
m = мю, la = лямбда, t = час - заміни
p0(la,m,t) := m/(la+m) + la/(la+m) * e^-(la+m)*t    p1(la,m,t) := 1 - p0(la,m,t)

Ft(la,m,t) := p0(la,m,t)*ln(p0(la,m,t)) + p1(la,m,t)*ln(p1(la,m,t))

la := 0.45    m := 0.5    t := 15    guess
Given
    0 ≤ la ≤ 1    0 ≤ t ≤ 100
    0 ≤ m ≤ 1
Fmt := Minimize(Ft,la,m,t)
Fmt = ( 0.474
        0.474
        15 )    Ft(Fmt_0,Fmt_1,Fmt_2) = -0.693
```

Рисунок 4.2 – Приклад використання MathCad

Висновки за розділом 4

Висновок полягає в тому, що для систем з $n > 2$ станами доведеться реалізувати програму вручну та додатково проводити аналіз на опуклість ентропії, не відносно p_i , що було показано раніше, а за параметрами λ, μ, t . Можливо, така оптимізаційна задача буде багатоекстремальною. Тут розглянуто різні моделі, тож і результати обчислень дещо відрізняються. Більш детально описано в коментарях до програм у Додатках.

ВИСНОВКИ

За час виконання кваліфікаційної роботи отримано необхідні компетенції по аналізу людино-машинної системи і виконано математичне моделювання об'єкта як предметної галузі дослідження. Виділено коло задач та методів їх розв'язку. У якості математичної моделі обрано процес із скінченим простором станів працездатності системи та обслуговуючого персоналу. Обрано метод зведення цей марковської моделі до задачі оптимізації ентропії.

Шредінгер ще у 1948 році показав, що незалежно від того, використовуємо ми принцип максимуму ентропії в просторі S з обмеженням, який фіксує середнє $\langle f \rangle$ на розподілі ймовірностей, чи застосуємо теорему Байєса в S^n з умовою, що фіксує середнє $\bar{f}$ за вибірковими значеннями, для великих n , ми отримуємо однакові розподіли в просторі. Цей результат поширюється також і тоді, коли є кілька обмежень на середнє значення.

Це не тільки доводить узгодженість принципу максимуму ентропії з іншими принципами теорії ймовірностей, а й показує, наскільки потужним інструментом є даний принцип. Очевидно, набагато простіше і доцільніше використовувати максимум ентропії, коли розв'язується задача знаходження розподілу на S . Принцип максимуму інформаційної ентропії відразу підводить до кінцевого результату, виключаючи перехід у простір більш високої розмірності S^n та здійснення граничного переходу при $n \rightarrow \infty$. Це є відповіддю на запитання: «Наскільки можна довіряти результатам, отриманим за допомогою методу максимуму ентропії?».

Однак, необхідно з'ясувати природу отриманих зв'язків між ймовірностями станів. Вони стосуються тільки кількості можливих засобів, якими конкретні відносні ймовірності P можуть бути реалізовані відповідно до поставлених обмежень. Вони не стверджують, що частота, отримана за принципом максимуму ентропії, буде отримана в реальному експерименті; більш того, ані принцип максимуму ентропії, ні будь-який інший принцип теорії ймовірностей не може в

точності передбачити, що відбудеться під час реального експерименту. Коректним твердженням є те, що: розподіл частот P з максимальною ентропією, обчислений за певних обмежень, з найбільшою ймовірністю спостерігатиметься в реальному експерименті, за умови, що фізичні обмеження, які виконуються в експерименті, збігаються з обмеженнями, які враховувалися при обчисленнях.

У нашій математичній моделі «обмеження» – це якась інформація, яка приводить нас до зміни розподілу ймовірностей; в разі обмеження на середнє значення. Таким чином у кваліфікаційній роботі за допомогою прикладів наведено обґрунтування доцільності вибору методу максимізації інформаційної ентропії для отримання ймовірностей переходів між станами.

В результаті досліджень отримана структура та основні властивості систем типу Л-М-С. Описано марковські властивості моделей для таких систем, що дозволило виділити коло завдань для подальшого їх моделювання:

- а) моделювання асимптотичної динаміки відновлення систем Л-М-С після аварій;
- б) моделювання динаміки відновлення систем ЛМС після аварій при випадковому часу настання i -й подій, в тому числі – при "мультикатастрофах";
- в) моделювання динаміки систем Л-М-С при нестационарному зовнішньому впливі;
- г) моделювання станів працездатності підсистеми «Людина – ліквідатор аварій».

Наведено теоретичні обґрунтування та приклади використання методу максимізації ентропії для систем ЛМС. Зроблено висновок про придатність ентропійної моделі для опису ймовірностей стану здоров'я і працездатності підсистеми «Людина».

Обрано метод та програмний засіб розв'язання опуклої задачі математичного програмування та отримано результат – оптимальний розподіл ймовірностей станів для близької до реальної технічної підсистеми. Основний результат роботи – це доведення, що такий підхід до аналізу та оптимізації ЛМС має сенс і дає практичні результати.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Наумейко И. В., Сердюк Н. Н. Марковские модели систем «человек-машина-среда». *Электроника и информатика*. 2005. Т. 4. С. 36–43.
2. Аль-Азави Р. Дж., Наумейко И. В., Альрефаи В. А. Марковская модель ликвидации нестационарного потока аварий при ограничениях на работоспособность оператора. *Восточно-Европейского журнала передовых технологий*. 2013. Т. 3, № 4(63). С. 20–23.
3. Аль-Азави Р. Дж., Наумейко И. В. Модели систем «Человек-Машина-Среда» с восстановлением при неклассических потоках событий. *Восточно-Европейского журнала передовых технологий*. 2013. Т. 2, № 10(62). С. 55–58.
4. Friedman K., Shimony A. Jaynes's maximum entropy prescription and probability theory. *Journal of statistical physics*. 1971. Vol. 3, no. 4. P. 381–384.
5. Журавель І. О. Максимізація інформаційної ентропії в системах з марковською властивістю. 27-й Міжнародний молодіжний форум «Радіoeлектроніка і молодь у ХХІ столітті». Зб. матеріалів форуму. Т. 7. Харків: ХНУРЕ. 2023. С. 127 – 128.
6. Frontini M., Tagliani A. The moment problem and maximum entropy: numerical investigation. *Applied Mathematics*. 1995. No. 32. P. 339–346.
7. Широков М. Е. Энтропийные характеристики подмножеств состояний. *Вести Российской академии наук. Серия математическая*. 2006. Т. 70, № 6. С. 324–366.
8. Maron A. Assessment of service quality for complex technical devices based on the Jaynes' information principle. *Business informatics*. 2016. No. 4. P. 47–51.
9. Хакен Г. Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам : Пер. с англ. Ю. А. Данилова. Москва : Мир, 1991. 240 с.
10. Cover T. M., Thomas J. A. Elements of information theory. Hoboken, USA : John Wiley & Sons, Inc., 2006. 773 p.
11. Entropy maximization for markov decision processes under temporal logic constraints / Y. Savas [et al]. *IEEE transactions on automatic control*. 2020. Vol. 65, no. 4. P. 1552–1567.

12. Saerens M., Fouss F. Yet another method for combining classifiers outputs: a maximum entropy approach. *Multiple classifier systems*. Berlin, Heidelberg, 2004. P. 82–91.

13. Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В. Курс методов оптимизации. 2-е изд. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. 368 с.

14. Очков В. Ф. Mathcad 14 для студентов и инженеров. Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2009. 512 с.