

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

(повна назва)

Кафедра прикладної математики

(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Математичне моделювання методом R -функцій

стаціонарного обтікання циліндричного тіла

потокком в'язкої рідини

(тема)

Виконав:

здобувач 2 року навчання, групи ПМм-24-1

Микита ДУДАР

(Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

Спеціальність

113 Прикладна математика

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма

Прикладна математика

(повна назва освітньої програми)

Керівник доц. Світлана ЛАМТЮГОВА

(посада, Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

Допускається до захисту

Завідувач кафедри ПМ

(підпис)

Максим СИДОРОВ

(Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Завідувач кафедри _____

(підпис)

“ 10 ” листопада 2025 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Дударю Микиті Артемовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Математичне моделювання методом R -функцій станціонерного обтікання циліндричного тіла потоком в'язкої рідини

затверджена наказом по університету від 10 листопада 2025 р. № 1028 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 18 грудня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель стаціонарного обтікання циліндричного тіла потоком в'язкої рідини

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	10 – 16 листопада 2025 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	17 – 23 листопада 2025 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	24 – 30 листопада 2025 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	01 – 07 грудня 2025 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	08 – 17 грудня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	18 грудня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 10 листопада 2025 р.

Здобувач _____
(підпис)

Керівник роботи _____ доц. Світлана ЛАМТЮГОВА
(підпис) (посада, Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 59 с., 1 табл., 4 рис., 1 дод., 36 джерел.

В'ЯЗКА НЕСТИСЛИВА РІДИНА, ЕЛІПТИЧНИЙ ЦИЛІНДР, МЕТОД ГАЛЬОРКІНА, МЕТОД R -ФУНКЦІЙ, РОЗДІЛЬНА ПЛАСТИНА, СТАЦІОНАРНЕ ОБТІКАННЯ, ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА.

Об'єкт дослідження – стаціонарні гідродинамічні процеси в'язкої рідини.

Мета роботи – застосування методу R -функцій до розв'язання задачі обтікання циліндричного тіла стаціонарним потоком в'язкої рідини.

Методи дослідження – конструктивні методи теорії R -функцій та чисельні методи розв'язування задач математичної фізики.

У кваліфікаційній роботі розглянуто задачу математичного моделювання стаціонарного обтікання циліндричного тіла потоком в'язкої рідини. Проведено огляд математичних моделей стаціонарних в'язких течій та методів їх чисельної реалізації, що дозволило обґрунтувати вибір структурного методу R -функцій у поєднанні з методом Гальоркіна. Розроблено алгоритм і програмну реалізацію зазначеного підходу для задачі стаціонарного обтікання циліндричного тіла при числах Рейнольдса 5, 10, 15. Проведено чисельні експерименти для еліптичного циліндра без та з трикутною роздільною пластиною, вибір якої зумовлений її типовим застосуванням для керування слідом та пригнічення вихрових структур, а також необхідністю перевірки працездатності підходу на складніших областях з додатковими межами й кутовими ділянками. Одержано порівняльні оцінки обчислювальної ефективності паралельної та послідовної реалізацій при однакових параметрах апроксимації. Практична значимість роботи полягає в можливості виконувати параметричні дослідження стаціонарних течій навколо тіл складнішої геометрії без трудомісткої побудови сіток і з коректним врахуванням граничних умов; наукова – у демонстрації працездатності та ефективності поєднання методу R -

функцій і методу Гальоркіна для задач такого класу. Результати можуть бути використані в інженерних розрахунках течій для елементів трубних і кабельних систем, теплообмінників, опорів конструкцій та мікроканалів, а також у задачах керування слідом за тілом. Подальший розвиток роботи доцільно пов'язати з систематичним аналізом впливу параметрів роздільної пластини на структуру ближнього сліду та інтегральні характеристики течії, а також із розширенням підходу на випадки більших чисел Рейнольдса та інші типи приєднаних елементів керування потоком.

ABSTRACT

Introductory note: 59 pages, 1 table, 4 figures, 1 appendix, 36 sources.

ELLIPTIC CYLINDER, GALERKIN METHOD, *R*-FUNCTIONS METHOD, REYNOLDS NUMBER, SPLITTER PLATE, STEADY FLOW PAST A BODY, VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID.

Object of research is steady hydrodynamic processes of viscous fluid.

Purpose of work is to apply the *R*-functions method for solving the problem of steady viscous flow past a cylindrical body.

Methods of research are constructive methods of the *R*-functions theory and numerical methods for solving mathematical physics problems.

The qualification work considers the problem of mathematical modeling of steady viscous flow past a cylindrical body. Mathematical models of steady viscous flows and methods for their numerical implementation were analyzed, which made it possible to substantiate the choice of the structural *R*-functions method in combination with the Galerkin method. An algorithm and a software implementation of the proposed approach are developed for the problem of steady flow past a cylindrical body at Reynolds numbers 5, 10, and 15. Numerical experiments are performed for an elliptical cylinder both without and with a triangular splitter plate, whose selection is motivated by its typical use for wake control and suppression of vortex structures, as well as by the need to verify the applicability of the approach to more complex domains with additional boundaries and corner regions. Comparative estimates of the computational efficiency of parallel and sequential implementations are obtained under identical approximation parameters. The practical significance of the work lies in the possibility of performing parametric studies of steady flows around bodies with more complex geometries without labor-intensive mesh generation and with accurate enforcement of boundary conditions; the scientific significance consists in demonstrating the applicability and efficiency of combining

the R -functions method with the Galerkin method for problems of this class. The results can be applied in engineering flow calculations for elements of pipe and cable systems, heat exchangers, structural supports, and microchannels, as well as in problems of wake control behind bodies. Further development of the work is advisable to associate with a systematic analysis of the influence of splitter-plate parameters on the near-wake structure and integral flow characteristics, as well as with extending the approach to higher Reynolds numbers and other types of attached flow-control elements.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	9
1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження	11
1.1 Математичні моделі стаціонарних в'язких течій	11
1.2 Методи чисельного аналізу течій в'язкої рідини	17
1.3 Формальна та змістовна постановка задачі	21
1.4 Постановка задач дослідження	22
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	24
2.1 Структурний метод (метод R -функцій) в обчислювальній гідродинаміці	24
2.2 Застосування структурного методу (метода R -функцій) до моделювання процесів обтікання циліндричного тіла потоком в'язкої рідини	28
Висновки за розділом 2	31
3 Програмна реалізація	32
3.1 Mathematica 13 як система символної математики	32
3.2 Алгоритм розв'язання задачі стаціонарного обтікання в'язкою рідиною циліндричного тіла еліптичного перерізу	33
3.3 Опис програми.....	34
Висновки за розділом 3	35
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	36
4.1 Візуалізація та аналіз результатів обчислювального експерименту	36
4.2 Аналіз точності отриманих результатів	43
Висновки за розділом 4	44
Висновки	46
Перелік джерел посилання	48
Додаток А Лістинг програми	53

ВСТУП

Актуальність теми роботи. Актуальність роботи зумовлена потребою дослідження обтікання тіл нескладної, але неколової форми (зокрема еліптичного циліндра) у стаціонарному в'язкому потоці при малих і помірних числах Рейнольдса. Класичні чисельні методи потребують чутливої до похибок побудови сіток і складного узгодження геометрії з граничними умовами. Метод R -функцій дозволяє аналітично кодувати геометрію та точно задовольняти граничні умови, що робить його зручним для параметричних досліджень і оптимізації. Для еліптичних перерізів це має практичне значення – у розрахунках кабельних та трубних систем, тепло-обмінників, опорів конструкцій, мікроканалів. Поєднання R -функцій із варіаційними або гальоркінівськими схемами забезпечує точну апроксимацію в'язкої течії та надійний контроль похибки без трудомісткої теселяції, що заповнює методичний розрив між геометричним моделюванням і розв'язуванням рівнянь руху, надаючи роботі як наукову, так і прикладну значущість.

Мета і завдання роботи. Метою роботи є застосування методу R -функцій до розв'язання задачі обтікання циліндричного тіла стаціонарним потоком в'язкої рідини. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «обтікання циліндричного тіла стаціонарним потоком в'язкої рідини»;
- провести огляд і аналіз математичних моделей стаціонарних течій в'язкої рідини;
- дослідити чисельні методи побудови наближених розв'язків задач моделювання стаціонарних течій в'язкої рідини, зокрема метод R -функцій;
- розробити алгоритм, що поєднує метод R -функцій із методом Гальоркіна для розв'язання задачі обтікання циліндричного тіла потоком в'язкої рідини;
- реалізувати чисельну схему розв'язання задачі із застосуванням методу

R-функцій та Гальоркіна, провести обчислювальні експерименти;

– проаналізувати отримані результати, оцінити ефективність та доцільність використання методу *R*-функцій для задач такого класу.

Об'єктом дослідження є стаціонарні гідродинамічні процеси в'язкої рідини.

Предметом дослідження є задача обтікання циліндричного тіла стаціонарним потоком в'язкої нестисливої рідини з використанням методу *R*-функцій для побудови чисельного розв'язку.

Методи дослідження. У роботі використовуються конструктивні методи теорії *R*-функцій та чисельні методи розв'язування математичної фізики.

Публікації. Результати, отримані у роботі, було представлено на IV Міжнародній науково-практичній конференції англійською мовою «European studies. Learning and teaching in the world of technologies» (м. Клуж-Напока, університет Бабеш-Бойяї, Румунія, 12 листопада 2025 р.) [1].

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Математичні моделі стаціонарних в'язких течій

У декартовій системі координат стаціонарний рух в'язкої рідини в області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ з межею $\partial\Omega$ описується за допомогою системи рівнянь Нав'є-Стокса, доповненою рівнянням нерозривності [2 – 4]:

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta V_x, \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta V_y, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta V_z, \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

де x, y, z – відповідні координати точки фізичного простору, що розглядається;

F_x, F_y, F_z – компоненти вектора густини масових сил;

ρ – щільність рідини;

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ – кінематична в'язкість рідини;

μ – динамічний коефіцієнт в'язкості;

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Шуканими величинами є V_x, V_y, V_z – компоненти вектору швидкості рідини, та P – тиск.

Систему рівнянь (1.1), (1.2) можна записати у векторній формі

$$(\mathbf{V} \cdot \Delta) \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{V},$$

$$\Delta \cdot \mathbf{V} = 0,$$

де $\mathbf{V} = \vec{i}_x V_x + \vec{i}_y V_y + \vec{i}_z V_z$ – вектор швидкості рідини;

$$\nabla = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Для отримання розв'язку систему (1.1) необхідно доповнити крайовими умовами. Для нерухомого тіла задається умова прилипання вигляду:

$$\mathbf{V}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.3)$$

Окрім умови (1.3) ще необхідно задати умову на нескінченності. Якщо потік рідини рухається в напрямку осі Ox , то ця умова набуває вигляду [2 – 4]:

$$\mathbf{V} \rightarrow U_\infty \vec{i} \text{ при } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow +\infty.$$

Зв'язок між координатами точки в декартових та циліндричних системах встановлюється формулами:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi; \\ y = r \cdot \sin \varphi; \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \\ z = z, \end{cases}$$

В циліндричній системі координат r , φ , z система рівнянь для в'язкої нестисливої рідини записується наступним чином [2 – 4]:

$$\mathbf{V} \cdot \nabla V_r - \frac{V_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\Delta V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right),$$

$$\mathbf{V} \cdot \nabla V_\varphi + \frac{V_r V_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta V_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{r^2} \right), \quad (1.4)$$

$$\mathbf{V} \cdot \nabla V_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta V_z,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (V_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (V_z) = 0. \quad (1.5)$$

Зв'язок між координатами точки в прямокутній та сферичній системах встановлюється формулами:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi; \\ y = r \sin \theta \sin \varphi; \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Рівняння стаціонарного руху в'язкої нестисливої рідини в сферичній системі координат r, θ, φ набувають наступного вигляду [2 – 4]:

$$\begin{aligned} & \mathbf{V} \cdot \nabla V_r - \frac{1}{r} (V_\theta^2 + V_\varphi^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \\ & + \nu \left(\Delta V_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (V_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} V_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ & \mathbf{V} \cdot \nabla V_\theta + \frac{1}{r} (V_r V_\theta - \operatorname{ctg} \theta V_\varphi^2) = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \\ & + \nu \left(\Delta V_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ & \mathbf{V} \cdot \nabla V_\varphi + \frac{1}{r} (V_r V_\varphi + \operatorname{ctg} \theta V_\theta V_\varphi) = -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \\ & + \nu \left(\Delta V_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right), \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (V_\varphi) = 0. \quad (1.7)$$

Стаціонарні плоскопаралельні векторні поля описують, використовуючи функції комплексної змінної, зокрема комплексний потенціал. Комплексний потенціал векторного поля – це функція вигляду $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, де $\psi(x, y)$ – функція течії, а $\varphi(x, y)$ – потенціал швидкості.

В плоскопаралельних течіях в прямокутній системі координат змінною z нехтують, тоді рівняння нерозривності (1.2) набуває вигляду $\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$ і функція течії $\psi(x, y)$ вводиться за допомогою співвідношень:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

З тих рівнянь, що лишились в системі (1.1) позбавляємось тиску за допомогою перехресного диференціювання і отримуємо нелінійне рівняння четвертого порядку [5]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = v \Delta^2 \psi,$$

$$\text{де } \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2};$$

$$\Delta^2 \psi = \Delta(\Delta \psi).$$

В плоских задачах в циліндричній системі координат змінною z нехтуємо, тоді рівняння нерозривності (1.5) набуває вигляду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{і функція течії } \psi(r, \varphi) \text{ вводиться за допомогою}$$

співвідношень:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad V_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

З тих рівнянь, що лишилися в системі (1.4) позбавляємось тиску за допомогою перехресного диференціювання і отримуємо нелінійне рівняння четвертого порядку [5, 6]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \Delta \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \varphi} = \nu \Delta^2 \psi,$$

$$\text{де } \Delta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2};$$

$$\Delta^2 \psi = \Delta(\Delta \psi).$$

У вісесиметричних задачах в циліндричній системі координат змінною φ нехтують, тоді рівняння нерозривності (1.5) набуває вигляду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{\partial}{\partial z} (V_z) = 0 \text{ і функція течії } \psi(r, z) \text{ вводиться наступним чином:}$$

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad V_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

З тих рівнянь, що лишилися в системі (1.4) позбавляємось тиску за допомогою перехресного диференціювання і отримуємо нелінійне рівняння четвертого порядку [5]:

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial E \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial E \psi}{\partial z} \right) - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} E \psi = \nu E^2 \psi,$$

$$\text{де } E\psi = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2};$$

$$E^2 \psi = E(E\psi).$$

У вісесиметричних задачах в сферичній системі координат змінною φ нехтують, тоді рівняння нерозривності (1.7) набуває вигляду $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) = 0$ і функція течії $\psi(r, \theta)$ вводиться наступним чином:

$$V_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

З тих рівнянь, що лишилися в системі (1.6) позбавляємось тиску за допомогою перехресного диференціювання і отримуємо нелінійне рівняння четвертого порядку [5 – 7]:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial E\psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial E\psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) E\psi = \nu E^2 \psi,$$

$$\text{де } E\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right);$$

$$E^2 \psi = E(E\psi).$$

Якщо межа тіла непроникна і нерухома, то для функції течії можна поставити такі крайові умови [6, 7]:

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

де \mathbf{n} – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль.

Для розв'язання зовнішньої гідродинамічної задачі необхідно задати ще умову на нескінченності. Наприклад, при обтіканні сфери рівномірним на нескінченності потоком рідини використовується наступна умова [7]:

$$\psi(r, \theta) \sim \frac{1}{2} U_{\infty} r^2 \sin^2 \theta, \quad r \rightarrow +\infty,$$

а для плоскої задачі обтікання циліндра умова на нескінченності набуває наступного вигляду [6, 7]:

$$\psi(r, \varphi) \sim U_{\infty} r \sin \theta, \quad r \rightarrow +\infty,$$

де U_{∞} – незбурена швидкість рідини на нескінченності.

1.2 Методи чисельного аналізу течій в'язкої рідини

Математичне моделювання та чисельний аналіз відіграють значну роль у дослідженні та вирішенні прикладних задач шляхом моделювання поведінки складних систем у різних галузях. Вони використовуються в гідродинаміці, теплоенергетиці, хімічній кінетиці, біомедицині, матеріалознавстві, інженерії та навіть медичній діагностиці [8 – 10].

У обчислювальній гідродинаміці застосовують різноманітні методи, такі як метод сіток [11, 12], методи зважених нев'язок [13 – 15], скінченно-різницеві методи [16, 17], методи скінченних елементів [18, 19] та інші проєкційно-варіаційні методи, а також застосовують метод R -функцій [6, 7, 20 – 35].

Суть методів сіток полягає в тому, що область, у якій розв'язується задача, дискретизується за допомогою скінченної множини точок – вузлів сітки. Похідні m -го порядку апроксимують, використовуючи розклади за формулою Тейлора, у вигляді [12]:

$$\frac{d^m f(\mathbf{x}_i)}{dx^m} \approx \sum_{j=-J_1}^{j=J_2} a_j f_{i+j},$$

де J_1, J_2 – деякі цілі числа, що залежать від порядку точності.

Завдяки апроксимації похідних розв’язання диференціального рівняння зводиться до розв’язання системи алгебраїчних рівнянь.

Наведені принципи знаходять своє конкретне застосування, наприклад, у статті [12], де розглядаються різницеві схеми для апроксимації параболічних рівнянь. Теоретичне дослідження цих схем базується на побудові їх перших диференціальних наближень. Априорні висновки про точність досліджуваних схем підтвержені чисельними розрахунками на модельному одновимірному параболічному рівнянні. Проведено порівняльний аналіз різницевих схем, а результати розрахунків представлені у вигляді зручних для аналізу графіків і таблиць.

У методах зважених нев’язок шуканий розв’язок знаходиться за допомогою його апроксимації за допомогою відомих лінійно незалежних базисних функцій $\varphi_i(\mathbf{x})$ у вигляді [13]:

$$y_n(\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(\mathbf{x}),$$

причому $\varphi_0(\mathbf{x})$ обирається, виходячи з неоднорідних крайових умов, а $\varphi_i(\mathbf{x})$ – з однорідних умов задачі.

Оскільки коефіцієнти c_i нам невідомі, їх треба визначити, виходячи з умов, що впливають з початкової задачі.

Так, якщо розглядати задачу як операторне рівняння

$$Ay^* = f$$

в області $D(\mathbf{x})$, де y^* – точний розв’язок, то нев’язкою рівняння буде називатись величина

$$R = Ay - f .$$

Коефіцієнти c_i знаходять з умови, що інтеграл зваженої нев’язки дорівнює нулю [13]:

$$\int_D W_i(\mathbf{x}) R d\mathbf{x} = 0 .$$

Обираючи різними способами вагову функцію $W_i(\mathbf{x})$, отримують різні методи. Так, наприклад, методу Гальоркіна відповідає $W_i(\mathbf{x}) = \varphi_i(\mathbf{x})$.

Існують і альтернативні підходи, що базуються на фундаментальних фізичних принципах.

Іншим ефективним методом, який використовується для розв’язання задач математичного моделювання фізико-механічних полів різної природи, зокрема гідродинамічних, є метод R -функцій, розроблений академіком НАН України В. Л. Рвачовим [20, 21].

Основна концепція методу R -функцій полягає в побудові множини функцій, що називаються жмутками, які точно задовольняють крайові умови задачі і залежать від геометрії області. Для побудови жмутків використовується апарат функцій неперервних аргументів з властивостями булевих функцій. Переваги цього методу полягають у можливості точного врахування крайових умов різних типів для задач у областях складної геометрії.

Метод R -функцій у задачах гідродинаміки ідеальної рідини застосовувався Колосовою С.В. (стаціонарні задачі обтікання тіл та вісесиметричні течії у трубах з перешкодами), а у задачах гідродинаміки в’язкої рідини застосовувався Сидоровим М.В. (стаціонарні плоскопаралельні течії),

Артюхом А.В. (нестационарні плоскопаралельні течії), Ламтюговою С.М. (задачі обтікання тіл в'язкою рідиною) та іншими [6, 7, 22 – 35]. У сукупності ці роботи свідчать про універсальність методу R -функцій і можливість його застосування до широкого кола гідродинамічних задач, що відрізняються як фізичною природою процесів, так і математичною постановкою.

Окремі дослідження з наведеного кола присвячені стаціонарним задачам із нетривіальною структурою області та складними граничними умовами. Зокрема, у роботі [26] розглядається стаціонарний потік рідини через кусково-однорідне пористе середовище за умови дотримання закону Дарсі. Математична модель цієї задачі визначається як еліптичне рівняння для функції потоку, доповнене граничними умовами другого типу на водних межах і граничними умовами першого типу на непроникних для рідини межах. У постановці задачі також враховуються умови сполучення на лінії розділу між двома ґрунтами та невідома величина витрати рідини, яку можна встановити за додатковим інтегральним співвідношенням. Для чисельного аналізу та розв'язання даної задачі пропонується використовувати структурно-варіаційний метод R -функцій.

Поряд із задачами стаціонарного характеру, метод R -функцій ефективно застосовується і для складніших моделей, що враховують додаткові фізичні фактори. У роботі [31] розглянуто задачу комп'ютерного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини. Було проведено системний аналіз проблеми комп'ютерного моделювання таких течій та можливих підходів до їх розв'язання, зроблено висновок про доцільність використання структурного методу (методу R -функцій) у поєднанні з методом Рітца. На основі методики побудови структур розв'язку побудовано жмуток функцій, що точно задовольняє всі крайові умови задачі.

Подальший розвиток ідей структурного підходу простежується у роботах, присвячених нестационарним процесам у багатозв'язних областях. В роботі [35] розглядається нестационарна задача перемішування в'язкої нестисливої рідини у двозв'язній області. Проведено аналіз стану проблеми та огляд методів

математичного моделювання процесів перемішування. За допомогою методу R -функцій отримано структуру розв'язку задачі, а також побудовано рівняння області в аналітичному вигляді, для апроксимації невизначеної компоненти застосовано метод Гальоркіна.

Таким чином, метод R -функцій є ефективним інструментом для розв'язування широкого класу задач гідродинаміки в'язкої та ідеальної рідини, зокрема у складних геометричних областях і за наявності різноманітних граничних умов. Разом із тим, питання застосування цього підходу до задач стаціонарного обтікання тіл із приєднаними елементами керування потоком, зокрема роздільними пластинами, залишаються недостатньо дослідженими, що й зумовлює актуальність даної роботи.

1.3 Формальна та змістовна постановка задачі

Розглянемо стаціонарний, рівномірний потік в'язкої нестисливої рідини з кінематичною в'язкістю ν повз циліндричне тіло, поперечний переріз якого є скінченною областю Ω з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$. Зручно розглядати такі потоки в циліндричній системі координат.

Припустимо, що всі величини, що описують потік, не залежать від координати z і що третя компонента швидкості рідини дорівнює нулю, тобто $V_z = 0$. Стаціонарні рівняння Нав'є-Стокса тоді набувають такого вигляду [5, 6]:

$$\mathbf{V} \cdot \nabla V_r - \frac{V_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\Delta V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right),$$

$$\mathbf{V} \cdot \nabla V_\varphi + \frac{V_r V_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta V_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{r^2} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (V_\varphi) = 0.$$

Третє рівняння системи, а саме рівняння нерозривності, інтегрується шляхом введення функції течії за формулами:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad V_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Позбавляємось тиску за допомогою перехресного диференціювання і отримуємо нелінійне рівняння четвертого порядку [5, 6]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial(\Delta \psi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial(\Delta \psi)}{\partial \varphi} = \nu \Delta^2 \psi \text{ зовні } \Omega, \quad (1.8)$$

$$\text{де } \Delta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2};$$

$$\Delta^2 \psi = \Delta(\Delta \psi).$$

Рівняння (1.8) доповнюємо початковими умовами та умовою на нескінченності [6, 7]:

$$\psi|_{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial \Omega} = 0, \quad (1.9)$$

$$\psi \rightarrow U_\infty \vec{j}, \text{ при } r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty. \quad (1.10)$$

1.4 Постановка задач дослідження

Аналіз предметної області показує перспективність застосування чисельних методів до задачі стаціонарного обтікання циліндричного тіла, зокрема методу R -функцій.

Отже, метою кваліфікаційної роботи є застосування методу R -функцій до

розв'язання задачі обтікання циліндричного тіла стаціонарним потоком в'язкої рідини. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «обтікання циліндричного тіла стаціонарним потоком в'язкої рідини»;

– провести огляд і аналіз математичних моделей стаціонарних течій в'язкої рідини;

– дослідити чисельні методи побудови наближених розв'язків задач моделювання стаціонарних течій в'язкої рідини, зокрема метод R -функцій;

– розробити алгоритм, що поєднує метод R -функцій із методом Гальоркіна для розв'язання задачі обтікання циліндричного тіла потоком в'язкої рідини;

– реалізувати чисельну схему розв'язання задачі із застосуванням методу R -функцій та Гальоркіна, провести обчислювальні експерименти;

– проаналізувати отримані результати, оцінити ефективність та доцільність використання методу R -функцій для задач такого класу.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Структурний метод (метод R -функцій) в обчислювальній гідродинаміці

Означення 2.1. Функція $y = f(x_1, \dots, x_n)$, визначена всюди в просторі змінних $\{x_1, \dots, x_n\}$, називається R -функцією, якщо знайдеться така булева функція $Y = F(X_1, \dots, X_n)$ (величини Y, X_1, \dots, X_n – нулі та одиниці), що виконується рівність [20, 21]

$$S[f(x_1, \dots, x_n)] = F[S(x_1), \dots, S(x_n)], \quad (2.1)$$

де

$$S(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

Означення 2.2. Супровідною для R -функції f називається булева функція F , що задовольняє (2.1).

Введемо повну систему таких супровідних функцій [20, 21]:

$$H_2 = \{0, \bar{X}, X_1 \wedge X_2, X_1 \vee X_2, X_1 \sim X_2, X_1 \Rightarrow X_2, X_1 | X_2\}. \quad (2.2)$$

Система \mathfrak{R}_0 є однією з найбільш уживаних на практиці достатньо повних систем R -функцій, для яких система (2.2) є супровідною [20, 21]:

$$\begin{aligned} y_1 &\equiv -1; \quad y_2 \equiv \bar{x} \equiv -x; \\ y_3 &\equiv x_1 \wedge_0 x_2 \equiv \left(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_4 &\equiv x_1 \vee_0 x_2 \equiv \left(x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right); \\
y_5 &\equiv x_1 \sim_0 x_2 \equiv 2x_1x_2 \left[\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2} + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right]^{-1}; \\
y_6 &\equiv x_1 \rightarrow_0 x_2 \equiv x_2 - x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \\
y_7 &\equiv x_1 |_0 x_2 \equiv \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1 - x_2.
\end{aligned}$$

Нехай задана характеристична функція $\chi(\omega(x, y)) = \begin{cases} 0, & \omega(x, y) < 0, \\ 1, & \omega(x, y) \geq 0 \end{cases}$

області Ω . Побудуємо предикат:

$$\chi = F(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m) = F((\omega_1 \geq 0), (\omega_2 \geq 0), \dots, (\omega_m \geq 0)), \quad (2.3)$$

де $\chi_i = (\omega_i(x, y) \geq 0)$, $i = \overline{1, m}$, – система характеристичних функцій;

$Y = F(X_1, X_2, \dots, X_m)$ – булева функція.

Предикат (2.3) за допомогою логічних операцій над множинами, а саме перетину, доповнення і об'єднання, визначає область Ω , яка складається з підобластей Ω_i , $i = \overline{1, m}$. Також це можна записати у вигляді:

$$\Omega = F(\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m\}, \{\cap, \cup, \neg\}). \quad (2.4)$$

Нехай для кожної допоміжної підобласті Ω_i , $i = \overline{1, m}$, що має простіший вигляд, порівняно з Ω , задане рівняння межі $\omega_i(x, y) = 0$, $i = \overline{1, m}$, області Ω_i . Застосовуючи метод R -функцій, отримаємо рівняння межі $\omega(x, y) = 0$ області Ω у аналітичному вигляді [20, 21].

Замінюючи Ω , $\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m\}$, та $\{\cap, \cup, \neg\}$ відповідно на їх супровідні аналоги, можна перейти від предикатної форми запису області (2.4) до тієї, що зазвичай використовується у аналітичній геометрії. Так отримано

аналітичний вираз, що повністю визначає межу $\omega(x, y) = 0$ області Ω за допомогою аналітично заданих функцій [20, 21].

Часто у застосуваннях від функції $\omega(x, y)$ можуть вимагати виконання деяких диференціальних властивостей на межі $\partial\Omega$.

Означення 2.3. Якщо виконано умови

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &> 0 \text{ для всіх } (x, y) \in \Omega, \\ \omega(x, y) &< 0 \text{ для всіх } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Omega \cup \partial\Omega), \\ \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} &= 1, \end{aligned} \quad (2.5)$$

де \mathbf{n} – внутрішня нормаль до $\partial\Omega$, то рівняння $\omega(x, y) = 0$ називається нормалізованим рівнянням $\partial\Omega$ (вважається, що рівність (2.5) виконується у всіх регулярних точках $\partial\Omega$) [20, 21].

За рівнянням межі $\partial\Omega$ можна побудувати її нормалізоване рівняння, використовуючи наступну теорему.

Теорема 2.1. Якщо $\omega_1(x, y) \in C^m(\mathbb{R}^n)$ задовольняє умови $\omega_1(x, y)|_{\partial\Omega} = 0$ та $\frac{\partial\omega_1}{\partial\mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} > 0$, то функція $\omega \equiv \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + |\text{grad } \omega_1|^2}} \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ задовольняє умови $\omega|_{\partial\Omega} = 0$, $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 1$ для всіх регулярних точок $\partial\Omega$ [20, 21].

Розглянемо тепер поняття структури розв'язку крайової задачі. Нехай в області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ поставлено крайову задачу:

$$Au = f, \quad (2.6)$$

$$L_i u = \varphi_i, \quad (2.7)$$

де $A: X(\Omega) \rightarrow Y(\Omega)$;

$\partial\Omega_i$, $i = \overline{1, m}$, – покриття межі $\partial\Omega$;

L_i – оператор крайових умов на $\partial\Omega_i$, $i = \overline{1, m}$.

Нехай D_A – область визначення оператора A , що входить в (2.6), а

$$L'_k u = \varphi'_k, \quad k = \overline{1, q}, \quad (2.8)$$

– деякі із рівностей (2.7).

Означення 2.4. Структурою розв'язку називається вираз $u = B(\Phi)$, де Φ – елемент деякої множини \mathfrak{M} , $B: \mathfrak{M} \rightarrow X(\Omega)$ – враховує умови (2.8), якщо для будь-якої $\Phi \in \mathfrak{M}$

$$L'_k B(\Phi) = \varphi'_k, \quad k = \overline{1, q}.$$

Структура, яка враховує усі крайові умови (2.7) називається загальною. Якщо задовольняється лише рівняння (2.6), то $u = B(\Phi)$ називається загальним розв'язком (2.6). Якщо задовольняється лише частина умов (2.7), то структура називається частковою. Точний розв'язок u^* задачі задовольняє усі умови (2.6), (2.7).

Якщо $u^* \in D_B$, де $D_B = \{u: u = B(\Phi), \Phi \in \mathfrak{M}\} \subset X(\Omega)$, тобто існує така $\Phi^* \in \mathfrak{M}$, що $u^* = B(\Phi^*)$, то структура $B(\Phi)$ називається повною (в класичному сенсі). Якщо $u^* \notin D_B$, то структура $B(\Phi)$ називається неповною.

Нехай $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$. Для апроксимації невідомого розв'язку задачі (2.6), (2.7) у структурі $u = B(\Phi)$ покладемо $\Phi_s = \sum_{i=1}^{m_s} c_{is} \psi_i^{(s)}$, $s = \overline{1, k}$, де $\{\psi_i^{(s)}\}$ –

обрана послідовність поліномів. Нехай $N = \sum_{i=1}^k m_i$. Якщо підставити вирази для

Φ_s , $s = \overline{1, k}$, в $u = B(\Phi)$, то отримаємо N -параметричну сім'ю функцій, які

задовольняють задані крайові умови незалежно від вибору сталих c_{is} [20, 21]. Такі функції називатимемо координатними. Далі для знаходження невідомих сталих c_{is} можна скористатися будь-яким варіаційним чи проєкційним методом (Рітца, найменших квадратів, Гальоркіна, тощо).

2.2 Застосування структурного метода (метода R -функцій) до моделювання процесів обтікання циліндричного тіла потоком в'язкої рідини

Розв'яжемо методом R -функцій задачу (1.8) – (1.10) для випадку обтікання циліндра з поперечним перерізом у вигляді еліпсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ стаціонарним потоком в'язкої рідини зі швидкістю U_∞ на нескінченності.

Нехай в області Ω відома функція $\omega(r, \varphi)$ з необхідною гладкістю, що має властивості:

$$\omega(r, \varphi) > 0 \text{ в області } \Omega, \quad (2.9)$$

$$\omega(r, \varphi)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = -1, \quad (2.11)$$

де \mathbf{n} – вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$.

Структурою розв'язку крайової задачі з граничними умовами (1.9) назвемо функцію

$$\psi = F(\omega(r, \varphi), \Phi),$$

достатньо гладку всередині Ω і лінійну відносно Φ , якщо така ψ задовольняє

граничні умови (1.9) за будь-якої функції Φ .

Введемо до розгляду достатньо гладку функцію $y = f_M(x)$, що задовольняє умови:

$$\begin{aligned} f_M(0) &= 0, \quad f'_M(0) = 1, \\ f'_M(x) &\geq 0 \quad \text{для всіх } x \geq 0, \\ f_M(x) &\equiv 1 \quad \text{для всіх } x \geq M \quad (M = \text{const} > 0). \end{aligned}$$

Такою функцією є, наприклад, функція вигляду [6, 7, 22]:

$$f_M(x) = \begin{cases} 1 - \exp \frac{Mx}{x-M}, & 0 \leq x < M, \\ 1, & x \geq M. \end{cases}$$

Покладемо $\omega_M(r, \varphi) = f_M(\omega(r, \varphi))$. Як можна побачити, умови (2.9) – (2.11) виконуються, крім того, також виконується

$$\omega_M(r, \varphi) \equiv 1, \quad \text{якщо } \omega(r, \varphi) \geq M.$$

Це означає, що при монотонному зростанні $\omega(r, \varphi)$ за умови віддалення від контуру $\partial\Omega$, $\omega_M(r, \varphi)$ відрізняється від одиниці лише в деякій скінченній області $\{0 \leq \omega(r, \varphi) < M\} = \Omega_1 \subset \Omega$.

Розглянемо вираз [6, 7]:

$$\psi = \omega_M^2 (\psi_0 + \Phi_1) + \omega_M^2 (1 - \omega_M) \Phi_2, \quad (2.12)$$

де ψ_0 – точний розв'язок задачі про обтікання кругового циліндра $x^2 + y^2 = R^2$ ідеальною рідиною (циліндр радіуса R повністю міститься всередині тіла, що

обтікається), а саме функція вигляду:

$$\psi_0 = U_\infty \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \varphi.$$

Функція ψ з (2.12) задовольняє крайові умови (1.9), (1.10), якщо $\Phi_1 \cdot r^{-1} \rightarrow 0$, коли $r \rightarrow \infty$. Отже, ψ дійсно є структурою розв'язку крайової задачі з граничними умовами (1.9), (1.10).

Функції Φ_1 та Φ_2 представимо у вигляді:

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^{m_1} a_k \varphi_k^{(1)}, \quad \Phi_2 = \sum_{j=1}^{m_2} b_j \varphi_j^{(2)},$$

де $\{\varphi_k^{(1)}(r, \varphi)\} = \left\{ r^{-k} \frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi}, k=1, 2, \dots; r^{2-k} \frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi}, k=3, 4, \dots \right\}$ – повна система частинних розв'язків рівняння Лапласа відносно зовнішності циліндра кінцевого радіуса;

$\{\varphi_j^{(2)}(r, \varphi)\} = \left\{ \cos 2\varphi, \sin 2\varphi, r^j \frac{\cos j\varphi}{\sin j\varphi}, r^{j+2} \frac{\cos j\varphi}{\sin j\varphi}, j=1, 2, \dots \right\}$ – повна система частинних розв'язків рівняння Лапласа відносно області $\{\omega(r, \varphi) < M\}$ [6, 7].

Отже, розв'язок задачі будемо шукати у вигляді:

$$\psi_N = \omega_M^2 \left(U_\infty \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \varphi + \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \cdot \varphi_k^{(1)} \right) + \omega_M^2 (1 - \omega_M) \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \cdot \varphi_j^{(2)}.$$

Повна послідовність функцій для всієї площини виражається як:

$$\{\varphi_i(r, \varphi)\} = \left\{ \omega_M^2(r, \varphi) \varphi_k^{(1)}(r, \varphi), \omega_M^2(r, \varphi) (1 - \omega_M(r, \varphi)) \varphi_j^{(2)}(r, \varphi) \right\}. \quad (2.13)$$

Для пошуку невідомих коефіцієнтів α_k ($k = 1, 2, \dots, m_1$) та β_j ($j = 1, 2, \dots, m_2$) застосовується нелінійний метод Гальоркіна [29] шляхом забезпечення ортогональності нев'язки першим $N = m_1 + m_2$ елементам послідовності (2.13):

$$\left(v\Delta^2\psi_N - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_N}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial\Delta\psi_N}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_N}{\partial r} \cdot \frac{\partial\Delta\psi_N}{\partial\varphi}, \varphi_i \right) = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Отримана система є системою нелінійних рівнянь, у яких кожне рівняння має вигляд квадратичної функції відносно невідомих коефіцієнтів α_k та β_j . Для її чисельного розв'язання може бути застосований метод Ньютона. При цьому як початкове наближення доцільно обирати значення коефіцієнтів α_k та β_j , що відповідають розв'язку задачі Озеєна, або, для великих чисел Рейнольдса, – розв'язку, отриманому при менших значеннях чисел Рейнольдса.

Висновки за розділом 2

Здійснено аналіз підходів до математичного моделювання стаціонарного обтікання циліндричного тіла потоком в'язкої рідини та обґрунтовано вибір ефективного методу розв'язання поставленої задачі.

Розглянуто основні положення методу R -функцій та встановлена доцільність його застосування для розв'язування задач стаціонарного обтікання тіл у складних областях.

Описано використання структурного методу R -функцій разом з методом Гальоркіна до розв'язання задачі обтікання циліндричного тіла стаціонарним потоком в'язкої рідини.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Mathematica 13 як система символної математики

Mathematica 13 – це одна з найвідоміших систем комп'ютерної алгебри (СКА), яку активно застосовують у математиці, інженерії та інформатиці. Уже понад 30 років подібні системи залишаються основним інструментом математичного моделювання та чисельних розрахунків для великої кількості науковців, інженерів, викладачів, студентів та інших користувачів у всьому світі.

На сьогодні пакети СКА є невід'ємною складовою середовища Computer-Aided Engineering (CAE), оскільки без комп'ютерної підтримки розв'язати низку задач практично неможливо. Сучасні математичні пакети можуть слугувати і «розумним калькулятором» для перевірки наукових гіпотез, і засобом спрощення виразів під час розв'язування задач, і інструментом для побудови графіки чи генерування звуку тощо.

Використання СКА дає змогу істотно зекономити час і зменшити кількість помилок у розрахунках. Діапазон задач, які можна реалізувати в Mathematica 13.3, є дуже широким, зокрема:

- виконання математичних досліджень, що потребують як аналітичних, так і чисельних методів;
- розроблення та аналіз алгоритмів;
- математичне моделювання та проведення комп'ютерних експериментів;
- аналіз та обробка експериментальних або статистичних даних;
- створення наукової, технічної та художньої графіки;
- розробка графічних і обчислювальних застосунків.

Mathematica містить майже 5000 вбудованих функцій, що охоплюють практично всі напрями технічних обчислень. Усі ці можливості тісно пов'язані між собою та працюють у межах єдиної інтегрованої системи.

Система дає можливість автоматично генерувати програмний код мовою

C та його подання, причому створені програми можуть використовуватися як окремі застосунки. Пакет SymbolicC забезпечує підтримку створення, обробки та оптимізації C-коду.

Варто зауважити, що Mathematica, Mathcad, Maple та інші подібні системи є комерційними, запатентованими та закритими проектами, які потребують значних ліцензійних витрат, а тому не є вільно доступними для всіх охочих. Водночас існують альтернативні безкоштовні проекти з відкритим кодом, які за своїми можливостями дещо поступаються згаданим комерційним продуктам, але можуть слугувати прийнятною заміною в багатьох випадках [36].

3.2 Алгоритм розв'язання задачі стаціонарного обтікання в'язкою рідиною циліндричного тіла еліптичного перерізу

З урахуванням описаного в пункті 2.2, алгоритм розв'язку задачі стаціонарного обтікання циліндричного тіла в'язкою рідиною має наступний вигляд:

- а) задати фізичні параметри стаціонарного обтікання та геометрію тіла Ω ;
- б) методом R -функцій побудувати нормалізоване рівняння $\omega(x, y) = 0$ межі $\partial\Omega$ області Ω ;
- в) в залежності від вигляду крайових умов задачі обрати структуру розв'язку;
- г) задати послідовність координатних функцій;
- д) обрати номер наближення n ;
- е) за методом Гальоркіна сформулювати систему рівнянь для визначення невідомих a_k , b_j , $k = \overline{1, m_1}$, $j = \overline{1, m_2}$, використавши умову ортогональності нев'язки до координатних функцій;
- є) знайти невідомі коефіцієнти a_k , b_j , розв'язавши отриману систему

рівнянь;

- ж) записати наближений розв'язок задачі;
- з) провести аналіз та візуалізацію побудованого наближеного розв'язку.

3.3 Опис програми

Алгоритм розв'язання задачі стаціонарного обтікання циліндричного тіла потоком в'язкої рідини, описаний в пункті 3.2, було реалізовано в пакеті Mathematica 13.3. Програма містить наступні блоки.

Блок 1. Задання і аналітичний опис геометрії обчислюваної області. У цьому блоці задаємо R -операції системи \mathfrak{R}_0 , геометричні параметри області, параметри крайових умов, порядок апроксимації $N = m_1 + m_2$, кількість вузлів для чисельного інтегрування; будуємо досліджувану область.

Блок 2. Задаємо координатні послідовності. У цьому блоці виводяться $N = m_1 + m_2$ координатних функцій, будується наближений розв'язок з невідомими коефіцієнтами.

Блок 3. Формування та розв'язання системи рівнянь. У цьому блоці будується система рівнянь за допомогою нелінійного методу Гальоркіна, розв'язується отримана система відносно невідомих коефіцієнтів a_k , b_j , будується наближений розв'язок.

Блок 4. Виведення результатів та їх аналіз. У цьому блоці будуються графіки ліній рівня, вектори швидкості, проводиться аналіз збіжності наближень.

Програма реалізує паралельні обчислення шляхом запуску кількох обчислювальних ядер, передачі їм необхідних визначень і даних та обчислення компонент вектора нев'язки за допомогою `ParallelTable`, що прискорює формування функції нев'язки, яку багаторазово викликає алгоритм `FindRoot`.

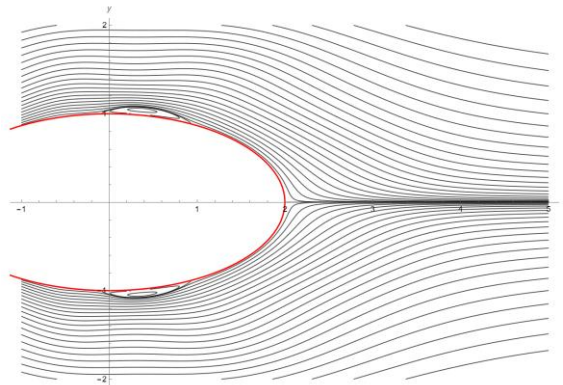
Висновки за розділом 3

Для чисельного розв'язання задачі математичного моделювання стаціонарного обтікання циліндричного тіла потоком в'язкої нестисливої рідини було обрано систему комп'ютерної алгебри Mathematica 13.3. Дана система володіє широкими обчислювальними та графічними можливостями, що дозволяють реалізовувати складні алгоритми чисельного аналізу, виконувати обчислення та здійснювати всебічну обробку отриманих результатів. Програмна реалізація в середовищі Mathematica 13.3 здійснювалася з урахуванням специфіки поставленої гідродинамічної задачі. Для реалізації основних етапів чисельного моделювання використовувалися вбудовані засоби системи, зокрема для формування структур розв'язку методом R -функцій, побудови гальоркінівської апроксимації, розв'язання систем алгебраїчних рівнянь та візуалізації результатів у вигляді ліній течії та полів швидкостей.

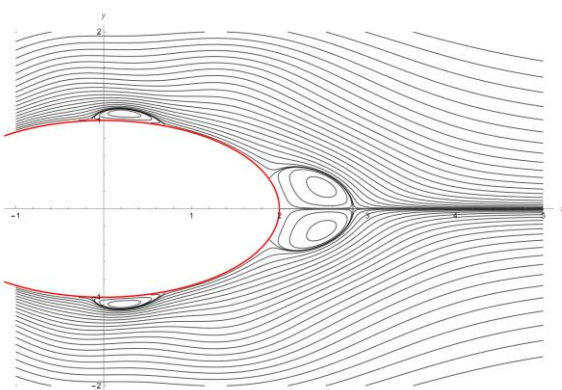
1. Розглянуто функціональні можливості системи Mathematica 13.3.
2. Розроблено алгоритм чисельного розв'язування задачі стаціонарного обтікання циліндричного тіла потоком в'язкої рідини на основі поєднання методу R -функцій та методу Гальоркіна.
3. Описано програму, розроблену у системі Mathematica 13.3, за побудованим алгоритмом.

Якісний аналіз картин течії свідчить про їх узгодженість із відповідними результатами, наведеними в роботі [7]. Спостерігається послідовна зміна топології поля ліній течії зі зростанням числа Рейнольдса від $Re = 5$ до $Re = 15$, що відображає перехід від в'язкодомінованого до інерційно-помірного режиму.

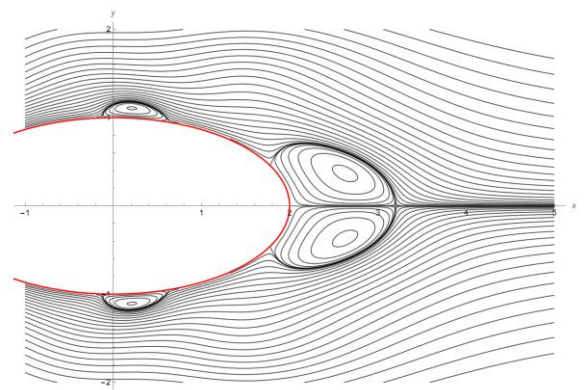
При $Re = 5$ лінії течії плавно огинають контур тіла без утворення замкнених ізоліній у задній зоні. Картина течії є симетричною та відповідає режиму приклеєної течії: в'язке перенесення імпульсу в граничному шарі є достатнім для компенсації несприятливого поздовжнього градієнта тиску під час відновлення тиску позаду тіла, тому відрив не реалізується, а слід є слабо вираженим.



(a)



(б)



(в)

Рисунок 4.2 – Контури функції течії для задачі обтікання циліндричного тіла для (а) $Re = 5$, (б) $Re = 10$, (в) $Re = 15$

(ближній план)

При $Re = 10$ відносна роль інерційних сил зростає, граничний шар стає тоншим і менш стійким до дії несприятливого градієнта тиску, внаслідок чого в кормовій частині виникає відрив і формується стаціонарна зона зворотної течії, що проявляється появою замкненої системи ліній течії, обмеженої розділяючою лінією. При цьому загальна симетрія поля течії зберігається.

При $Re = 15$ рециркуляційна область розвивається та ускладнюється: відривні зсувні шари, що сходять із верхньої та нижньої частин поверхні тіла, інтенсивніше взаємодіють у кормовій зоні. Це призводить до збільшення розмірів сліду й формування двох симетричних вихрових комірок (пари контр-обертових вихорів). При цьому збереження дзеркальної симетрії свідчить про реалізацію стаціонарного режиму без переходу до нестаціонарного періодичного зриву вихорів у розглянутому діапазоні чисел Рейнольдса.

У ході чисельного експерименту, окрім базової конфігурації «еліптичний циліндр», було також обчислено профілі течії для модифікованого тіла – еліптичного циліндра з трикутною роздільною пластиною, розміщеною позаду в напрямку набігаючого потоку. Вибір такої геометрії є обґрунтованим з прикладної точки зору: роздільні пластини та хвостові насадки використовують як простий засіб керування слідом за обтічним тілом, оскільки вони «впорядковують» зону за тілом, зменшуючи поперечний перетік і тим самим послаблюючи інтенсивність рециркуляції та вихрових структур у сліді.

Нормалізоване рівняння межі побудуємо за системою R -функцій \mathfrak{R}_0 :

$$\begin{aligned}\bar{x} &\equiv -x; \\ x_1 \wedge_0 x_2 &\equiv \left(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right), \\ x_1 \vee_0 x_2 &\equiv \left(x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right).\end{aligned}$$

Як примітивні нормалізовані локуси приймемо:

– внутрішність еліпса з півосями $A = 2$, $B = 1$:

$$\Sigma_1(x, y) = \frac{1 - \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{1^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{1^2}\right)^2 + \frac{4x^2}{2^4} + \frac{4y^2}{1^4}}} \geq 0;$$

– півплощину над прямою $-x + 12y + 4 = 0$:

$$\Sigma_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{145}}(4 - x + 12y) \geq 0;$$

– півплощину під прямою $-x - 12y + 4 = 0$

$$\Sigma_3(x, y) = \frac{1}{\sqrt{145}}(4 - x - 12y) \geq 0;$$

– півплощину праворуч від прямої $x = 1.95$

$$\Sigma_4(x, y) = x - 1.95 \geq 0.$$

Тоді трикутна пластина задається як перетин трьох півплощин

$$\Sigma_T = \Sigma_2 \wedge_0 \Sigma_3 \wedge_0 \Sigma_4,$$

а переріз загалом – як об'єднання еліпса і трикутника:

$$\Omega = \Sigma_1 \vee_0 \Sigma_T.$$

Рівняння межі області Ω визначається рівнянням $\omega(x, y) = 0$, де

$$\omega(x, y) = \left[\frac{1 - \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{1^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{1^2}\right) + \frac{4x^2}{2^4} + \frac{4y^2}{1^4}}} \right] \vee_0 \left(\left[\frac{1}{\sqrt{145}} (4 - x + 12y) \right] \wedge_0 \right. \\ \left. \wedge_0 \left[\frac{1}{\sqrt{145}} (4 - x - 12y) \right] \wedge_0 [x - 1.95] \right). \quad (4.1)$$

Функція (4.1) є додатною всередині області Ω і від'ємною за її межами. Для області течії поза тілом використовують $-\omega(x, y)$.

Для малих чисел Рейнольдса $Re = 5, 10, 15$ течія за тілом має переважно стаціонарний характер, і тому очікуваний ефект пластини проявляється насамперед у скороченні/звуженні стаціонарної вихрової області позаду тіла та у більш симетричному, стабілізованому розподілі швидкостей і тиску в ближньому сліді (а на більших Re подібні елементи додатково здатні пригнічувати нестаціонарні коливання сліду).

Додатковою причиною вибору саме трикутної пластини є її конструктивна простота та «плавність» впливу на потік: клиноподібна форма забезпечує поступову зміну ефективного поперечного розміру в зоні сліду, що, порівняно з прямокутною насадкою, потенційно менше провокує додаткові відриви на гострих переходах і дозволяє якісніше оцінити саме ефект стабілізації сліду. Крім того, ця конфігурація є показовою для перевірки можливостей методу R -функцій на складніших багатокомпонентних областях (поєднання гладкої межі еліпса та кутових ділянок пластини) і дає змогу порівняти зміну структури течії та інтегральних характеристик (наприклад, опору) відносно базового випадку.

На рис. 4.3 та 4.4 показано контури ліній течії наближеного розв'язку для стаціонарного обтікання еліптичного циліндра з трикутною роздільною пластинною за ним за різних чисел Рейнольдса. Трикутна роздільна пластинна

змінює структуру ближнього сліду: потік зберігає симетрію, а відокремлена зона за циліндром звужується, що вказує на стабілізуючий ефект і пригнічення вихроутворення.

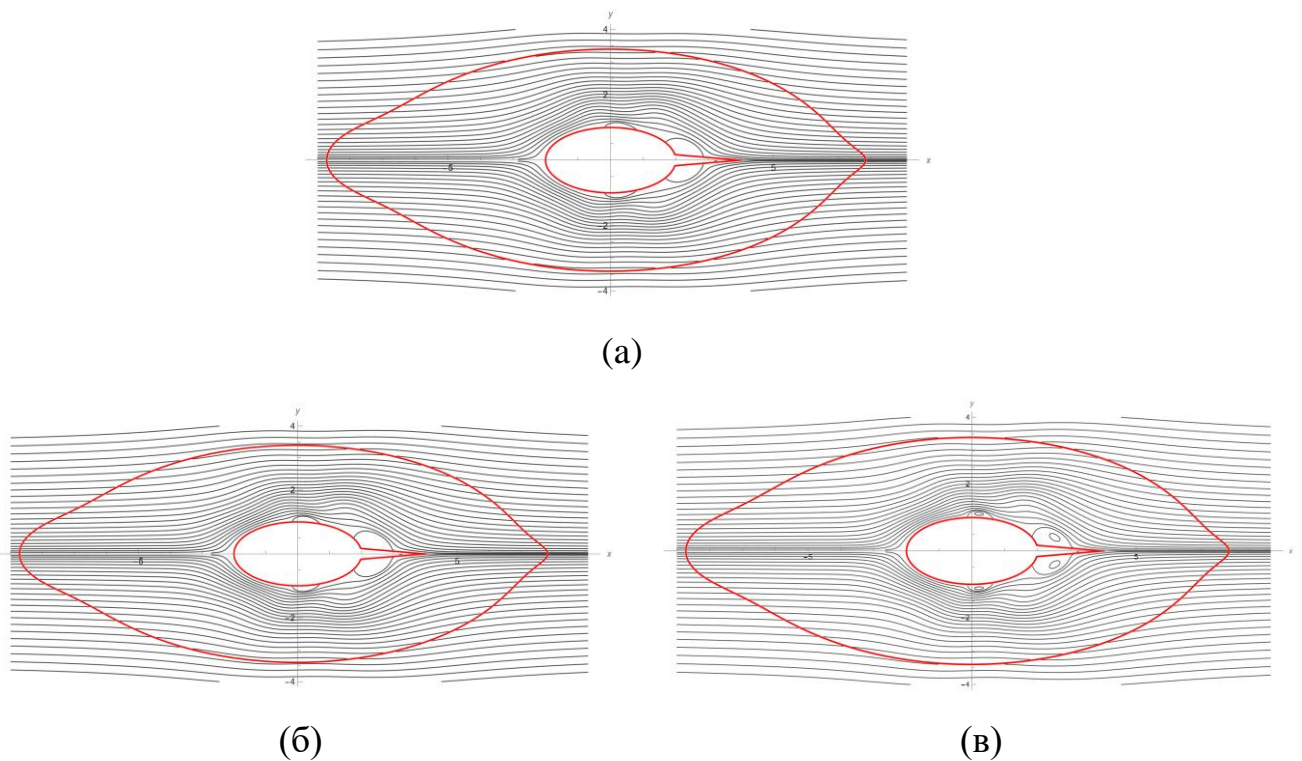


Рисунок 4.3 – Контури функції течії для задачі обтікання циліндричного тіла з трикутною роздільною пластиною для (а) $Re = 5$, (б) $Re = 10$, (в) $Re = 15$ (загальний план)

Обчислювальні експерименти виконувались на ноутбучі з процесором Intel Core i5 (8 ядер) та 16 GB оперативної пам'яті. Порівняння часу розрахунку з паралельними обчисленнями та без них показало істотний вигреш у продуктивності. Для задачі побудови ліній рівня (профілів течії) у випадку еліптичного циліндра з трикутною роздільною пластиною при використанні 30 координатних функцій і квадратур Гауса з 50 вузлами час обчислень із паралелізацією становив близько 6 год, тоді як у послідовному режимі – близько 36 год (прискорення приблизно у 6 разів). Для конфігурації зі звичайним еліптичним циліндром (ті самі 30 координатних функцій та 50 вузлів Гауса) отримання чисельного наближення з паралельними обчисленнями

займало порядку 15 хв, тоді як без паралелізації – близько 110 хв (прискорення приблизно у 7 разів).

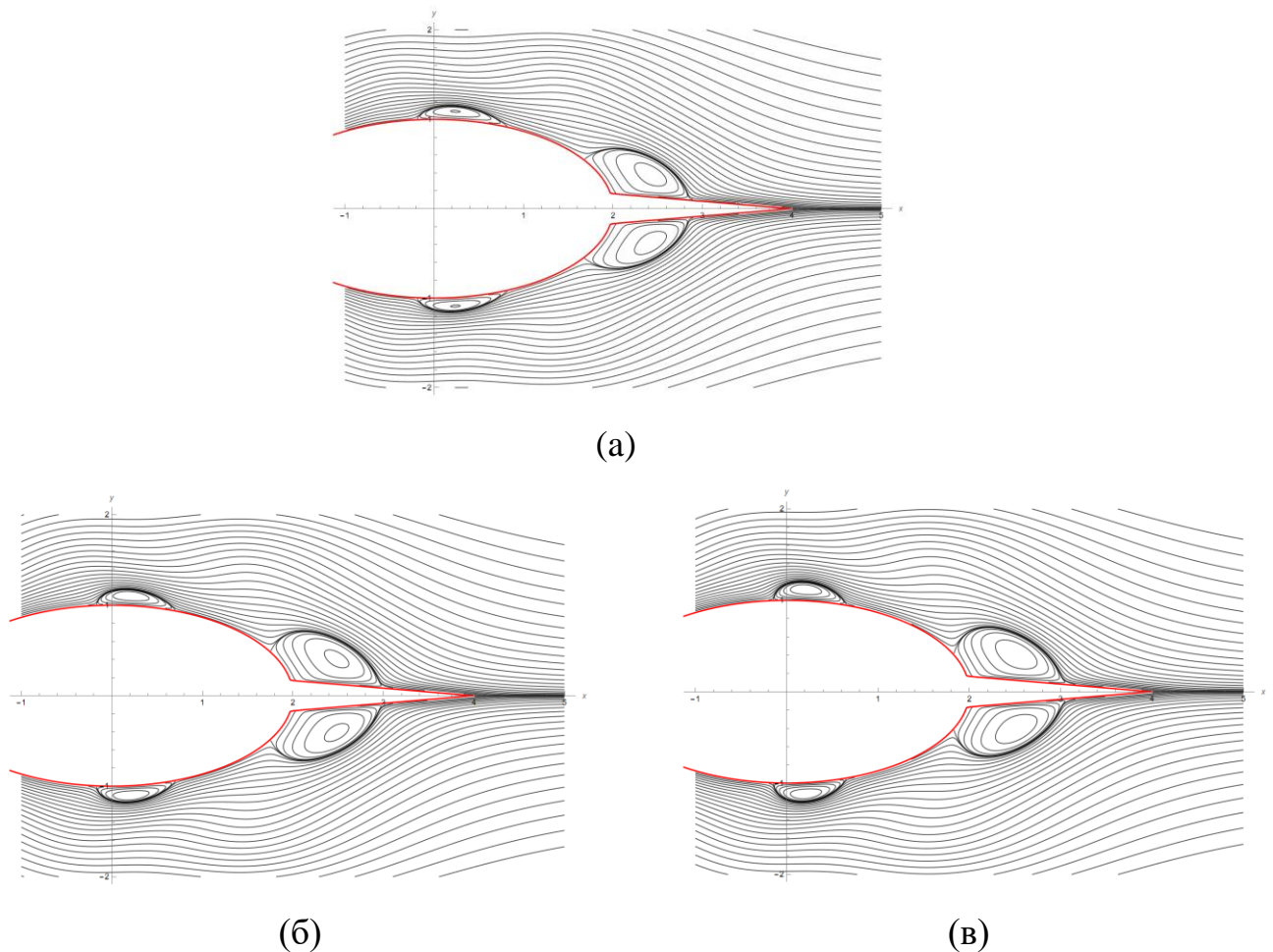


Рисунок 4.4 – Контури функції течії для задачі обтікання
циліндричного тіла з трикутною роздільною пластиною за ним
для (а) $Re = 5$, (б) $Re = 10$, (в) $Re = 15$ (ближній план)

Отримані результати підтверджують ефективність використання паралельних обчислень для розв'язання складних крайових задач гідродинаміки. Паралелізація дозволяє суттєво зменшити час чисельних розрахунків, роблячи можливим практичне використання моделей з великою кількістю координатних функцій та високоточних квадратур. При цьому вигрaш у продуктивності істотно залежить від геометрії області.

4.2 Аналіз точності отриманих результатів

Для трьох послідовних наближених розв'язків, побудованих методом Гальоркіна з $N_k = m_1 + m_2$ базисними функціями, оцінювалися такі похибки обчислень:

– абсолютне відхилення:

$$\Delta_k = \max |\psi_{N_{k+1}}(r, \theta) - \psi_{N_k}(r, \theta)|;$$

– L_2 -норма:

$$\Delta = \|\psi_{N_{k+1}}(r, \theta) - \psi_{N_k}(r, \theta)\|_{L_2(\Omega)};$$

– відносна похибка:

$$\delta = \frac{\|\psi_{N_{k+1}}(r, \theta) - \psi_{N_k}(r, \theta)\|_{L_2(\Omega)}}{\|\psi_{N_k}(r, \theta)\|_{L_2(\Omega)}}.$$

Таблиця 4.1 подає обчислювальні похибки при $M = 10$ для пар наближених розв'язків, отриманих за різних значень N_k . Числові результати демонструють властивості збіжності методу Гальоркіна, застосованого до задачі в'язкого обтікання еліптичного циліндра. Аналіз обчислювальних похибок підтверджує, що збільшення кількості базисних функцій $N_k = m_1 + m_2$ підвищує точність наближених розв'язків.

При цьому слід відмітити, що зі зростанням числа Рейнольдса збіжність стає повільнішою: для $Re = 15$ різниця між розв'язками при N_2 та N_3

залишається помітною, що є природним наслідком ускладнення структури течії (посилення градієнтів швидкості поблизу поверхні тіла та в зоні сліду). Отже, для більших Re досягнення заданого рівня точності потребує або подальшого збільшення N_k , або використання більш «гнучкого» базису, здатного точніше відтворювати локальні особливості розв'язку. На практиці критерієм достатності апроксимації може слугувати умова $\delta \leq \delta_{\text{дон}}$ (наприклад, 5%), що дозволяє обґрунтовано обирати параметри m_1 , m_2 залежно від режиму течії та необхідної точності.

Таблиця 4.1 – Обчислювальні похибки експерименту

N_k, N_{k+1}	Тип похибки	$Re = 5$	$Re = 10$	$Re = 15$
$N_1 = 8 + 10 = 18$ $N_2 = 12 + 18 = 30$	Δ_k	$0,17 \times 10^0$	$0,31 \times 10^0$	$0,45 \times 10^0$
	Δ	$0,37 \times 10^0$	$0,67 \times 10^0$	$0,92 \times 10^0$
	δ	6,62%	11,83%	16,27%
$N_2 = 12 + 18 = 30$ $N_3 = 16 + 26 = 42$	Δ_k	$0,90 \times 10^{-1}$	$0,23 \times 10^0$	$0,36 \times 10^0$
	Δ	$0,16 \times 10^0$	$0,40 \times 10^0$	$0,65 \times 10^0$
	δ	2,91%	6,91%	10,67%

Ці результати підтверджують, що метод Гальоркіна є збіжним і обчислювально здійсненним підходом для розв'язування цього класу задач гідродинаміки, причому точність можна керовано забезпечувати за допомогою помірної кількості базисних функцій.

Висновки за розділом 4

Виконано обчислювальний експеримент для задачі стаціонарного обтікання еліптичного циліндричного тіла потоком в'язкої нестисливої рідини без та з трикутною роздільною пластиною за тілом за різних значень числа Рейнольдса (5, 10, 15). Отримані результати проілюстровано графічними

матеріалами, що відображають структуру течії та характеристики слідової області.

Аналіз результатів чисельного моделювання свідчить про ефективність застосування структурного методу R -функцій у поєднанні з методом Гальоркіна до розв'язання задач стаціонарного обтікання тіл потоком в'язкої рідини. Отримані розв'язки є узгодженими з математичною постановкою задачі та відображають основні фізичні особливості процесу течії в'язкої рідини, що підтверджує коректність і працездатність запропонованого підходу.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі розв'язана актуальна наукова задача чисельного дослідження стаціонарного обтікання циліндричного тіла в'язкою нестисливою рідиною при малих числах Рейнольдса ($Re = 5, 10, 15$) на основі методу R -функцій для коректного аналітико-алгебраїчного задання геометрії області та побудови наближеного розв'язку рівнянь руху з урахуванням граничних умов.

1. Було проведено огляд і аналіз математичних моделей стаціонарних течій в'язкої рідини та методів їх чисельного аналізу. Зроблено висновок про доцільність і перспективність використання структурного методу R -функцій для математичного моделювання широкого класу задач гідродинаміки в'язкої та ідеальної рідини, зокрема у складних геометричних областях і за наявності різноманітних граничних умов.

2. На основі методу R -функцій у поєднанні з гальоркінівською схемою розроблено чисельний алгоритм для дослідження стаціонарного обтікання циліндричного тіла в'язкою нестисливою рідиною при малих числах Рейнольдса.

3. Запропонований алгоритм реалізовано програмними засобами системи Mathematica 13.3 та використано для проведення чисельних експериментів у задачі обтікання еліптичного циліндра без та з трикутною роздільною пластиною, що підтвердило ефективність застосованого підходу. Одержано порівняльні оцінки обчислювальної ефективності паралельної та послідовної реалізацій при однакових параметрах апроксимації.

4. Дослідження стаціонарного обтікання циліндричного тіла в'язкою нестисливою рідиною може бути застосовано, зокрема, в інженерних розрахунках течій для елементів трубних і кабельних систем, теплообмінників, опорів конструкцій та мікроканалів, у задачах керування слідом за тілом, а також як база для моделювання задач мікрофлюїдики та низькорейнольдсових течій навколо тіл різної форми.

5. Перспективами подальших досліджень є аналіз впливу параметрів

роздільної пластини на структуру ближнього сліду та інтегральні характеристики течії, розширення підходу на випадки більших чисел Рейнольдса та інші типи приєднаних елементів керування потоком, обчислення інтегральних аерогідродинамічних характеристик (сили опору/підйомної сили, момент), а також удосконалення обчислювальної ефективності (адаптивне інтегрування, підбір базису, оптимізація реалізації) і застосування методу до тіл зі складними елементами (пластини, екрани, комбіновані профілі) та задач спряженого переносу (тепломасообмін).

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Dudar M., Lamtiuhova S. *R*-functions method for mathematical modeling of steady viscous flow around an elliptical cylinder. *European studies. Learning and teaching in the world of technologies* [Electronic Edition] : Conference Proceedings of IV International Scientific & Practical Conference, Cluj-Napoca, Romania, 12 November 2025. Cluj-Napoca : Babeş-Bolyai University, 2025.
2. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge : Cambridge University Press, 2000. 615 p.
3. Panton R. L. *Incompressible Flow*. 5th ed. Hoboken, NJ : Wiley, 2024. 880 p.
4. Kundu P. K., Cohen I. M., Dowling D. R., Capecelatro J. *Fluid Mechanics*. 7th ed. Elsevier, 2024. 768 p.
5. Polyanin A., Zaitsev V. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*. 2nd Edition. New York : Chapman and Hall/CRC Press, 2012. 1912 p. <https://doi.org/10.1201/b11412>.
6. Lamtiuhova S. Mathematical modeling of steady flow past circular cylinder with splitter plates by *R*-functions method. *Int. J. Math. Phys.* 2025. № 16. <https://doi.org/10.26577/ijmph.202516110>.
7. Ламтюгова С. М. Математичне моделювання та чисельний аналіз методом *R*-функцій задач обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : [спец.] 01.05.02 "Математичне моделювання та обчислювальні методи" / Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2016. 22 с.
8. Boundary element method for hypersingular integral equations: Implementation and applications in potential theory / E. Strelnikova [et al.]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2024. V. 169, Part B. 105999. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2024.105999>.
9. Numerical study on sloshing in coaxial shells / N. Choudhary [et al.]. *Vibroengineering Procedia*. 2024. V. 55. P. 86–90. <https://doi.org/10.21595/vp>.

2024.24091.

10. Mathematical modeling to predict the migration of foreign bodies of gunshot origin / E. M. Khoroshun [et al.]. *Emergency Medicine*. 2024. V. 20, No. 5. P. 363–375. <https://doi.org/10.22141/2224-0586.20.5.2024.1736>.

11. Wang S., Kim Y. Adaptive grid deformation method for CFD application to hull optimization. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2023. V. 1288, No. 1. 012043. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/1288/1/012043>.

12. Тригуб О. С. Аналіз застосування методу сіток до чисельного розв'язання параболічних рівнянь. *Наукові записки НаУКМА*. 2003. Т. 21. С. 22–31.

13. Fletcher C. A. J. *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1. Fundamental and General Techniques*. 2nd ed. Springer-Verlag, 1991. 484 p.

14. Legrand M., Junca S. Weighted residual solution methods. 2025. URL: <https://hal.science/hal-05155148v1> (дата звернення: 22.12.2025).

15. Galerkin weighted residual approach to the stability analysis of hydromagnetic hybrid nanofluid flow past a convective heating stretching/shrinking surface / A. T. Adeosun [et al.]. *Journal of Taibah University for Science*. 2025. V. 19, No. 1. <https://doi.org/10.1080/16583655.2025.2489809>.

16. Applications of Finite Difference Methods in Fluid Mechanics / G. Hou [et al.]. *Computational Fluid Dynamics*. Singapore, 2024. P. 123–137. https://doi.org/10.1007/978-981-97-0349-4_8.

17. A finite difference lattice Boltzmann method for Richards equation in vertical unsaturated soil water infiltration / Z. Zhang [et al.]. *Journal of Hydrodynamics*. 2025. <https://doi.org/10.1007/s42241-025-0061-y>.

18. Huang Y., Li J., Liu X. Developing and analyzing some new finite element methods for a non-local hydrodynamic Drude model. *Advances in Computational Mathematics*. 2025. V. 51, No. 6. <https://doi.org/10.1007/s10444-025-10272-6>.

19. Cotter C. J. Compatible finite element methods for geophysical fluid dynamics. *Acta Numerica*. 2023. V. 32. P. 291–393. <https://doi.org/10.1017/s0962492923000028>.

20. Rvachev V. L., Sheiko T. I. *R-Functions in Boundary Value Problems in Mechanics. Applied Mechanics Reviews*. 1995. Vol. 48, № 4. P. 151–188. <https://doi.org/10.1115/1.3005099>.
21. Shapiro V. Semi-analytic geometry with *R*-functions. *Acta Numer.* 2007. 16. P. 239–303. <https://doi.org/10.1017/S096249290631001X>.
22. Стрельченко А. Й., Колосова С. В., Рвачов В. Л. Про один метод розв'язування крайових задач. *Доп. АН УРСР*, сер. А. № 9. 1972. С. 837–839.
23. Сидоров М. В. Математичне моделювання та чисельний аналіз течій в'язкої рідини у однозв'язних та багатозв'язних областях методом *R*-функцій : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : [спец.] 01.05.02 “Математичне моделювання та обчислювальні методи” / Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2008. 18 с.
24. Артюх А. В. Математичне моделювання та чисельний аналіз методом *R*-функцій нестационарних течій в'язкої нестисливої рідини : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : [спец.] 01.05.02 “Математичне моделювання та обчислювальні методи” / Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2016. 24 с.
25. Lamtyugova S. N., Sidorov M. V. Numerical analysis of the external slow flows of a viscous fluid using the *R*-function method. *Journal of Engineering Mathematics*. 2015. № 91(1). P. 59–79. <https://doi.org/10.1007/s10665-014-9746-x>.
26. Podhornyj O. R., Sidorov M. V. Mathematical modeling of fluid flows through the piecewise homogeneous porous medium by *R*-function method. *Mathematical Modeling and Computing*. 2021. № 8(3). P. 499–508. <https://doi.org/10.23939/mmc2021.03.499>.
27. Gybkina N. V., Sidorov M. V., Stadnikova H. V. Mathematical modeling of the quasi-stationary processes of viscous mixture mixing in a rectangular area by the *R*-functions method. *Bulletin of the National Technical University "KhPI". Ser. : System analysis, control and information technology*. 2022. № 2(8). P. 87–93. <https://doi.org/10.20998/2079-0023.2022.02.14>.
28. Maksymenko-Sheiko K. V., Sheiko T. I., Lisin D. O., Dudinov T. B.

Mathematical and Computer Modeling of Convective Heat Transfer in Fuel Cartridges of Fuel Elements with Different Shapes and Packing of Rods. *J. of Mech. Eng.* 2022. № 25(1). P. 40–54. <https://doi.org/10.15407/pmach2022.01.040>.

29. Polyanin A. D., Kutepov A. M., Kazenin D. A. Vyazmin A. V. Hydrodynamics, mass and heat transfer in chemical engineering. London : CRC Press, 2001. 408 p. <https://doi.org/10.1201/9781420024517>.

30. Ламтюгова С. М. Метод R -функцій для розв'язання задачі масообміну циліндричного тіла з твірною у вигляді кривої Ламе з в'язкою нестисливою рідиною. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки.* 2024. Випуск 25. С. 107–113. <https://doi.org/10.32626/2308-5878.2024-25.107-113>.

31. Журавель І. О. Метод R -функцій в аналізі течій в'язкої теплопровідної рідини : пояснювальна записка до кваліфікаційної роботи здобувача вищої освіти на другому (магістерському) рівні, спеціальність 124 Системний аналіз / І. О. Журавель ; М-во освіти і науки України, Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2025. 59 с.

32. База С. О. Метод R -функцій у математичному моделюванні фільтраційних течій у кусково-неоднорідних середовищах : пояснювальна записка до кваліфікаційної роботи здобувача вищої освіти на другому (магістерському) рівні, спеціальність 113 Прикладна математика / С. О. База ; М-во освіти і науки України, Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2025. 64 с.

33. Курлов Є. Е. Метод R -функцій та нелінійний метод Гальоркіна у задачах математичного моделювання нестационарних течій в'язкої теплопровідної рідини : пояснювальна записка до кваліфікаційної роботи здобувача вищої освіти на другому (магістерському) рівні, спеціальність 113 Прикладна математика / Є. Е. Курлов ; М-во освіти і науки України, Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2022. 105 с.

34. Шабратко Є. Ю. Математичне моделювання процесів перемішування, викликаних рухомими вихорами : пояснювальна записка до кваліфікаційної

роботи здобувача вищої освіти на другому (магістерському) рівні, спеціальність 113 Прикладна математика / Є. Ю. Шабратко ; М-во освіти і науки України, Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2021. 61 с.

35. Артюх П. А. Математичне моделювання процесів перемішування в'язкої рідини у двозв'язних областях : пояснювальна записка до кваліфікаційної роботи здобувача вищої освіти на другому (магістерському) рівні, спеціальність 113 Прикладна математика / П. А. Артюх ; М-во освіти і науки України, Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2021. 68 с.

36. Kumar K. B. V. *Mathematica for Physicists and Engineers*. Wiley & Sons, Limited, John, 2023.