

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ 25 ” листопада 2024 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Чирві Андрію Юрійовичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Математичне моделювання власних та вимушених коливань резервуарів, частково заповнених рідиною

затверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1228 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель руху ідеальної нестисливої рідини в резервуарах та паливних баках

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2024 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 25 листопада 2024 р.

Здобувач _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Стрельнікова О.О.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 68 с., 6 табл., 10 рис., 1 дод., 38 джерел.

ВІЛЬНІ ТА ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ, ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МЕТОДИ ГРАНИЧНИХ І СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, МІЦНІСТЬ, ОБОЛО-НКИ ОБЕРТАННЯ.

Об'єкт дослідження – коливання резервуарів, заповнених рідиною, в широкому діапазоні конструктивних параметрів і зовнішніх впливів.

Мета роботи – створення ефективної комп'ютерної методики, заснованій на удосконаленому методі граничних елементів для моделювання руху рідини, та на поєднанні методів скінченних та граничних елементів при дослідженні коливань оболонок обертання, частково заповнених рідиною.

Методи дослідження – метод Фур'є, модифіковані обчислювальні методи скінченних і граничних елементів, та їх поєднання.

Удосконалено методику визначення форм коливань рідини в резервуарі з урахуванням сили тяжіння на основі модифікації методу граничних елементів з підобластями для числового розв'язання задач теорії потенціалу в прямому формулюванні. Проведено вдосконалення методики визначення форм коливань незаповненої пружної оболонки обертання з метою врахування впливу перегородок у баках на частоти та форми власних коливань за наявності рідини, дослідження вільних та вимушених гармонічних коливань пружних незаповнених та заповнених оболонок з використанням одновимірних методів скінченних та граничних елементів. Виконані розрахунки динамічних та міцнісних характеристик типових оболонкових конструкцій: циліндричних, конічних, сферичних оболонок з використанням редукованих методів скінченних та граничних елементів. Надано аналіз точності класичного методу граничних елементів у порівнянні з методом граничних елементів з підобластями на прикладі сферичної оболонки з перегородкою. Проведено дослідження повздовжніх і поперечних

вимушених коливань системи «оболонка-рідина». Здійснено комп'ютерне дослідження впливу внутрішніх перегородок на частоти та форми вільних коливань резервуарів з жорсткими стінками. Одержані результати можуть бути використані при проектуванні та при експлуатації резервуарів, що використовуються в аерокосмічній та енергетичній галузях. У подальшому передбачається дослідження систем оболонок за умови нечіткого завдання навантажень.

ABSTRACT

Introductory note: 68 pages, 6 tables, 10 figures, 1 appendixes, 38 sources.

FREE AND FORCED VIBRATIONS, INTEGRAL EQUATIONS, BOUNDARY AND FINITE ELEMENT METHODS, STRENGTH, SHELL OF REVOLUTION.

Object of research – vibrations of liquid-filled tanks over a wide range of design parameters and external influences.

Purpose of work – developing effective computer techniques based on an improved boundary element method for modelling fluid motion, and on a combination of finite and boundary element methods in the study of vibrations of shells of revolution partially filled with fluid.

Methods of research – the Fourier method, modified finite and boundary element computational methods and their combinations.

The methods for determining the oscillation modes of liquid within tanks, accounting for gravitational forces, have been refined. Advancements in the boundary element method (BEM) with subdomains, grounded in an analysis of singularities in integral operator kernels, have improved the numerical solution of potential theory problems in their direct formulation. The approach to identifying vibration modes of unfilled baffled elastic shells of revolution has been enhanced, incorporating the impact of elastic tank wall deformations on natural frequencies and modes in the presence of liquid. Free and forced harmonic oscillations of unfilled and filled elastic shells have been analysed using one-dimensional finite and boundary element methods.

Dynamic and strength characteristics of typical shell structures, including cylindrical, conical, spherical shells, have been evaluated using reduced finite and boundary element approaches. A comparative analysis of the accuracy of the classical BEM and the BEM with subdomains was performed on a spherical shell with an in-

ternal partition. The longitudinal and transverse forced oscillations of shell-liquid systems were examined, and computational studies were conducted on the influence of internal partitions on the natural frequencies and oscillation modes of tanks with rigid walls. These findings have practical applications in the design and operation of tanks for aerospace and energy industries. Future work will focus on investigating shell systems under conditions of fuzzy load assignment.

ЗМІСТ

	С.
Перелік скорочень, умовних позначок, одиниць і термінів	9
Вступ	10
1 Системний аналіз предметної області та постановка задач дослідження	12
1.1 Системний аналіз задачі комп'ютерного моделювання власних і вимушених коливань оболонок із рідиною	12
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі комп'ютерного моделювання коливань оболонкових конструкцій з рідиною	15
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	18
1.4 Постановка задач дослідження	19
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	23
2.1 Метод заданих форм	23
2.2 Метод редукції крайових задач до сингулярних інтегральних рівнянь	27
2.3 Застосування методів граничних та скінченних елементів	30
Висновки за розділом 2	33
3 Програмна реалізація	34
3.1 Система комп'ютерних обчислень MAPLE	34
3.2 Алгоритм розв'язання задачі комп'ютерного моделювання власних та вимушених коливань оболонок обертання із рідиною	35
3.3 Опис пакету програм	37
Висновки за розділом 3	39
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	40
4.1 Обчислювальний експеримент для циліндричної та конічної оболонок .	40
4.2. Обчислювальний експеримент для сферичної оболонки	47
Висновки за розділом 4	50
Висновки	52
Перелік джерел посилання	53
Додаток А Лістинг програми	57

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ

МКЕ – метод скінченних елементів;

МГЕ – метод граничних елементів;

МГСЕ – метод граничних суперелементів;

α – хвильове число (кількість хвиль у окружному напрямку);

E – модуль пружності, МПа;

ν – коефіцієнт Пуассона;

ρ_s – густина матеріалу оболонки, кг/м³;

ρ_l – густина рідини, кг/м³.

ВСТУП

Актуальність теми. Проблема динамічної нестійкості вперше проявилася в ракетній техніці під час випробувань першої балістичної ракети в 1947 році. Ця нестійкість полягала в тому, що приблизно на другій третині активної ділянки польоту спостерігалися незатухаючі коливання з частотою близько 1 Гц. Подібні труднощі виникли і при перших спробах запуску ракет серії "Юпітер", що зазнали невдач через втрату стійкості, спричинену динамічною взаємодією пружного корпусу ракети-носія та рідинного ракетного двигуна. Унікальність кожної ракети-носія зумовлює те, що ця проблема залишається актуальною й досі, особливо при розробці нових моделей або модернізації існуючих. Зокрема, впровадження додаткових розгінних ступенів із новими конструктивними схемами призводить до використання баків окислювача і пального з нестандартними формами, такими як співвісні циліндри й конуси, сфери, тороїди тощо. Дослідження міцності й динамічних характеристик таких баків, особливо частково заповнених рідиною, при вимушених коливаннях є надзвичайно складним завданням. Воно вимагає застосування методів і моделей із різних галузей сучасної науки й техніки. Проведення натурних експериментів з реальними резервуарами є вкрай дорогим і не завжди безпечним. Тому основним підходом до дослідження коливань таких систем стає комп'ютерне моделювання, що зумовлює актуальність теми роботи.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є створення ефективної комп'ютерної методики, заснованій на удосконаленому методі граничних елементів для моделювання руху рідини, та на поєднанні методів скінченних та граничних елементів при дослідженні коливань оболонок обертання, частково заповнених рідиною. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «Комп'ютерне моделювання власних і вимушених коливань оболонок із рідиною»;

– отримати основні рівняння та граничні умови крайової задачі;

– провести редукцію крайової задачі до одновимірної сингулярної інтегральної рівняння;

– провести числові дослідження коливань оболонок з рідиною.

Одержані результати можуть бути використані під час проектування та експлуатації резервуарів, що застосовуються в аерокосмічній і енергетичній галузях. Вони сприяють підвищенню надійності конструкцій шляхом врахування впливу динамічних навантажень, зокрема взаємодії рідини з оболонкою резервуара. Це особливо важливо для резервуарів складної форми, таких як сферичні, тороїдальні або співвісно-циліндричні конструкції, які часто використовуються в сучасних ракетно-космічних системах і енергетичних установках.

Результати досліджень також можуть бути інтегровані в інженерні методи розрахунку динамічної стійкості та міцності, дозволяючи оптимізувати конструктивні параметри резервуарів для зниження маси, підвищення їх експлуатаційної довговічності та мінімізації ризиків аварій. Крім того, отримані дані мають практичне значення для розробки методів комп'ютерного моделювання, що можуть бути використані при вивченні поведінки рідини та її впливу на конструкцію в умовах вимушених і природних коливань.

Таким чином, результати роботи є цінними не лише для проектування нових систем, але й для модернізації існуючих резервуарів, забезпечуючи їх ефективність і безпечність у реальних умовах експлуатації.

Об'єктом дослідження є коливання резервуарів, заповнених рідиною, в широкому діапазоні конструктивних параметрів і зовнішніх впливів.

Предметом дослідження є стійкість руху рідини в резервуарах при дії зовнішніх навантажень.

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються модифіковані обчислювальні методи скінченних і граничних елементів, метод Фур'є та їх поєднання.

Публікації. Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, прийняті до участі та друку у матеріалах Міжнародного конгресу II International Turkic World Young Academicians Congress, 10-15 February 2025, Uzbekistan.

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз задачі комп'ютерного моделювання власних і вимушених коливань оболонок із рідиною

Проблема плескання рідини в контейнерах і баках знаходиться в центрі уваги багатьох дослідників протягом кількох останніх десятиліть. Цей феномен може бути описаний як рух вільної поверхні рідини, що міститься в резервуарі під дією раптово доданого навантаження. У роботі [1] наведено класифікацію коливань вільної поверхні рідини в резервуарах, виділивши три основні форми плескання: а) поздовжні плескання, б) вертикальні плескання і) обертальні плескання. Плескання – це явище, яке спостерігається у багатьох галузях промисловості і має важливе практичне значення. Воно виникає в контейнерах для зберігання зрідженого газу, паливних баках ракет і літаків, резервуарах вантажних танкерів, а також у різних типах судин, що використовуються в хімічній, енергетичній і транспортній промисловості.

Особливо виразно це явище проявляється у частково заповнених резервуарах, які схильні до впливу інтенсивного руху рідини. Потужні плескання можуть викликати значний локалізований тиск на стінки резервуара, що створює ризик їх деформації, появи тріщин або навіть повного руйнування. Крім того, такі коливання рідини здатні впливати на загальну динамічну стійкість конструкції, що особливо критично для рухомих систем, таких як ракети, літаки чи морські судна.

Розуміння природи плескань і їхнього впливу на конструкцію має ключове значення для забезпечення надійності та безпеки експлуатації подібних об'єктів. Це завдання вимагає застосування сучасних методів моделювання та аналізу, які дозволяють оцінити динамічні характеристики резервуара і розробити конструктивні рішення для мінімізації ризиків, пов'язаних із цим феноменом.

Проектування резервуарів з рідиною вимагає ретельного дослідження поведінки рідини в експлуатаційних умовах. Плескання проявляється як результат впливу зовнішніх сил, викликаних прискоренням (раптовим уповільненням або зупинкою) об'єкта, що містить рідину та рухається. На особливу увагу заслуговує вивчення розподілу тиску на стінках резервуара, виявлення його локальних максимумів, які можуть удвічі перевищувати значення відповідних величин у незаповненому резервуарі [2]. У вантажних танкерах проблема плескань стоїть особливо гостро: навіть малі рухи контейнера можуть призвести до значних плескань, що вимагає вивчення стійкості.

Ряд досліджень, присвячених проблемам плескання рідини в резервуарах, знайшов своє відображення в ґрунтовних оглядах [3, 4].

Перші роботи в цій галузі з'явилися у 1960-х роках і були пов'язані з вивченням плескання рідкого палива в реактивних двигунах. Оскільки ракетна техніка використовує рідке паливо, стало очевидним, що характер поведінки рідини в паливному баку істотно впливає на динаміку польоту. Це призвело до сплеску інтересу до проблем плескання рідини в резервуарі на початку 60-х років минулого століття, особливо після початку міжнародних космічних програм. До цих досліджень належать роботи [5 – 7].

У [8] застосовано нелінійну теорію визначення сили тиску на стінки кругових і призматичних резервуарів, які рухаються з прискоренням. Було виявлено, що на початковій стадії руху під дією імпульсного навантаження хвилі на вільній поверхні не виникають, а вся маса рідини переміщається на один бік контейнера. Далі, у роботах [9, 10] досліджувався вплив прискорення та кривизни вільної поверхні при русі у прямокутних контейнерах (плоска задача) та було встановлено, що динамічні характеристики істотно залежать від відношення рівня заповнення до ширини контейнера. У цих роботах показано, що максимальна висота підйому вільної поверхні спостерігається у квадратних контейнерах з рівнем заповнення 30-60%, а максимальні зусилля виникають при рівні заповнення в межах 75-93%. Аналогічно, в роботі [11] досліджували розподіл тиску на стінках горизонтальної циліндричної судини безпосередньо піс-

ля впливу ударного навантаження при рівні заповнення рідиною до 95%. Дослідження показало, що тиск на стінки резервуара зростає разом із збільшенням рівня заповнення. У [12] вивчалися короточасні навантаження на резервуари з рідиною та описано п'ять різних фаз руху рідини з різними амплітудами. В [13] проведено числовий експеримент для двовимірного прямокутного резервуара з жорсткими стінками при дії горизонтального і вертикального прискорення. У роботі розглядалася нев'язка нестислива рідина, враховувався нелінійний характер руху. Тут також показано, що основна частота коливань суттєво залежить від ширини резервуара та рівня заповнення. Ефекти в'язкості досліджувалися у [14]. Тут виявлено, що в'язкість проявляється при малих амплітудах та високому рівні заповнення. Однак, в [15] встановлено, що ефектами в'язкості можна знехтувати при великих амплітудах плескання.

Традиційні підходи, що використовуються для оцінки навантажень при плесканні, включають лінійну і нелінійну теорію потенціалу, натурний експеримент та експеримент на модельних зразках. В останні роки активно розвиваються методи обчислювальної механіки рідини, які дозволяють більш точно моделювати складні явища, пов'язані з динамічною взаємодією рідини та конструкції. Зокрема, в роботах [16, 17] показано, що частоти коливань суттєво залежать від рівня заповнення резервуара, що вказує на необхідність урахування цього фактору під час аналізу.

Але методи теорії потенціалу мають певні обмеження: вони не дозволяють повноцінно врахувати явища фрагментації рідини, її злиття або утворення бризок. Це ускладнює їх застосування для складних сценаріїв, таких як різкі маневри ракети-носія чи сильні зовнішні збурення. Однак такі методи залишаються корисними для попереднього аналізу проблеми, надаючи базові знання про динамічні характеристики системи та можливі шляхи її оптимізації.

Таким чином, подальший розвиток методів обчислювальної механіки рідини та їх інтеграція з експериментальними дослідженнями є перспективним напрямком, який може забезпечити більш точний аналіз поведінки резервуарів при плесканні. Це дозволить вирішувати складні інженерні завдання, пов'язані

із забезпеченням стійкості та надійності конструкцій у широкому діапазоні умов експлуатації.

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі комп'ютерного моделювання коливань оболонкових конструкцій з рідиною

В даний час використовується ціла низка різних чисельних методів та схем для опису характеру плескань у резервуарах із вільною поверхнею рідини. В [23] розроблено скінчено-елементний підхід для розв'язання задач про потенційну течію рідини та застосовано його до дослідження тривимірної нелінійної поведінки рідини в резервуарі. Далі, в [24] розроблено підхід, заснований на методі кінцевих різниць, для вивчення динаміки рідини в рухомому резервуарі в тривимірній постановці.

В [25] використано метод скінчених елементів для вивчення частот і форм вільних коливань сферичного резервуара. У [26] наведено уточнені рівняння для визначення форми вільної поверхні та запропоновано варіант методу кінцевих різниць для їх вирішення.

Визначення нелінійних плескання рідини в резервуарі можливе за допомогою методів комп'ютерної механіки, що вимагає залучення складного математичного та програмного забезпечення. На практиці складніші моделі використовують для опису специфіки плескань у резервуарах складної форми, наприклад у паливних ракетних баках. Але на першому етапі найчастіше використовують два типи найпростіших моделей. Перший – це так звана модель маятника, другий – це пружинна аналогія [27]. Обидві моделі ґрунтуються на наступному підході. Потрібно перетворити рух рідини так, щоб вона могла бути розглянута або як прикріплений до резервуару маятник або як прикріплена пружина. Звичайно, при цьому плескання можуть бути розглянуті лише в лінійній постановці.

Наступна модель описує малі коливання. Розроблено та широко викорис-

товується програма SMALLSLOSH [28], за допомогою якої можна обчислити власні частоти та форми коливань для осесиметричного резервуара. Програмне забезпечення реалізує потенційну теорію, коли розглядається нев'язка та стислива рідина ([28]). У цьому вивчається безвихровий рух, тобто. Існує потенціал швидкостей, що задовольняє рівняння Лапласа. Вирішуючи це рівняння за відповідних граничних умов на днищі та стінках резервуара, отримано розв'язання задачі про визначення руху рідини та характеру плескань.

У [29] запропоновано таку модель. Розв'язуючими рівняннями є рівняння Нав'є-Стокса, які є змішаною системою гіперболічних і еліптичних нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних для опису руху в'язкої нестисливої рідини. Положення та переміщення вільної поверхні рідини у резервуарі визначається за допомогою процедури, відомої як метод рідких обсягів. Це відомий потужний метод, заснований на застосуванні функцій, значення яких рівні одиниці всередині рідкого об'єму та нулю поза ним. Далі область, зайнята рідиною, ділиться на безліч малих контрольних обсягів. Рівняння руху задовольняються у кожному контрольному об'ємі. Для визначення нового положення вільної поверхні використовуються стандартні методи розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних. Проведений аналіз свідчить, що проблема коливань оболонкових конструкцій з відсіками, частково заповненими рідиною, залишається недостатньо вивченою і потребує врахування численних чинників. Зокрема, важливо враховувати стисливість та в'язкість рідини, пружність стінок резервуарів, вплив сили тяжіння, плескання вільної поверхні рідини, а також нелінійні ефекти, що виникають під час коливань. Комплексне врахування цих факторів можливе лише за умов застосування зв'язаних формулювань, які дозволяють досліджувати їх взаємодію і взаємний вплив на динамічну поведінку системи.

Попри те, що формулювання та застосування методу граничних елементів (МГЕ) забезпечують надійні рішення для різних інженерних завдань, характерною особливістю одержаних дискретних систем алгебраїчних рівнянь є їхня щільна наповненість та несиметричність. Це, у свою чергу, значно підвищує

обчислювальні витрати. Така ситуація сприяла активному розвитку альтернативних підходів, таких як методи підобластей або методи граничних суперелементів (МГСЕ). Останні базуються на принципах граничних елементів і знаходять застосування як для внутрішніх, так і для зовнішніх крайових задач [30]-[32]. Головна концепція МГСЕ полягає у розбитті обчислювальної області на менші частини, звані підобластями або суперелементами. У межах кожної підобласті застосовується формалізм МГЕ. Для розмежування цих підобластей вводяться фіктивні (інтерфейсні) границі. Динаміка рідини при цьому описується через тиск і швидкість, які визначаються лише на спільних межах між підобластями. На цих інтерфейсних границях мають виконуватись умови безперервності.

Подальший алгоритм передбачає складання алгебраїчних рівнянь для кожного окремого суперелемента. Глобальна система лінійних алгебраїчних рівнянь формується шляхом об'єднання (ансамблювання) рівнянь усіх підобластей із забезпеченням умов рівноваги та сумісності на спільних інтерфейсних вузлах. Завдяки цьому підходу вдається отримати блочні розріджені системи алгебраїчних рівнянь.

Метод граничних суперелементів виявився особливо ефективним у задачах числового моделювання плескань рідини в резервуарах із перегородками. Його застосування дозволяє суттєво знизити обчислювальні витрати, що робить МГСЕ привабливим інструментом для вирішення складних інженерних задач із високими вимогами до точності та ефективності розрахунків.

Ефективним засобом для гасіння вільних та вимушених коливань рідини є встановлення перегородок, що виконують функцію демпферів. Однак визначення оптимального розташування таких перегородок у резервуарах традиційно здійснюється за допомогою натурних експериментів, які є надзвичайно дорогими і часовитратними. У зв'язку з цим, комп'ютерне моделювання стає перспективним і актуальним інструментом для дослідження поведінки резервуарів із рідиною за різних умов експлуатації.

Сучасні методи числового аналізу, такі як обчислювальна гідродинаміка (CFD) у поєднанні з методами скінченних та граничних елементів, дозволяють

отримати детальні дані про динаміку рідини та її взаємодію зі стінками резервуара. Використання цих підходів сприяє оптимізації конструкції резервуарів, мінімізує ризики, пов'язані з руйнуванням конструкцій, та знижує витрати на розробку і тестування нових систем. Таким чином, дослідження проблеми в цьому напрямку є важливим кроком для вдосконалення інженерних рішень у галузях, де застосовуються резервуари з частковим заповненням рідиною.

1.3 Формальна та змістовна постановка задачі

Спочатку опишемо формальну постановку задачі. Формальна постановка задачі передбачає математичний опис системи, що складається з оболонки і рідини, на основі фізичних законів. Вона включає:

а) опис геометричної форми та матеріальних властивостей системи, що передбачає визначення форми та розмірів оболонки, її матеріальних параметрів (густини, модуля пружності, коефіцієнта Пуассона), а також характеристик рідини (густини, в'язкості, стисливості);

б) рівняння руху цих пов'язаних суцільних середовищ складаються з двох частин, а саме, для оболонки використовуються рівняння механіки суцільного середовища, наприклад, у формі рівнянь Ламе або теорії оболонок, а для рідини застосовуються рівняння Нав'є-Стокса (для в'язкої нестисливої рідини) або рівняння потенціальної течії, тобто рівняння Лапласа (для ідеальної нестисливої рідини);

в) до диференціальних рівнянь, що описують крайову задачу, додаємо граничні умови для опису зв'язку між оболонкою та рідиною на межі контакту, зокрема, умови неперервності швидкостей і тисків;

г) також додаємо початкові умови, що визначають початковий стан системи (початкові деформації, швидкості рідини та оболонки).

Змістовна постановка задачі акцентує увагу на фізичному сенсі процесів і визначає практичну ціль дослідження. Це включає наступне.

Фізичну інтерпретацію, а саме, аналіз явищ, таких як плескання рідини, її резонансні ефекти, вплив гравітаційних та інерційних сил, а також взаємодію рідини з оболонкою.

Практичну значимість, що полягає в виявленні критичних режимів коливань, що можуть призводити до втрати стійкості оболонки або її руйнування, а також визначення способів мінімізації ризиків.

Модельні спрощення, а саме виправданий вибір моделі (припущення про нестисливість рідини та лінійність поведінки оболонки).

Аналіз впливових факторів, таких як дослідження впливу рівня заповнення, геометрії оболонки, властивостей рідини, наявності перегородок та інших демпфуючих елементів.

Потрібно також провести верифікацію результатів, тобто співставлення отриманих результатів із даними експериментів або результатами інших дослідників, також треба досліджувати збіжність числових методів для підтвердження достовірності.

1.4 Постановка задач дослідження

Наведемо математичні формулювання задач про коливання оболонкових конструкцій з рідиною. Припускається, що рідина ідеальна, нестислива, а її рух, індукований коливаннями оболонки, є безвихровим. Цей рух викликаний дією сили, що змушує, і починається зі стану спокою. Тому справедливі умови теореми Томпсона про потенційність потоку протягом всього часу. Розглядається зв'язана динамічна задача для оболонкової конструкції, частково заповненої рідиною та підданої короткочасному імпульсному або періодичному гармонічному навантаженню.

Розглянемо пружну оболонку, частково заповнену ідеальною нестисливою рідиною. Нехай $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ – вектор пружних переміщень оболонки; σ – змочена поверхня оболонки, S_0 – вільна поверхня рідини. Припускаємо, що

оболонкова конструкція може мати декілька внутрішніх перегородок досить довільної форми, які встановлюють для гасіння коливань. Їх поверхні позначимо як S_{baf}^i , а поверхню днища оболонки як S_{bot} . Нехай декартова система координат $Oxyz$ пов'язана з оболонкою, вільна поверхня рідини S_0 збігається з площиною xOy в стані спокою. Припускаємо також, що вільна поверхня рідині може бути покрита гнучкою кришкою, для опису якої використовуватимемо рівняння коливань тонкої мембрани. Вважаємо, що резервуар з рідиною піддається динамічному впливу, оболонка має однакову товщину h , виготовлена з однорідного ізотропного матеріалу з модулем пружності E , коефіцієнтом Пуассона ν та густиною матеріалу ρ_s .

Рівняння руху оболонкової системи подаємо в операторній формі

$$\mathbf{L}\mathbf{U} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} = p\mathbf{n} + \mathbf{Q}, \quad (1.1)$$

де \mathbf{L} , \mathbf{M} – оператори пружних та масових сил;

p – тиск рідини на змочені поверхні оболонкової конструкції, H/m^2 ;

\mathbf{n} – зовнішня одинична нормаль;

\mathbf{Q} – сила збудження, H .

Будемо використовувати для опису руху оболонки лінійну модель Кірхгофа-Лава [33].

Для моделювання руху рідини використовуємо гіпотези: рідина є ідеальною та нестисливою, її рух рідини безвихровий. В цих умовах існує потенціал швидкості $\Phi(x,y,z,t)$, градієнт якого є швидкістю рідини, а саме

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Рух ідеальної нестисливої рідини описується рівнянням Лапласа для потенціалу швидкості

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (1.2)$$

Тиск рідини на стінки оболонки визначаємо за формулою

$$p = -\rho_l \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + a_x(t)x + a_z(t)z + gz \right], \quad (1.3)$$

де ρ_l – густина рідини, кг/м³;

$a_x(t), a_z(t)$ – компоненти пришвидшення сили, що збуджує, м/сек²;

g – пришвидшення вільного падіння, м/сек².

Сформулюємо граничні умови для потенціалу швидкостей на границях розрахункової області. Оскільки розглядається оболонка з перегородками, то об'єм рідини ділиться на декілька підобластей (суперелементів). Внутрішні підобласті мають як одну з границь поверхню інтерфейсу (розділення). На кожній з поверхонь інтерфейсу будуть виконуватись умови спряження. На змочених бічних поверхнях та на днищі оболонки виконуються умови непротікання. На вільній поверхні задається кінематична та динамічна умови. Ці граничні умови подаємо в такому вигляді:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} + a_x(t)x + a_z(t)\zeta + g\zeta \right|_{S_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\sigma} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (1.4)$$

де $w = (\mathbf{U}, \mathbf{n})$ – нормальна складова переміщення оболонкової конструкції;

$\zeta = \zeta(x, y, t)$ – функція, що описує рух вільної поверхні.

Крім того, додаємо до умов (1.4) умови спряження на поверхнях інтерфейсу. Для i -ї поверхні інтерфейсу ці умови мають вигляд

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i, \quad q_{i+1} = -q_i, \quad q = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}. \quad (1.5)$$

Таким чином, маємо систему диференціальних рівнянь (1.1)-(1.2) та граничні умови (1.4)-(1.5) для визначення п'яти невідомих функцій $U_1, U_2, U_3, \Phi, \zeta$.

Коли $Q=0$, ця система описує вільні коливання оболонки з рідиною, коли $\rho_l=0$, $Q=0$ вказана система описує вільні коливання незаповненої оболонки. Якщо $Q \neq 0$, то маємо відповідно до ρ_l вимушені коливання порожньої або заповненої оболонки.

Задачі дослідження полягають у наступному. Шляхом числового розв'язання системи (1.1)-(1.2) знайти невідомі функції в залежності від часу. Це дозволить дослідити поведінку рівня підйому вільної поверхні, зміну тиску рідини на змочені поверхні оболонки, та напружено-деформований стан оболонки в процесі коливань. Систему диференціальних рівнянь (1.1)-(1.2) слід також доповнити умовами закріплення оболонкової конструкції, тобто умовами відносно вектор-функції U , а також умовою розв'язності Неймана [33].

Коли $Q=0$, розглянута система рівнянь описує вільні коливання оболонки, заповненої рідиною. Якщо ж $\rho_l=0$ та $Q=0$, ця система моделює вільні коливання порожньої (незаповненої) оболонки. У випадку, коли $Q \neq 0$, характер коливань залежить від наявності рідини: при $\rho_l \neq 0$ це вимушені коливання заповненої оболонки, а при $\rho_l=0$ це вимушені коливання порожньої оболонки.

Основною метою дослідження є розв'язання поставленої задачі, яка полягає у числовому вирішенні системи рівнянь (1.1)–(1.2) з метою визначення невідомих функцій залежно від часу. Такий підхід дозволить детально вивчити динамічну поведінку системи, зокрема:

- рівень підйому вільної поверхні рідини.
- динаміку зміни тиску рідини на змочених ділянках поверхні оболонки.
- напружено-деформований стан оболонки в процесі коливань.

Результати моделювання дадуть важливу інформацію про взаємодію рідини та оболонки, що є критично важливим для розуміння фізичних процесів у складних інженерних системах, таких як резервуари з рідиною, об'єкти аерокосмічної техніки або суднобудівні конструкції.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Метод заданих форм

Для розв'язання задач, пов'язаних із власними та вимушеними коливаннями оболонкових конструкцій з відсіками, що містять рідину, застосовується метод заданих форм. Цей підхід базується на введенні узагальнених координат, що суттєво зменшує розмірність задачі та підвищує обчислювальну ефективність. Завдяки цьому методу вдається досягти оптимального балансу між точністю моделювання та витратами обчислювальних ресурсів.

Основна ідея методу полягає у зображенні розв'язку у вигляді сукупності функцій, що задаються на основі фізичних особливостей системи. Для розв'язання розглянутої задачі отримано зв'язану систему диференціальних рівнянь (1.1), (1.2), яка описує пружні переміщення конструкції та розподіл тиску рідини. Розв'язки цієї системи зображуються через три набори базисних функцій, кожен із яких відповідає певному фізичному процесу:

Перший набір базисних функцій формується з власних форм коливань конструкції за відсутності заповнювача. Ці функції використовуються для побудови гідро-пружних переміщень, враховуючи взаємодію рідини та оболонки.

Другий набір базисних функцій створюється при визначенні потенціалу швидкостей рідини. Потенціал швидкостей представляється як сума двох часткових потенціалів: один частковий потенціал відповідає власним коливанням рідини у жорсткому резервуарі з урахуванням гравітаційних сил, а другий частковий потенціал описує власні коливання рідини у пружній оболонці без урахування гравітації.

Третій набір базисних функцій застосовується для побудови тиску рідини на змочених поверхнях конструкції.

У загальному випадку переміщення оболонкової конструкції з відсіками, які частково заповнені рідиною, визначаються шляхом використання лінійної комбінації форм коливань оболонки без рідини:

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^N c_k(t) \mathbf{u}_k, \quad (2.1)$$

де $c_k(t)$ – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу;

\mathbf{u}_k – форми коливань незаповненої оболонкової конструкції;

N – кількість форм, що утримуються при розрахунках.

При цьому виконуються такі співвідношення:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_k) = \Omega_k^2 \mathbf{M}(\mathbf{u}_k), \quad (\mathbf{M}(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_j) = \delta_{kj} \quad (2.2)$$

де Ω_k – k -а частота власних коливань незаповненої конструкції.

Як відмічене раніше, шукаємо потенціал швидкостей у вигляді суми двох невідомих потенціалів $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. Потенціал Φ_1 зобразимо в вигляді

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k(t) \varphi_{1k} \quad (2.3)$$

де $c_k(t)$ – невідомі залежні від часу коефіцієнти, φ_{1k} – базисні функції, для визначення яких маємо такі крайові задачі [31]:

$$\nabla^2 \varphi_{1k} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\sigma} = w_k, \quad w_k = (\mathbf{u}_k, \mathbf{n}), \quad \varphi_{1k}|_{S_0} = 0. \quad (2.4)$$

Ця крайова задача розв'язана в роботі [31].

Далі подаємо потенціал Φ_2 у вигляді ряду по власним формам коливань рідини в жорсткому резервуарі

$$\Phi_2 = \sum_{k=1}^M \dot{d}_k(t) \varphi_{2k}, \quad (2.5)$$

де $d_k(t)$ – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу;

φ_{1k} – базисні функції;

M – кількість форм, що утримуються при розрахунках.

Для функцій φ_{2k} ставимо такі крайові задачі:

$$\nabla^2 \varphi_{2k} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\sigma} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial t} + g\zeta = 0. \quad (2.6)$$

На вільній поверхні маємо

$$\frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_{2k}.$$

Рівняння вільної поверхні буде таким

$$\zeta = \zeta(x, y, t) = \sum_{k=1}^N c_k \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \mathbf{n}} + \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}}.$$

Для потенціалу швидкостей маємо таке рівняння

$$\Phi = \Phi(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k \varphi_{1k} + \sum_{k=1}^M \dot{d}_k \varphi_{2k}.$$

Таким чином, для сумарного потенціалу $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ будемо мати

$$\Delta \Phi = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

Тобто, для остаточного розв'язання задачі початково-крайової задачі (1.1)

– (1.2) з граничними умовами (1.4)- (1.5) треба задовольнити системі диференціальних рівнянь руху (1.1), та динамічній граничній умові на вільній поверхні, яка описується першим з рівнянь (1.4).

Таким чином, отримуємо таку систему диференціальних співвідношень:

$$\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k \varphi_{1k} + \sum_{k=1}^M \ddot{d}_k \varphi_{2k} + (g + a_z(t)) \left(\sum_{k=1}^N c_k \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \mathbf{n}} + \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \mathbf{n}} \right) + a_x(t)x = 0, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{L} \left(\sum_{k=1}^N c_k(t) \mathbf{u}_k \right) + \mathbf{M} \left(\sum_{k=1}^M \ddot{c}_k(t) \mathbf{u}_k \right) =$$

$$= -\rho_l \left[\left(\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) \varphi_{1k} + \sum_{k=1}^M \ddot{d}_k(t) \varphi_{2k} \right) + a_x(t)x + a_z(t)z \right] + \mathbf{Q}.$$

Із співвідношень (2.19), (2.20) знаходимо невідомі функції часу $c_k(t)$ та $d_k(t)$. Для їх однозначного визначення використовуємо початкові умови

$$c_k(0) = c_{k0}, \quad \dot{c}_k(0) = c_{k1}, \quad d_k(0) = d_{k0}, \quad \dot{d}_k(0) = d_{k1}.$$

Шляхом числового розв'язання системи (2.7) дослідимо вільні та вимушені коливання оболонки, частково заповненої рідиною. Оскільки зазвичай припускалося, що в початковий момент часу система «оболонка-рідина» знаходилась в стані спокою, при розрахунках приймаються нульові початкові умови.

Зупинимось на перевагах методу заданих форм.

Зменшення розмірності задачі. Введення узагальнених координат суттєво знижує кількість рівнянь, що підлягають розв'язанню.

Фізична інтерпретація. Базисні функції відображають основні фізичні механізми, що полегшує аналіз взаємодії рідини та конструкції.

Гнучкість у застосуванні. Метод адаптується до різних конфігурацій конструкцій і умов заповнення відсіків рідиною.

Висока точність. Використання власних форм коливань і потенціалів

швидкостей дозволяє отримати точні результати навіть для складних геометричних форм і нелінійних граничних умов.

Таким чином, метод заданих форм є потужним інструментом для дослідження динамічних характеристик оболонкових конструкцій із заповнювачами, забезпечуючи ефективно й надійне моделювання.

2.2 Метод редукції крайових задач до сингулярних інтегральних рівнянь

Будемо шукати гармонічну функцію φ у вигляді суми потенціалів простого та подвійного шарів, як у роботі [34], тобто використовуємо пряме формулювання методу граничних інтегральних рівнянь

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS - \iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS \quad (2.8)$$

Тут $S = \sigma \cup S_0$, обидві точки P і P_0 належать поверхні S . Величина $|P - P_0|$ є декартовою відстанню між точками P і P_0 , при цьому $P = (x, y, z)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Зупинімось на крайовій задачі (2.4). Подання (2.8) приводить до двовимірної системи сингулярних інтегральних рівнянь

$$2\pi\varphi(P_0) + \iint_{\sigma} \varphi \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS_1 - \iint_{S_0} q \frac{1}{|P-P_0|} dS_0 = \iint_{\sigma} w \frac{1}{|P-P_0|} d\sigma, \quad P_0 \in \sigma, \quad (2.9)$$

$$\iint_{\sigma} \varphi \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} d\sigma - \iint_{S_0} q \frac{1}{|P-P_0|} dS_0 = \iint_{\sigma} w \frac{1}{|P-P_0|} d\sigma, \quad P_0 \in S_0.$$

відносно невідомих функцій φ і q . Тут для спрощення оминаємо індекси. Зауважимо, що функція φ , визначена на поверхні σ , є тиском на змочену поверх-

ню оболонки, а функція q , яка задана на поверхні S_0 , є нормальною складовою швидкості рідини на вільній поверхні. Зазначимо, що у співвідношеннях (2.9) відсутній множник $i\Omega$; це буде враховано при розв'язанні проблеми власних значень.

Оскільки σ – поверхня оболонки обертання, то функцію w доцільно в циліндричних координатах (r, z, θ) подати у вигляді $w = w(r, z) \cos \alpha \theta$. Тут α – задане ціле число (номер гармоніки або кількість вузлових діаметрів). Тоді $\varphi = \varphi(r, z) \cos \alpha \theta$, $q = q(r, z) \cos \alpha \theta$.

Враховуючи, що $|P - P_0| = \sqrt{r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)}$, отримаємо система інтегральних рівнянь (2.9) приймає набуває вигляду [31]

$$\int_{\Gamma} \varphi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho = \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma_1; P_0 \in S_0, \quad (2.10)$$

$$2\pi\varphi(z_0) + \int_{\Gamma} \varphi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho = \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma_1; P_0 \in S_1.$$

Тут R – радіус вільної поверхні, Γ – твірна поверхні обертання σ . Для ядер інтегральних операторів маємо такі співвідношення

$$Q(z, z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[\frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_{\alpha}(k) - F_{\alpha}(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_{\alpha}(k) n_z \right\};$$

$$\Psi(P, P_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_{\alpha}(k);$$

В ЯКИХ

$$F_{\alpha}(k) = (-1)^{\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\alpha\psi d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad E_{\alpha}(k) = (-1)^{\alpha} (1 - 4\alpha^2) \int_0^{\pi/2} \cos 2\alpha\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi$$

є узагальненими еліптичними інтегралами. Для їх обчислення використано ефективний метод, розроблений в роботі [35].

Зведення двовимірних систем інтегральних рівнянь до одновимірних для визначення тиску та форми вільної поверхні має низку суттєвих переваг. Серед них зазначимо такі.

Зменшення розмірності задачі. Перехід від двовимірних рівнянь до одновимірних значно скорочує кількість невідомих і, відповідно, обсяг обчислень. Це суттєво спрощує вирішення задачі та зменшує вимоги до обчислювальних ресурсів.

Підвищення обчислювальної ефективності. Одновимірні рівняння легше реалізувати числовими методами, особливо для великих і складних систем.

Зменшення обсягу пам'яті:

Зниження розмірності системи зменшує обсяг даних, які потрібно зберігати в оперативній пам'яті під час обчислень, що робить метод придатним для виконання на комп'ютерах із обмеженими ресурсами.

Одновимірні рівняння легше аналізувати й інтерпретувати, що полегшує розуміння фізичних процесів, таких як розподіл тиску та зміна форми і положення вільної поверхні.

Зниження похибок апроксимації. Для одновимірних задач простіше підібрати адекватну апроксимацію функцій і більш точно розв'язати рівняння, що знижує загальну похибку числового методу. Для одновимірних рівнянь можна використовувати спрощені та менш ресурсозатратні методи, такі як методи скінченних або граничних елементів уздовж одновимірного контуру, що додатково спрощує обчислення та дає змогу підвищити точність обчислень. Крім того, одновимірні моделі можна легко адаптувати для різних умов і сценаріїв, таких як зміна граничних умов або параметрів задачі, без потреби суттєвих модифікацій чисельної схеми. Таким чином, зведення двовимірних інтегральних рівнянь до одновимірних є не лише математично ефективним, але й практично корисним інструментом для вивчення динаміки оболонок з рідиною.

2.3 Застосування методів граничних та скінченних

У сучасній інженерній практиці існує багато задач, для яких неможливо побудувати аналітичні розв'язки, навіть якщо прийняти спрощувальні припущення та гіпотези. Ці припущення можуть суттєво полегшувати початкове формулювання задачі, проте не завжди забезпечують можливість аналітичного вирішення. У таких випадках ефективними стають числові методи, які дозволяють отримати рішення із заданою точністю.

Серед широко відомих та ефективних методів комп'ютерного моделювання слід виділити метод граничних елементів (МГЕ) та метод скінченних елементів (МСЕ). Протягом останніх десятиліть ці підходи успішно застосовуються для аналізу широкого спектра задач у галузі інженерії. Однак постійний розвиток сучасної техніки висуває нові виклики, що пов'язані з використанням інноваційних матеріалів та проектуванням конструкцій, які функціонують за умов підвищених технологічних навантажень. Це ускладнює формулювання інженерних задач і збільшує вимоги до точності числових методів.

Розглянемо задачу моделювання вимушених коливань резервуарів із рідиною. Для її розв'язання широко використовуються допоміжні характеристики, такі як частоти та форми вільних коливань рідини в резервуарі. Точність обчислення амплітуд цих коливань і міцнісних характеристик конструкції резервуара значною мірою залежить від якості обчислення цих допоміжних величин. Частоти та форми вільних коливань визначаються як розв'язок задачі власних значень, яка вимагає побудови елементів матриці з великою точністю. Ці елементи представляють собою подвійні інтеграли, обчислення яких є критичним етапом усього процесу. Наприклад, якщо внутрішні інтеграли обчислюються з точністю $\epsilon = 10^{-3}$, то через кілька етапів числових обчислень (таких як обчислення зовнішнього інтегралу, побудова матриці для задачі власних значень, обчислення обернених матриць, розв'язання задачі власних значень і подальшого числового розв'язання системи диференціальних рівнянь) ми ризикуємо втратити значну частину точності, і остаточний розв'язок може стати прак-

тично непридатним. Для уникнення таких проблем виправданим є забезпечення високої точності на ранніх етапах обчислень. Зокрема, отримання точності $\varepsilon = 10^{-8}$ при обчисленні внутрішніх інтегралів дозволяє мінімізувати накопичення похибок у подальших обчисленнях. Це забезпечує надійність і точність фінального результату, що є критично важливим для інженерних розрахунків.

Таким чином, дотримання високих стандартів точності на всіх етапах числового моделювання є основою успішного розв'язання складних інженерних задач і забезпечення їхньої практичної цінності.

Опишемо застосування МГЕ для визначення частот і форм коливань рідини в жорсткому резервуарі. При використанні МГЕ границя тіла розбивається на кінцеву кількість граничних елементів, кожен із яких містить одну або кілька точок колокації. У кожній із цих точок записується граничне інтегральне рівняння, що дозволяє сформувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Розв'язуючи отриману систему, визначаємо всі невідомі величини на границі. Для обчислення значень шуканих функцій у внутрішніх точках області використовуємо інтегральне подання, що базується на знайдених граничних величинах. Обчислення елементів матриці СЛАР не викликає труднощів у випадках, коли підінтегральні функції є неперервними, оскільки для таких функцій можна ефективно застосовувати стандартні квадратурні формули, зокрема, квадратури Гауса. Проте виникають особливості у разі, коли точка колокації лежить у межах того самого граничного елемента, на якому виконується інтегрування. У цьому випадку аргумент повного еліптичного інтеграла в точці колокації дорівнює одиниці, що призводить до перетворення інтеграла на невласний інтеграл другого роду. Для успішного обчислення такого типу інтегралів необхідно розробити відповідні квадратурні формули, які забезпечать точність та стабільність обчислень та дослідити їх точність.

Для дискретизації границі застосовуємо кусково-лінійне наближення, тобто представляємо граничні елементи у вигляді відрізків прямих. Невідомі функції апроксимуємо сталими величинами в межах кожного елемента, що значно спрощує обчислення інтегралів та дозволяє ефективно використовувати чи-

слові методи. Розглянемо задачу визначення частот та форм коливань рідини в жорсткому резервуарі. Такий підхід дозволяє врахувати ключові фізичні особливості задачі та забезпечити високу точність у визначенні власних частот і форм коливань системи.

Після дискретизації розв'язувальна система набуває вигляду

$$\mathbf{A}_0 \boldsymbol{\varphi}_0 = \frac{\chi^2}{g} \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\varphi}_0, \quad (2.11)$$

де $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0$ – матриці, отримані внаслідок дискретизації;

$\boldsymbol{\varphi}_0$ – вектор невідомих вузлових значень потенціалу швидкостей на вільній поверхні.

Зауважимо, що матриці $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0$ містять сингулярні доданки, які обчислюються за формулами [35]. Внутрішні інтеграли обчислюємо за алгоритмом Гауса, який описано в [31]. Зовнішні інтеграли містять логарифмічні сингулярності. Обчислення таких інтегралів здійснено за допомогою побудови спеціальних квадратурних формул [36].

Далі зупинимось на використанні методу скінченних елементів. Будуємо скінченно-елементні апроксимації для тиску та переміщень у вигляді $p = \{N\} \{p_f\}$, $\mathbf{u} = \{N^u\} \{u_f\}$, де $p = \{N\}, \{N^u\}, \{p_f\}, \{u_f\}$ – функції форми для тиску, переміщень та відповідні вузлові значення невідомих. Після підстановки цих виразів у визначальні рівняння отримуємо скінченно-елементне формулювання задачі для визначення частот та форм пружної оболонки з рідиною

$$[\mathbf{M}_f] \{\ddot{p}_f\} + [\mathbf{C}_f] \{\dot{p}_f\} + [\mathbf{K}_f] \{p_f\} + \rho_0 [\mathbf{R}]^T \{\ddot{\mathbf{u}}_f\} = 0 \quad (2.12)$$

де $[\mathbf{M}_f], [\mathbf{C}_f], [\mathbf{K}_f]$ – матриці мас, демпфування та жорсткості, відповідно, $\{\mathbf{R}\}$ – акустична гранична матриця. Для числового розв'язання системи (2.12)

використано програмний код на мові Visual-Fortran, розроблений в ІЕМС НАН України ім. А. Підгорного. Зауважимо, що матриця $\{\mathbf{R}\}$ обчислюється за допомогою МГЕ.

Висновки за розділом 2

Застосовано метод заданих форм, що дозволяє суттєво зменшити розмірність початкової задачі, використовуючи узагальнені координати та базисні функції. Такий підхід забезпечує компактність математичного опису й спрощення числових алгоритмів без втрати точності. Використання форм власних коливань конструкції та рідини дозволяє врахувати ключові фізичні особливості системи. Проведена редукція двовимірних систем інтегральних рівнянь до одновимірних значно спрощує числові обчислення. Це дозволяє зменшити кількість обчислювальних операцій, знижує обсяг пам'яті для зберігання даних і забезпечує можливість застосування більш точних одновимірних числових методів. Такий підхід є особливо важливим для задач, де потрібно дослідити тиск і форму вільної поверхні рідини з високою точністю.

Використання одновимірних методів скінченних та граничних елементів дає можливість адаптивного моделювання складних фізичних процесів із високою точністю. Поєднання цих методів із редукованими інтегральними рівняннями забезпечує ефективне числове вирішення широкого класу задач, таких як дослідження власних і вимушених коливань елементів конструкцій, частково заповнених рідиною.

Представлений підхід має достатньо універсальний характер і може бути адаптований для інших типів задач механіки. Його використання відкриває нові можливості для моделювання динамічної поведінки складних інженерних систем, що працюють за умов підвищених технологічних навантажень.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система комп'ютерних обчислень MAPLE

Після того, як отримані всі базисні функції та числові значення частот коливань рідини в жорсткому резервуарі, а також частот коливань незаповненої оболонки, приходимо до необхідності числового розв'язання системи диференціальних рівнянь (2.7). Цю систему диференціальних рівнянь розв'язуємо за допомогою метода Рунге-Кутта 7-8 порядків з використанням програмного пакета MAPLE.

Пакет MAPLE є потужним інструментом для символічного й числового розв'язання систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь (ЗЛДР) другого порядку. Його функціональні можливості дозволяють автоматизувати процес розв'язання, аналізу та візуалізації результатів.

Завдяки інтегрованим алгоритмам символічної математики, MAPLE може знаходити аналітичні розв'язки систем ЗЛДР другого порядку в явному вигляді. Це особливо корисно для задач, де потрібно отримати точний вираз функцій або проаналізувати їх поведінку залежно від параметрів системи.

Якщо аналітичний розв'язок неможливо отримати, (як в нашому випадку) MAPLE дозволяє застосувати числові методи, такі як метод Рунге-Кутти різних порядків або інші адаптивні алгоритми, для обчислення апроксимаційних рішень із заданою точністю. Ці методи забезпечують високу ефективність і точність навіть для складних систем.

Пакет дає можливість задавати довільні початкові умови та будує відповідні системи рівнянь для заданих початкових умов. Дружній інтерфейс та зрозумілий синтаксис дозволяють швидко задавати рівняння, початкові умови та отримувати рішення.

MAPLE підтримує потужні засоби візуалізації, які дозволяють наочно представити результати розв'язання систем ЗЛДР у вигляді графіків, фазових портретів або тривимірних зображень. Це значно полегшує аналіз поведінки

розв'язків.

Переваги використання пакету MAPLE полягають в простоті і зручності у роботі з великими системами диференціальних рівнянь та можливість працювати як із символічними, так і з числовими даними.

Використання MAPLE є доцільним для широкого класу інженерних і наукових задач, таких як моделювання механічних систем, аналіз динаміки рідин і газів, дослідження електричних кіл і багато іншого. Його застосування дозволяє значно скоротити час на обчислення та мінімізувати ризик помилок у розв'язках.

Лістинг програми розв'язання системи ЗЛДР наведено у Додатку.

3.2 Алгоритм розв'язання задачі математичного моделювання власних та вимушених коливань оболонок обертання із рідиною

На основі розрахункових моделей МГЕ і МСЕ та алгоритмів для дослідження коливань оболонки, частково заповненої рідиною, в ІЕМС ім. Підгорного НН України розроблено комплекс у алгоритмічному середовищі VISUAL FORTRAN. Програмний комплекс структурно складається з чотирьох основних компонентів, а саме препроцесора, двох обчислювальних модулів і постпроцесора, рис. 3.1.

Препроцесор забезпечує ввід, оперативну корекцію і збереження вхідних параметрів моделі, завдання умов навантаження та інших необхідних для розрахунків величин. На підставі цих даних підпрограми обчислювального модуля проводять генерацію геометричної моделі оболонкової конструкції.

В цій кваліфікаційній роботі автором були побудовані модулі для генерації геометричних моделей конічної та сферичної оболонок із внутрішніми перегородками. Це дало змогу не лише отримати власні частоти та форми для цих оболонок, но також здійснити аналіз стійкості руху рідини в цих оболонках з подальшим використанням пакету MAPLE,

Блок-схема програмного засобу



Рисунок 3.1 – Блок-схема програмного засобу, базованого на сумісному використанні МГЕ і МСЕ

Після побудови геометричної моделі обираються граничні умови, що відповідають пружним або жорстким стінкам, та відповідному рівню гравітації. Потім відбувається формування матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка є дискретним аналогом системи сингулярних інтегральних рівнянь. Далі формуються допоміжні матриці $\mathbf{A}_0, \mathbf{V}_0$, і розв'язується проблема власних значень. Постпроцесор здійснює обробку отриманих даних та готує дані для візуалізації. Створені програми автоматизації завдання вхідних даних задачі візуалізації результатів досліджень

В Доданку А наведені тексти основних процедур: формування матриць \mathbf{A}_0 та \mathbf{V}_0 та процедури обчислення внутрішніх інтегралів за допомогою метода Гауса, заснованого на використанні середнього арифметико-геометричного значення.

3.3 Опис пакету програм

Пакет прикладних програм складається з декількох окремих програм. Перша з них реалізує МСЕ для знаходження частот та форм пружної розгалуженої оболонки обертання. Для її роботи створюється файл вхідних даних. Він містить такі дані:

- номер гармоніки;
- кількість точок контуру, що закріплюються;
- кількість частин розбиття меридіану оболонки;
- кількість скінченних елементів на кожному сегменті розбиття
- умови закріплення по точках (комбінації 0 та 1)
- довжини частин розбиття;
- радіуси кругових частин;
- модуль пружності;
- коефіцієнт Пуассона;
- товщини за кожним сегментом розбиття.

С цими вхідними даними працює програма DYNAMICS. Результатом її роботи є перша система базисних функцій, тобто частоти та форми власних коливань незаповненої оболонки обертання.

Потім працює програма PREPARE, яка на основі результатів DYNAMICS готує вхідні дані для роботи програми WATER. Ця програма обчислює частоти і форми коливань заповненої оболонки без урахування сили тяжіння, тобто в результаті роботи цієї програми будується друга система базисних функцій.

Програми WATER викликає такі процедури.

Процедура GEO будує значення координат оболонки в розрахункових точках, вектори одиничних зовнішніх нормалей до поверхні, що розглядається. Автором кваліфікаційної роботи розроблені процедури GEO для конічної та сферичної оболонок із внутрішніми кільцевими перегородками.

Процедура ELI обчислює внутрішні інтеграли в сингулярних інтегральних операторах за допомогою внутрішньої процедури GAUSS, яка реалізує на-

ступний алгоритм. Обчислюється інтеграл

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2AGM(a,b)},$$

в якому фігурує середнє арифметико-геометричне значення, його обчислення виконано за алгоритмом

$$AGM(a,b) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Тут

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}, \quad b_1 = \sqrt{a_0 b_0}, \dots, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \dots$$

Це ефективний метод обчислення еліптичних інтегралів другого роду та високоточна числова процедура для обчислення внутрішніх інтегралів. Точність $\varepsilon = |a_n - b_n| < 10^{-8}$ була досягнута при $n = 6$.

Далі програма WATER виконує цикли по точках колокації (розрахункових точках) та граничним елементам та будує матрицю розв'язувальної системи та праву частину. Розв'язок системи алгебраїчних рівнянь здійснює процедура DGELG.

Внаслідок роботи програми WATER отримуємо другу систему базисних функцій.

Третю систему базисних функцій будує програма SLOSHING. В ній є дві процедури, а саме побудова матриць \mathbf{A}_0 , \mathbf{B}_0 , які визначені в формулі (2.12).

Після цього працює програма TESTAG0R, яка знаходить частоти та форми коливань вільної поверхні рідини в резервуарі.

Перша, друга та третя система базисних функцій надалі є вхідними даними для роботи програми, що розв'язує систему звичайних диференціальних рі-

внянь руху, будує графіки та фазові портрети.

Висновки за розділом 3

В розділі описано ключові аспекти розробки та застосування програмного забезпечення для вирішення задач коливань оболонок з рідиною.

Реалізовані процедури для побудови геометрії та матриці системи дозволяють автоматизувати підготовку вихідних даних для розрахунків. Це значно скорочує час, необхідний для підготовки моделей, і мінімізує помилки, пов'язані з ручним налаштуванням.

Програми дозволяють ефективно обчислювати частоти та форми коливань оболонок, заповнених рідиною. Це забезпечує інструмент для детального аналізу поведінки таких структур у реальних умовах.

Використання пакету MAPLE для розв'язання системи лінійних диференціальних рівнянь забезпечує універсальність та гнучкість програмної реалізації. MAPLE дозволяє швидко адаптувати метод до різних умов задачі. Завдяки інтеграції з MAPLE, результати розрахунків можуть бути представлені у зручній формі для аналізу, наприклад, у вигляді графіків чи анімацій, що сприяє глибшому розумінню фізичних процесів.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Обчислювальний експеримент для циліндричної та конічної оболонок

Розглядалися жорсткі циліндричні (рис. 4.1) та конічні (рис. 4.2) оболонки з кільцевими перегородками та без них.

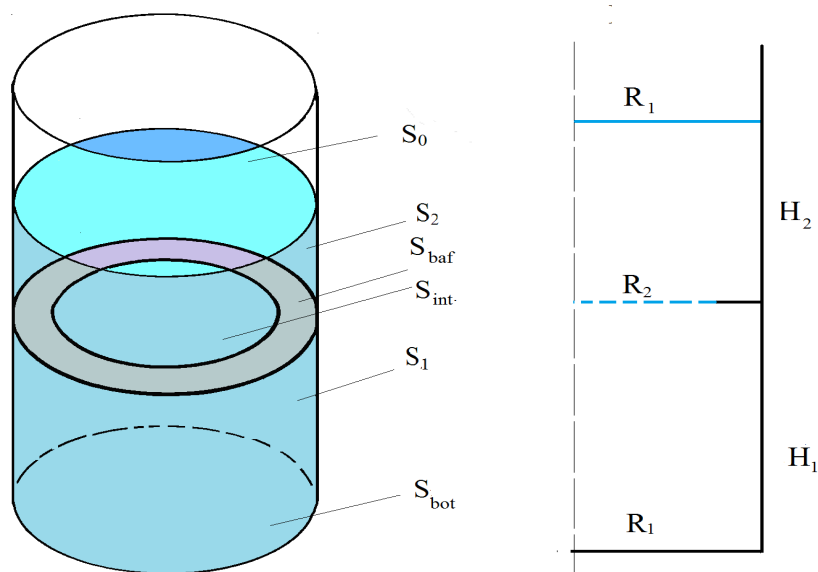


Рисунок 4.1 – Циліндрична оболонка з перегородкою,
частково заповнена рідиною

Конічні оболонки мали Λ та V форми. Спочатку були отримані дані щодо частот та форм власних коливань цих оболонок.

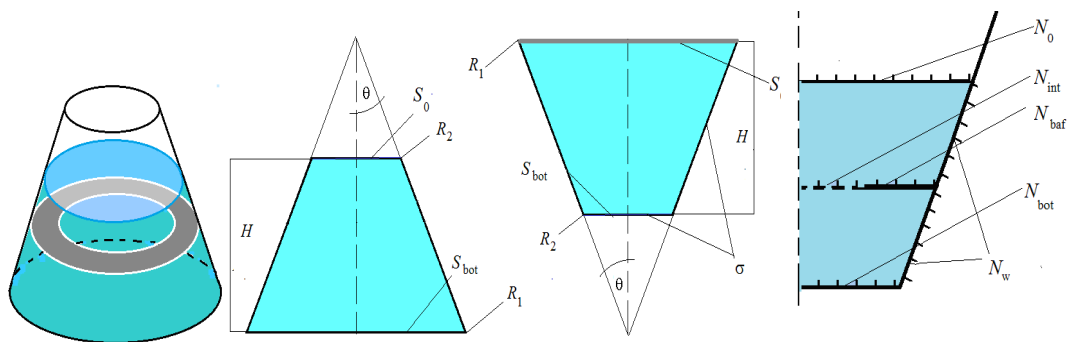


Рисунок 4.2 – Конічні оболонки, частково заповнені рідиною

Зауважимо, що частоти коливань незаповнених пружних конічних оболонок Λ та V форми є однаковими. Але частоти плескань рідини в цих оболонках відрізняються суттєво.

Форми коливань рідини в зазначених оболонках мають характер, притаманний функціям Бесселя.

Слід відмітити, що точних аналітичних розв'язків задачі про коливання рідини в конічних оболонках не існує. Тому було зроблено порівняння результатів, отриманих запропонованим методом та методом розвинення невідомих функцій а ряди Фур'є – Бесселя [37].

В таблиці 4.1 наведені частоти о осесиметричних коливань рідини в конічних резервуарах Λ та V форми. Зауважимо, що частоти коливань в конічних резервуарах Λ та V форми розрізняються суттєво. При цьому частоти коливань рідини в конічних оболонках Λ форми є більш високими, та з ростом номера частоти наближаються до частот коливань циліндру рівного об'єму. Результати обчислення частот з точністю $\epsilon = 10^{-3}$ співпадають з даними роботи [37].

Таблиця 4.1 – Частоти аксіально-симетричних коливань рідини в конічних резервуарах Λ та V форми та циліндричному резервуарі

Оболонка	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
V форма	1.30523	4.92557	8.14119	11.3169	14.6724
Λ форма	5.6206	13.9162	21.8827	29.7942	37.6864
Циліндр	4.6079	13.3504	21.3866	29.3409	37.3589

Було зроблено також порівняння результатів для циліндричних оболонок, отриманих класичним МГЕ та МГЕ із підобластями або методу граничних суперелементів (МГСЕ). Розрахункові дані наведені в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 надає числові значення власних частот плескання рідини для $\alpha=0$ і $H=0,8$ м. Числові результати, отримані за допомогою запропонованого МГЕ, порівнювалися з результатами, отриманими за допомогою МГЕ із підоб-

ластями та аналітичним розв'язком з роботи [22].

Таблиця 4.2 – Порівняння частот коливань рідини в циліндричній оболонці

Метод	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
МГЕ	3.815	7.019	10.180	13.333	16.481
МГСЕ	3.816	7.017	10.177	13.330	16.481
Аналітичний розв'язок	3.815	7.016	10.173	13.324	16.471

Ці результати продемонстрували хорошу узгодженість і засвідчили достовірність запропонованого МГСЕ.

Далі проведено обчислення власних частот плескання рідини за наявності кільцевої перегородки при $R_2 = 0.7\text{м}$ при різному положенні перегородки H_1 , рис.4.1. Порівняння результатів, отриманих запропонованим МГЕ та аналітично орієнтованим підходом, представленим в [37] продемонстровано в таблиці 4.3.

Таблиця 4.3 – Порівняння частот плескань для оболонки з перегородкою

		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$H_1=0.5$	МГЕ	3.756	7.012	10.176	13.328
	[37]	3.759	7.010	10.173	13.324
$H_1=0.9$	МГЕ	2.278	6.200	9.609	12.810
	[37]	2.286	6.197	9.608	12.808

Ці результати також продемонстрували хорошу узгодженість і засвідчили достовірність запропонованого підходу.

На рисунку 4.3 подано співставлення форм коливань рідини для $\alpha = 0$, отриманих числовим та аналітичним методом. Рис. 4.3 а) демонструє зміну

форм коливань вздовж радіусу вільної поверхні, на рис. 4.3 б) зображено зміну форм коливань вздовж вертикальної стінки.

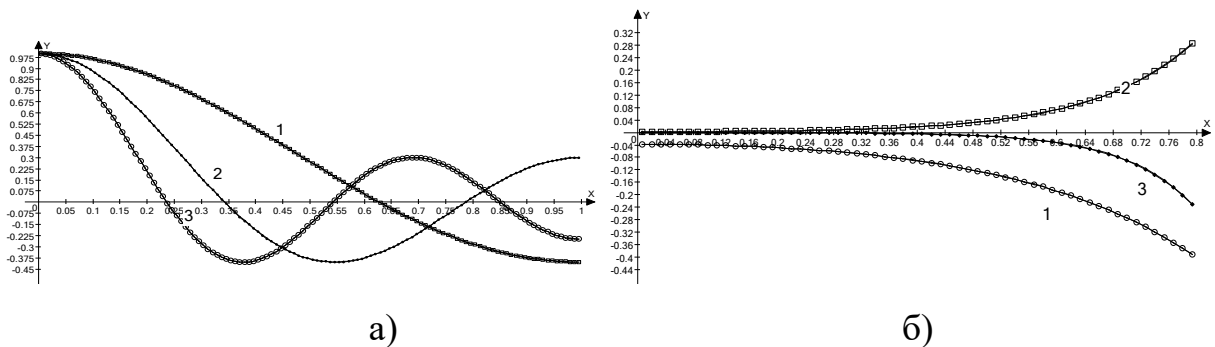


Рисунок 4.3 – Порівняння числового та аналітичного розв'язків

Точками на рис. 4.3 зображені дані числових розрахунків, суцільні лінії відповідають аналітичному розв'язку, отриманому за в [37]. Результати числового та аналітичного та числового розв'язків добре узгоджені, точність обчислень складає $\epsilon = 10^{-5}$. Номери 1,2,3 відповідають номеру форми коливань.

Рис. 4.4 демонструє форми коливань рідини в циліндричному резервуарі, відповідно до хвильових чисел $\alpha = 0$, $\alpha = 1$. Дані отримані за допомогою запропонованого варіанту МГЕ, рисунки побудовані в системі MAPLE.

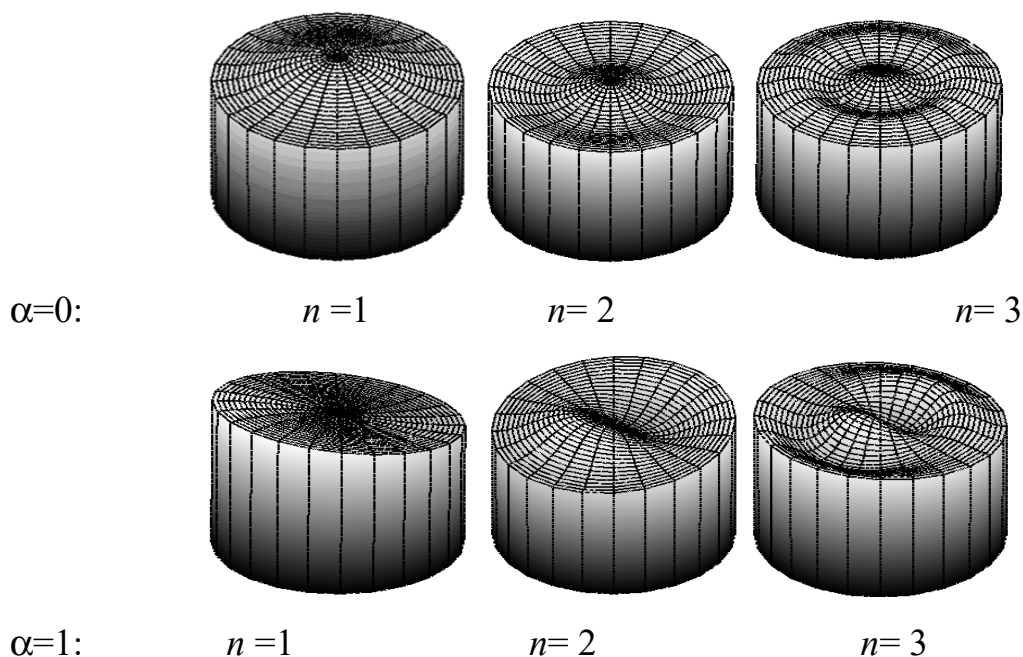


Рисунок 4.4 – Форми коливань вільної поверхні рідини

Далі наводяться дані щодо частот коливань рідини в конічних резервуарах. У таблиці 4.4 представлені результати числового розрахунку для $\alpha = 0,1$ та $n=1, \dots, 4$ та різних і різних положень перегородки, що описуються висотою H_1 , радіус конічної оболонки в положенні перегородки позначається як R_b , а радіус вільної поверхні – R_{int} (рис. 4.2).

По-перше, отримано власні частоти V-подібних і Λ -подібних конічних баків без перегородок. Це відповідає значенням $H_1 = H_2 = 0,5$ м, $R_{int}/R_b = 1$. Значення H_1, H_2 можна вибрати довільно, але має бути $H_1 + H_2 = 1,0$ м. Потім розмістили перегородки в різних положеннях $H_1 = 0,5$ м і $H_1 = 0,8$ м і розглянули різні розміри перегородок, а саме $R_{int}/R_b = 0,5$ і $R_{int}/R_b = 0,2$. Одержані результати показують різну поведінку спадних частот для V-подібних та Λ -подібних конічних резервуарів. Для резервуарів Λ -форми положення перегородок та їх розміри істотно не впливають на значення частот. Для резервуарів V-подібної форми вплив характеристик перегородки є більш значним.

Таблиця 4.4 – Частоти плескань рідини в конічних оболонках

n			1	2	3	4	1	2	3	4
H_1	H_2	R_{int}/R_b	V-форма				Λ -форма			
			$\alpha = 0$							
0.5	0.5	1	3.466	6.681	9.845	12.99	7.985	14.37	20.70	27.01
0.5	0.5	0.5	3.408	6.668	9.843	12.99	7.968	14.37	20.69	27.01
0.5	0.5	0.2	3.405	6.635	9.843	12.99	7.960	14.37	20.69	27.01
0.8	0.2	0.5	2.527	6.387	9.724	12.92	7.344	14.25	20.66	26.99
0.8	0.2	0.2	2.443	6.059	9.565	12.88	7.113	14.20	20.65	26.99
			$\alpha = 1$							
0.5	0.5	1	1.416	4.997	8.206	11.37	4.424	11.09	17.46	23.79
0.5	0.5	0.5	1.228	4.974	8.197	11.37	4.192	11.06	17.46	23.79
0.5	0.5	0.2	1.172	4.943	8.196	11.37	4.037	11.06	17.45	23.79
0.8	0.2	0.5	0.815	4.742	8.003	11.20	3.128	10.78	17.42	23.77
0.8	0.2	0.2	0.630	4.191	7.849	11.23	2.529	10.66	17.36	23.75

Слід також зазначити, що частоти першої гармоніки нижчі за аксіально-симетричні як для V-подібних, так і для Λ -подібних конічних резервуарів. Отримання аналітичних даних для конічних контейнерів вимагає вибору системи координат, де більшість граничних умов можуть бути точно задоволені. Запропонований МГЕ не потребує будь-яких перетворень вихідних рівнянь і залучення спеціальної системи координат.

Рис. 4.5 ілюструє форми плескання рідини в конічній оболонці для нульового та першого хвильового числа.

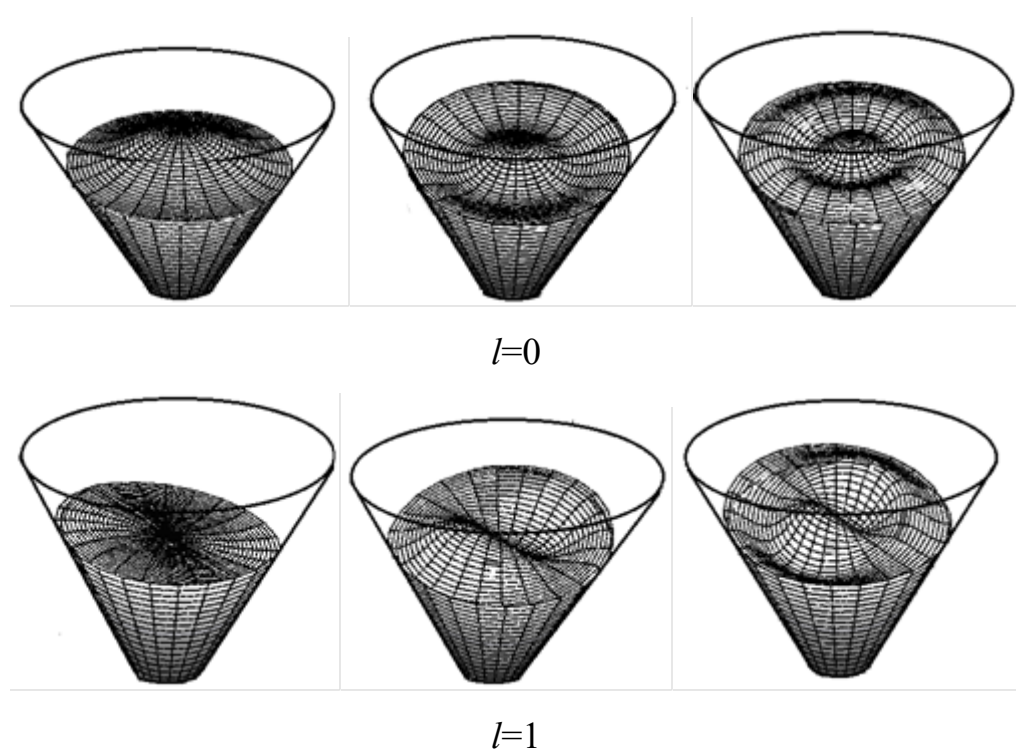


Рисунок 4.5 – Форми коливань вільної поверхні рідини в конічній оболонці

Отримані частотні спектри та форми коливань дозволяють досліджувати вимушені коливання. Тут розглянуто випадок гармонічного зовнішнього навантаження

$$a_x(t) = a_h \cos(\omega_h t), a_z(t) = a_v \cos(\omega_v t).$$

Розрахунок висоти вільної поверхні виконано для різних значень параме-

трів $a_h, a_v, \omega_h, \omega_v$. Спочатку розглянемо вертикальні навантаження. Для аналізу руху рідини розв'язується система диференціальних рівнянь (2.11) з початковими умовами

$$c_k(t) = 0, \dot{c}_k(t) = 0, d_k(t) = 0, \dot{d}_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \dot{d}_{11}(t) = 0.05.$$

Фазові портрети рухів за координатами (ζ, ζ_t) протягом перших 150 секунд наведені на рисунку 4.6.

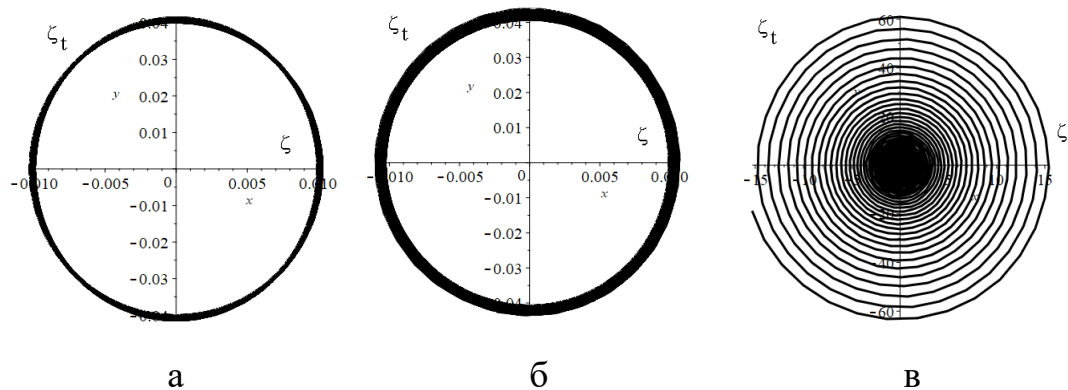


Рисунок 4.6 – Фазові портрети руху рідини в кінчному резервуарі

Для рис. 4.6а) $a_h = 0, a_v = 0.5$, та $\omega_v = 1\text{Hz}$. Для 4.6б) та 4.6.в), $a_h = 0, a_v = 0.5$ $\omega_v = 3.75$ Гц та $a_h = 0, a_v = 0.5$ $\omega_v = 7.5$ Гц, відповідно. З цих результатів можна помітити, що в перших двох випадках рухи стабільні. Однак при $\omega_v = 7.5$ Гц спостерігається необмежене збільшення амплітуди, що вказує на виникнення параметричного резонансу, де частота сили змушення дорівнює подвоєній найменшій основній кутовій частоті.

Далі розглянуто комбіновані вертикальні та горизонтальні навантаження з додаванням горизонтальних навантажень. За результатами розрахунку отримано фазові портрети протягом перших 150 секунд в координатах (ζ, ζ_t) , як показано на рис. 4.7.

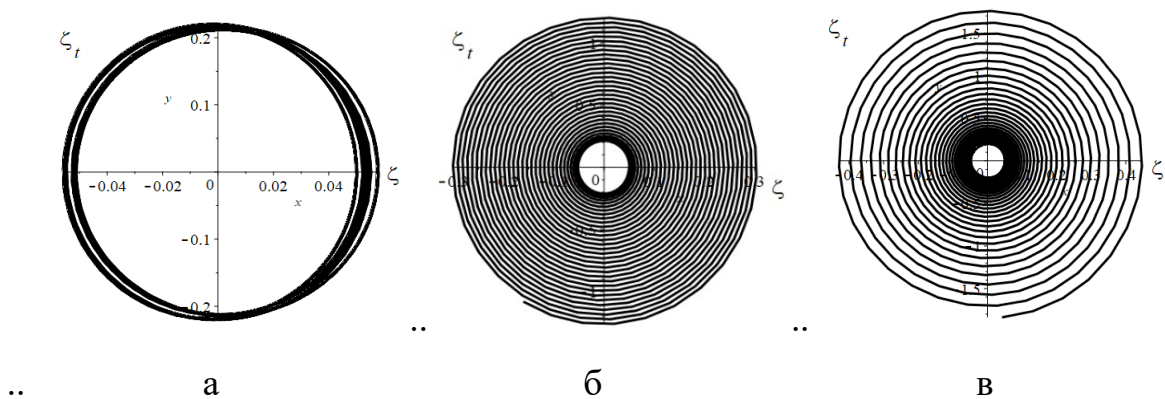


Рисунок 4.7 – Фазові портрети при комбінованому навантаженні

Для 4.6а) $a_h=0.1$, $a_v=1$. $\omega_v = \omega_h$ 3.75 Гц . Для 4.6б) та 4.6в), $a_h=0.0$, $a_v=1$. $\omega_v = \omega_h$ 7.5 Гц та $a_h=0.1$, $a_v=1$. $\omega_v = 7.5$ Гц $a_h = 0.1$, $a_v = 1.0$, $\omega_v = 8.0705$ Hz, відповідно. У цих сценаріях ми спостерігаємо появу додаткового резонансу, пов'язаного з горизонтальним навантаженням.

4.2 Обчислювальний експеримент для сферичної оболонки

Розглянуті власні і вимушені коливання рідини в жорсткій сферичній оболонці. Для зменшення плескань в оболонці встановлена внутрішня перегородка, рис. 4.8.

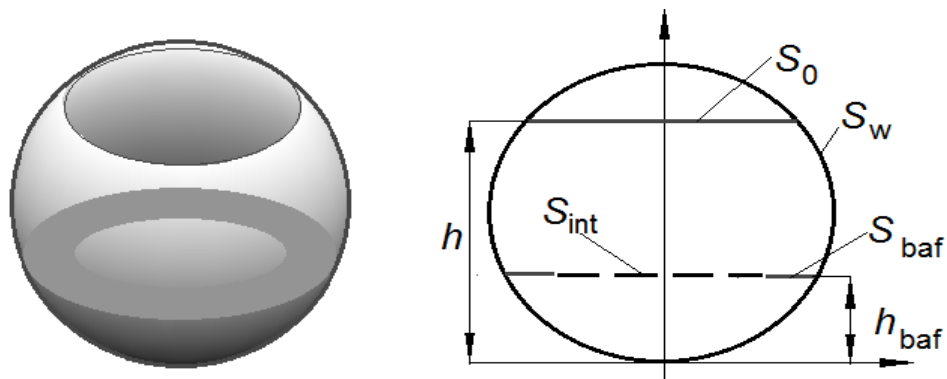


Рисунок 4.8 – Сферичний бак зі внутрішньою перегородкою

Розглянемо сферичну оболонку радіуса $R = 1$ м, частково заповнену ідеальною нестисливою рідиною, рівень заповнення h . Числовий аналіз проводився для $(0.2 < h/R < 1.99)$ та різних α ($\alpha = \overline{0,3}$). При використанні МГЕ меридіан змоченої поверхні оболонки розбивався на 210 елементів, а радіус вільної поверхні – на 155 елементів.

Подвоєння кількості граничних елементів не привело до суттєвих змін в результатах. У таблиці 4.5 наведені результати розрахунку частот в Hz за допомогою МГЕ, та надано порівняння з результатами роботи [38], $h_1 = h/R$, $\alpha=0$.

Таблиця 4.5 – Частоти плескань рідини в сферичній оболонці

m	Метод	Рівень заповнення h , м				
		$h_1=0.2$	$h_1=0.6$	$h_1=1.0$	$h_1=1.8$	$h_1=1.99$
1	[38]	3.8261	3.6501	3.7451	6.7641	29.0500
	МГЕ	3.8314	3.6510	3.7456	6.7665	29.1811
2	[38]	9.2561	7.2659	6.9763	12.1139	51.8122
	МГЕ	9.2686	7.2684	6.9780	12.1205	52.0255

Розглянуто різні рівні заповнення рідиною, включаючи $h_1=1.99$, що відповідає «ice-fishing problem», [38].

Результати розрахунків близькі. Зауважимо, що «ice-fishing problem» (мала вільна поверхня, проблема підлідної риболовлі) є каменем спотикання для багатьох числових методів, включаючи МСЕ. Метод граничних елементів і в цьому випадку демонструє високу точність і надійність.

Розглянуто також сферичну оболонку радіуса $R=1$ м з кільцевою перегородкою, встановленою на висоті $h_{baf} = 1$ м, рис.4.7 за різні радіуси отворів в перегородці, а саме $R_{int}=1.0$ м $R_{int}=0.7$ м та $R_{int}=0.2$ м.

При цьому $R_{int}=1.0$ м відповідає відсутності перегородки. Перші три частоти для першої гармоніки подані в таблиці 4.6.

Таблиця 4.6 – Частоти плескань рідини в сферичній оболонці з перегородкою

	ω^2/g		
	$R_{int} = 1.0$	$R_{int} = 0.7$	$R_{int} = 0.2$
	2.1232	2.0435	1.4234
	5.9800	5.9723	5.8405
	9.4789	9.4785	9.4567

На рис. 4.9 зображені перші три форми неосесиметричних коливань рідини в сферичній оболонках без перегородки та з кільцевою перегородкою

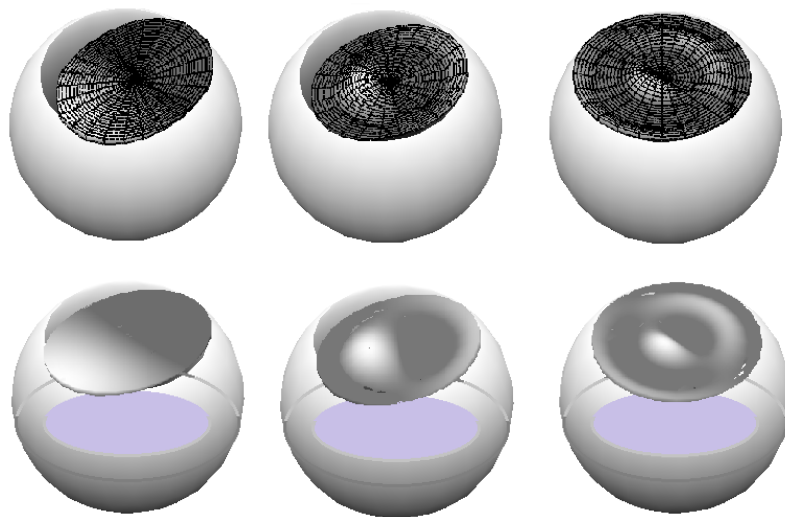


Рисунок 4.9 – Форми коливань вільної поверхні рідини в сферичній оболонці

З результатів видно, що наявність горизонтальної перегородки призводить до зниження частот коливань, а також форма коливань стає більш плоскою. Оцінка частот коливань рідини в сферичних та конічних резервуарах на основі запропонованих методів дозволить проводити відстроювання від діапазону робочих частот регулюючих механізмів.

Далі вивчені вимушені коливання рідини в сферичних резервуарах при дії комбінованого навантаження. При одночасній дії вертикальних і горизонтальних навантажень можуть виникати додаткові суб-резонанси [8]. Ці суб-

резонанси виникають, коли сума або різниця частот вібрації вертикального ω_v і горизонтального ω_h навантажень дорівнює одній з фундаментальних частот (частот, що відповідають першій гармоніці). За результатами розрахунку в координатах (ζ, ζ_t) , будуються фазові портрети за перші 70 секунд, як показано на рис. 4.10. Тут обиралось $h_1=0.2$.

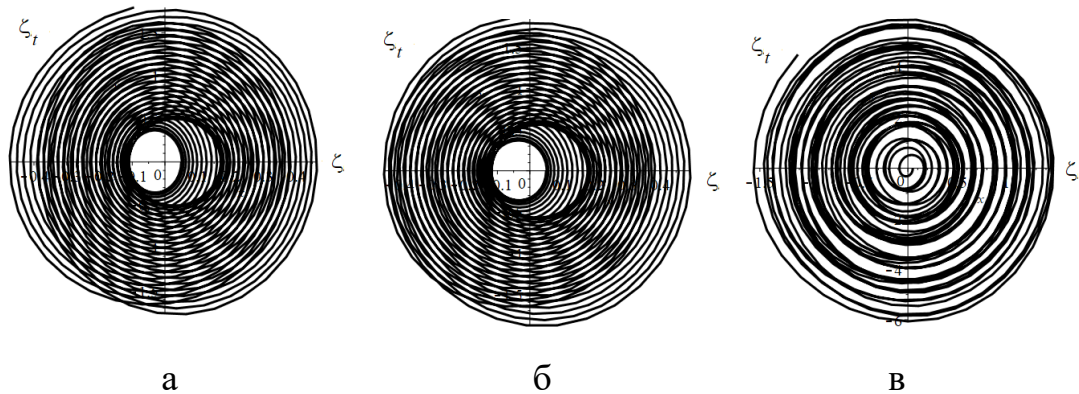


Рисунок 4.10 – Фазові портрети при комбінованому навантаженні

Для 4.10 а) $a_h=0.7$, $a_v=1.0$ $\omega_v=2.82$ Гц $\omega_h=1.0$ Гц, $\omega_v+\omega_h=3.82$ Гц.
 Для 4.10 б) та 4.10 в), параметри навантаження такі: $a_h=0.7$, $a_v=1.0$ $\omega_v=4.82$ Гц
 $\omega_h=1.0$ Гц, $\omega_v-\omega_h=3.82$ Гц та $a_h=0.1$, $a_v=1.0$ $\omega_v=4.82$ Гц $\omega_h=1.0$ Гц,
 $\omega_v=7.5$ Гц, $\omega_v-\omega_h=3.82$ Гц, відповідно. Зауважимо, що $\omega_1=3.82$ Гц є
 нижчою фундаментальною частотою. У всіх розглянутих випадках спостерігається
 необмежене зростання амплітуди коливань вільної поверхні. Параметричний резонанс при
 плесканні виникає, коли вільна поверхня рідини вібрує внаслідок вертикального. Це
 призводить до необмеженого збільшення висоти вільної поверхні. Суб-резонанси
 виникають, коли різниця або сума частот збудження дорівнює фундаментальній частоті.

Висновки за розділом 4

Проведені обчислювальні експерименти з метою знаходження частот та

форм коливань вільної поверхні в конічних та сферичних резервуарах. Резервуари мають внутрішні перегородки, встановлені з метою пом'якшення дії плескань. Отримані частоти та форми коливань далі використані як базисні функції для вивчення вимушених коливань. Побудовані фазові портрети для різних рухів. Проаналізовані явища резонансу, параметричного резонансу та субрезонансів. Виконані обчислення частот і форм коливань вільної поверхні рідини у резервуарах складної форми, таких як конічні та сферичні, із внутрішніми перегородками, демонструють прикладну спрямованість методів. Це особливо важливо для інженерних задач, пов'язаних із проєктуванням конструкцій, здатних протистояти плесканню рідини. Дослідження впливу внутрішніх перегородок підтвердило їхню ефективність у зменшенні амплітуди плескань. Отримані результати можуть бути використані для оптимізації геометрії резервуарів із метою підвищення їхньої стабільності під час руху або вібрацій.

Використання знайдених частот та форм коливань як базисних функцій дозволяє застосовувати отримані результати для моделювання складніших сценаріїв, зокрема динамічної взаємодії рідини з конструкцією. Побудова фазових портретів для різних рухів резервуарів дозволила виявити характерні особливості поведінки системи. Аналіз явищ резонансу та його варіацій (параметричного і субрезонансів) забезпечив виявлення критичних умов, за яких система стає найбільш чутливою до збурень. Це важливий результат для забезпечення безпеки та надійності конструкцій.

Завдяки отриманим результатам відкривається можливість прогнозування поведінки рідини та структури в умовах впливу зовнішніх навантажень, а також розробка заходів для їхнього ефективного контролю.

ВИСНОВКИ

У роботі запропоновано та реалізовано числові методи для обчислення частот і форм коливань рідини у резервуарах складної геометрії, оснащених внутрішніми перегородками. Проведений аналіз показав високу точність отриманих результатів, які узгоджуються з сучасними теоретичними та числовими даними інших дослідників. Використання пакета MAPLE для програмної реалізації забезпечило сучасний рівень обчислювальної ефективності та універсальності, а також якісну візуалізацію результатів. Результати роботи мають практичне значення для інженерних розрахунків з міцності резервуарів у галузях, де важливо зменшити вплив плескань рідини: аерокосмічна техніка, транспорт, нафтогазова промисловість. Передбачається застосування методики в Конструкторському бюро «Південне» імені М.К. Янгеля. Отримані частоти та форми коливань вільної поверхні можуть бути використані як базисні функції для дослідження вимушених коливань у інших складних динамічних системах. Методики також придатні для оптимізації конструкцій шляхом встановлення перегородок із метою забезпечення стійкості та безпечної експлуатації.

Робота важлива для вивчення взаємодії рідини та конструкцій, зокрема вивчення явищ резонансу, параметричного резонансу та суб-резонансів. Її результати можуть сприяти зменшенню втрат і підвищенню надійності об'єктів, що функціонують у складних динамічних умовах, що має значний соціально-економічний ефект, який полягає в тому, що зменшиться кількість небезпечних натурних експериментів, які можуть спровокувати забруднення території, небезпеку для персоналу. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на розширення класів розглянутих геометричних форм, включення анізотропних властивостей матеріалів оболонок та аналіз нелінійної поведінки рідини під дією складних зовнішніх збурень, а також вивчення навантажень з нечіткими параметрами. Окрім того, перспективним є розроблення методів адаптивного керування конструкціями на основі отриманих фазових портретів.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Olsen H. What is sloshing? *Seminar on Liquid Sloshing. Det Norske Veritas.* 1976.
2. Khezzar L., Seibi A. C., Goharzadeh A. Water Sloshing in Rectangular Tanks – An Experimental Investigation & Numerical Simulation. *International Journal of Engineering (IJE).* 2010. №3(2). P. 174–184.
3. Ibrahim R.A., Pilipchuck V.N., and Ikeda T. Recent Advances in Liquid Sloshing Dynamics. *Applied Mechanics Reviews.* 2001.№ 54(2). P. 133–199.
4. Ibrahim R.A. Liquid Sloshing Dynamics. Cambridge University Press, New York, 2005.
5. Abramson H.N., Chu W.-H. and Garza L.R. Liquid sloshing in spherical tanks. *AIAA J.* 1963. №1. P. 384–389.
6. Abramson H.N. Dynamic Behavior of Liquid in Moving Containers; *Applied Mechanics Reviews.* 1963. №16. P. 501 –506;
7. Abramson H.N. The dynamic behavior of liquids in moving containers. NASA SP-106. 1966.
8. Chwang A.T., and Wang K.H. Nonlinear Impulsive Force on an Accelerating Container. *J. of Fluids Eng.* 1984. № 106. P. 233–240.
9. Popov G., Sankar S, Sankar T.S., Vatitas G.H. Liquid Sloshing In Rectangular Road Containers. *Computers Fluids,* 1992. № 21(4). P. 551–569,
10. Popov G., Sankar S., Sankar T.S., Vatitas G. H. Dynamics of liquid sloshing in horizontal cylindrical road containers. *Journal of Mechanical Engineering Science.* 1993. № 207. P. 57-78.
11. Ye Z., and Birk A.M. Fluid Pressures in Partially Liquid-Filled Horizontal Cylindrical Vessels Undergoing Impact Acceleration, *Journal of Pressure Vessel Technology.* 1994, № 116(4). P. 449–459.
12. Faltinsen O., Rognebakke O., Alexander N., and Timokha A. Resonant three dimensional nonlinear sloshing in a square-base basin, part 2. effect of higher modes. *Journal of Fluid Mechanics.* 2005. № 523. P. 199–218.

13. Chen B.F. and Chiang H.W. Complete 2D and Fully Nonlinear Analysis of ideal fluid in tanks. *Journal of Engineering Mechanics*, 1999. №1. P. 70–78.
14. Faltinsen O.M. and. Rognebakke O.F. Sloshing, In NAV2000: International Conference on Ship and Ship Research, Venice, 2000.
15. R.L. Bass, J.E.B. Bowles, R.W. Trundell. Modeling criteria for scaled LNG sloshing experiments, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 1985. № 10. P. 272–280,
16. Godderidge B., Tan M., Turnock S., and Earl C. A Verification and Validation Study of the Application of Computational Fluid Dynamics to the Modelling of lateral Sloshing. Ship Science Report No 140, Fluid Structure Interaction Research Group, University of Southampton, 2006.
17. Celebi M.S., and Akyildiz H. Nonlinear Modeling of Liquid Sloshing in a Moving Rectangular Tank. *Ocean Engineering*. 2001. № 29. P. 1527–1553,
18. El-Sayad M.A., Hanna S.N., Ibrahim R.A. Parametric excitation of nonlinear elastic systems sloshing impact. *Nonlinear Dynamics*. 1999. №18. P. 25–50,
19. Faltinsen, O.M., Rognebakke, O.F., Timokha, A.N. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base basin. *Journal of Fluid Mechanics*, 2003. № 487. P. 1–42.
20. Liquid vibrations in cylindrical tanks with K.flexible membranes / N. Choudhary, N. Kumar, E. Strelnikova, V. Gnitko, D. Kriutchenko, K. Degtyariov *Journal of King Saud University – Science*, 2021. №33(8). 101589. DOI:10.1016/j.jksus.2021.101589.
21. Faltinsen, O.M., Rognebakke, O.F., Timokha, A.N. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base basin. Part 3: base aspect ratio perturbations. *Journal of Fluid Mechanics*, 2006. № 551. P. 93–116.
22. Faltinsen, O.M., Timokha, A.N. Sloshing. *Cambridge University Press, Cambridge*. 2009.
23. Wu G.X., Ma Q.W., Eatock-Taylor, R. Numerical simulation of sloshing waves in a 3-D tank based on finite element methods. *Applied Ocean Research*. 1998. № 20. P. 337–355.

24. Wu C.H., Chen B.F. Sloshing waves and resonance modes of fluid in a 3-D tank by a time-independent finite difference method. *Ocean Engineering*, 2009. № 36, P. 500–510,
25. Resonant frequencies in an elevated spherical container partially filled with water: FEM and measurement. / Curadelli O., Ambrosini D., Mirasso A., Amani M. *Journal of Fluids and Structures*. 2010. № 26. P. 148–159.
26. Choudhary N., Bora, S.N., Strelnikova E. Study on liquid sloshing in an annular rigid circular cylindrical tank with damping device placed in liquid domain, *J. Vib. Eng. Tech.*, 2021. №9. P.1–18. DOI:10.1007/s42417-021-00314-w.
27. Weiß J.; Smallslosh Eigenvalues and mechanical models (pendulum or springmass) for tanks with NEWTANK geometry; software manual and documentation. Springer Science & Business Media. 2009. 124 p.
28. Dodge F. T. The new dynamic behaviour of liquids in moving containers, Southwest Research Institute, San Antonio, Texas, 2000.
29. Celebi, M.S., Kim, M.H., Beck, R.F. Fully Non-linear 3-D Numerical Wave Tank Simulation. *J. of Ship Research*, 1998. №42(1). P. 33–45.
30. BEM and FEM analysis of the fluid-structure interaction in tanks with baffles. / Gnitko V., Degtyariov K., Naumenko V., Strelnikova E. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2017. №5(3), P. 317–328.
31. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles/ Gnitko V., Naumenko V., Rozova L., Strelnikova E. *Journal of Basic and Applied Research International*. 2016. № 17(1). P.75–87.
32. Numerical Simulation of Free Liquid-Induced Vibrations in Elastic Shells / Degtyarev K., Glushich P., Gnitko V., Strelnikova E. *Int. Journal of Modern Physics and Applications*. 2015. № 1(4). P.159–168.
33. Levitin M., Vassiliev D. Vibrations of Shells Contacting Fluid: Asymptotic Analysis. *Acoustic Interactions with Submerged Elastic Structures*. 1996. № 5. P. 310–332.
34. Brebbia C.A. Telles J.C.F, Wrobel L.C. Boundary Element Techniques. Springer Science & Business Media, 2012, 464 p.

35. Karaiev A., Strelnikova E. Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2021. e201800339.
36. Karaiev, A., Strelnikova, E. Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics. *International Journal of Modeling. Simulation, and Scientific Computing*. 2020. № 11(1). 2050003DOI:10.1142/S1793962320500038.
37. Gavriilyuk I., Lukovsky I., Timokha A. Sloshing in a vertical circular cylindrical tank with an annular baffle. Part 1. Linear fundamental solutions. *Journal of Engineering Mathematics*. 2006. № 54. P. 71–88.
38. Kulczycki T., Kwaśnicki M., Siudeja, B. The shape of the fundamental sloshing mode in axisymmetric containers. *Journal of Engineering Mathematics*. 2016. №99(1). P. 157–193.