

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту  
(повна назва)

Кафедра прикладної математики  
(повна назва)

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА**  
**Пояснювальна записка**

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Відновлення розривних функцій спеціального вигляду з використанням  
проекцій і скінченних сум Фур'є  
(тема)

Виконав:  
студент 2 курсу, групи САУм-20-1  
Ткаченко І.М.  
(прізвище, ініціали)

Спеціальність 124 Системний аналіз  
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна  
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління  
(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. Литвин О.Г.  
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

(підпис)

Тевяшев А.Д.  
(прізвище, ініціали)

2021 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ \_\_\_\_\_

(підпис)

“ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2021 р.

**ЗАВДАННЯ**  
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Ткаченку Ігорю Миколайовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Відновлення розривних функцій спеціального вигляду  
з використанням проєкцій і скінченних сум Фур'є

затверджена наказом по університету від 05 листопада 2021 р. № 1642 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 грудня 2021 р.

3. Вихідні дані до роботи проєкційні дані для тестових розривних функцій з  
відомими лініями розриву: одна та дві лінії розриву спеціального вигляду

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі \_\_\_\_\_

1. Системний аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій \_\_\_\_\_

1. Актуальність теми роботи \_\_\_\_\_

2. Постановка задачі \_\_\_\_\_

3. Системний аналіз предметної області \_\_\_\_\_

4. Метод чисельного аналізу \_\_\_\_\_

5. Результати обчислювального експерименту \_\_\_\_\_

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

| № | Назва етапів роботи                                     | Терміни виконання етапів роботи | Примітка |
|---|---------------------------------------------------------|---------------------------------|----------|
| 1 | Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи | 8 – 14 листопада 2021 р.        | виконано |
| 2 | Вибір та обґрунтування методу                           | 15 – 21 листопада 2021 р.       | виконано |
| 3 | Розробка алгоритму і програми                           | 22 – 28 листопада 2021 р.       | виконано |
| 4 | Проведення аналітичних досліджень та розрахунків        | 29 листопада – 5 грудня 2021 р. | виконано |
| 5 | Робота над текстом пояснювальної записки                | 6 – 9 грудня 2021 р.            | виконано |
| 6 | Представлення роботи на рецензію в ЕК                   | 10 грудня 2021 р.               | виконано |

Дата видачі завдання 8 листопада 2021 р.

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_ проф. Литвин О.Г.  
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 107 с., 26 табл., 61 рис., 1 дод., 15 джерел.

КОМП'ЮТЕРНА ТОМОГРАФІЯ, ПОДВІЙНІ СУМИ ФУР'Є, РЕКОНСТРУКЦІЯ ЗОБРАЖЕНЬ, ПЕРЕТВОРЕННЯ РАДОНА, ЯВИЩЕ ГІББСА, ІНТЕРПІНАЦІЯ, РОЗРИВНІ ФУНКЦІЇ.

Об'єкт дослідження – процес відтворення внутрішньої структури тіла на основі проєкційних даних, що надходять з комп'ютерного томографа.

Мета роботи – дослідити та протестувати новий метод відновлення розривних функцій, оснований на використанні розривних сплайнів та методу скінченних сум Фур'є зі спеціально сконструйованою системою сканування, тісно пов'язаної з формулами для коефіцієнтів Фур'є; дослідити вплив явища Гіббса на результати дослідження.

Методи дослідження – створення тестових розривних функцій, що моделюють дані, які можуть бути отримані з комп'ютерного томографа. Наближення функцій розривними сплайнами двох змінних. Відновлення розривних функцій за допомогою методу скінченних сум Фур'є. Наближення розривних функцій скінченними сумами Фур'є призводить до явища Гіббса. Для усунення цього явища відновлюється не вихідна функція, а неперервна функція, отримана з допомогою сплайнів.

У даній роботі був проведений системний аналіз проблеми відновлення функцій за їх проєкціями, який включає в себе морфологічний опис системи, функціональну модель, інформаційну модель та аналіз сценаріїв вирішення проблеми. Також була наведена програмна реалізація та результати обчислювального експерименту.

## ABSTRACT

Introductory note: 107 pages, 26 tables, 61 figures, 1 appendix, 15 sources.

COMPUTER TOMOGRAPHY, DOUBLE FOURIER SUMS, IMAGE RE-CONSTRUCTION, RADON TRANSFORMATION, GIBBS PHENOMENON, INTERLINATION, RUPTURE FUNCTIONS.

Object of research – the process of reproducing the internal structure of the body on the basis of projection data coming from a computer tomograph.

Purpose of work – research and test a new method of recovery of discontinuous functions, based on the use of discontinuous splines and the method of finite Fourier sums with a specially designed scanning system, closely related to the formulas for Fourier coefficients; research the influence of the Gibbs phenomenon on the results of the research.

Methods of research – creation of test rupture functions that simulate data that can be obtained from a computer tomograph. Approximation of functions by discontinuous splines of two variables. Recovery of discontinuous functions using the finite sum Fourier method. The approximation of discontinuous functions by finite Fourier sums leads to the Gibbs phenomenon. To eliminate this phenomenon, not the original function is restored, but the continuous function obtained with the help of splines.

In this work, a systematic analysis of the problem of restoring functions by their projections was performed, which includes a morphological description of the system, a functional model, an information model and an analysis of scenarios for solving the problem. The software implementation and the results of the computational experiment were also presented.

## ЗМІСТ

|                                                                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
|                                                                                                                            | С. |
| Вступ .....                                                                                                                | 8  |
| 1 Системний аналіз предметної області та постановка задач дослідження .....                                                | 10 |
| 1.1 Системний аналіз задачі відновлення розривних функцій спеціального<br>вигляду з використанням проєкцій .....           | 10 |
| 1.1.1 Вербальна модель системи .....                                                                                       | 10 |
| 1.1.2 Морфологічний опис системи .....                                                                                     | 11 |
| 1.1.3 Функціональна модель системи .....                                                                                   | 12 |
| 1.1.4 Інформаційна модель системи .....                                                                                    | 14 |
| 1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі відновлення розривних функцій<br>спеціального вигляду з використанням проєкцій ..... | 15 |
| 1.2.1 Модель аналізу проблеми .....                                                                                        | 15 |
| 1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом<br>аналізу ієрархій .....                                    | 15 |
| 1.2.3 Модель вирішення проблеми .....                                                                                      | 21 |
| 1.3 Змістовна та формальна постановка задачі .....                                                                         | 23 |
| 1.3.1 Змістовна постановка задачі .....                                                                                    | 23 |
| 1.3.2 Формальна постановка задачі .....                                                                                    | 24 |
| 2 Вибір та обґрунтування методу розв’язання .....                                                                          | 28 |
| 2.1 Математична модель відновлення розривних функцій спеціального<br>вигляду з використанням проєкцій .....                | 28 |
| 2.1.1 Загальна постановка задачі .....                                                                                     | 28 |
| 2.1.2 Побудова розривного сплайна .....                                                                                    | 29 |
| 2.1.3 Використання сплайна для побудови неперервної функції .....                                                          | 32 |
| 2.2 Побудова тестових задач .....                                                                                          | 33 |
| 2.3 Деякі додаткові теоретичні відомості .....                                                                             | 41 |
| 2.3.1 Деякі відомості з теорії кратних рядів Фур’є .....                                                                   | 41 |

|                                                                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.3.2 Математична модель відновлення функцій методом скінченних сум Фур'є .....                                                         | 43 |
| 2.3.3 Інтерлінація функцій .....                                                                                                        | 46 |
| 2.3.4 Явище Гіббса .....                                                                                                                | 49 |
| 3 Програмна реалізація .....                                                                                                            | 54 |
| 3.1 Mathcad як система комп'ютерної математики .....                                                                                    | 54 |
| 3.2 Алгоритм розв'язання задачі відновлення розривних функцій спеціального вигляду з використанням проекцій і скінченних сум Фур'є..... | 55 |
| 3.3 Опис програми .....                                                                                                                 | 56 |
| 4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз .....                                                                            | 57 |
| 4.1 Результати розв'язання задачі .....                                                                                                 | 57 |
| 4.2 Аналіз результатів .....                                                                                                            | 82 |
| Висновки .....                                                                                                                          | 84 |
| Перелік джерел посилання .....                                                                                                          | 85 |
| Додаток А Програмна реалізація .....                                                                                                    | 87 |

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Обчислювальна (або комп'ютерна) томографія набула широкої суспільної популярності головним чином завдяки появі та вдосконаленню медичних томографів. Однак різні томографічні методи використовувалися раніше і застосовуються зараз у багатьох інших областях, таких як радіоастрономія, електронна мікроскопія, біохімія, промисловість, фізика Землі, океану, космосу, але головним чином у медицині [1].

Число робіт, що відноситься до прикладної та теоретичної томографії, вимірюється тисячами. У багатьох випадках результати, отримані з допомогою обчислювальної томографії, неможливо знайти ніякими іншими методами. Особливість томографічних методів у тому, що їх інформативність великою мірою залежить від глибини і тонкості застосовуваної математичної теорії [1].

Томографічні методи реконструкції просторово неоднорідних фізичних характеристик поглинаючих і випромінюючих середовищ за останні 30 років набули великого поширення в різних областях, у тому числі в такій соціально значущій, як медична діагностика. Нині обчислювальна томографія є сферою науки, що цілком сформувалася, зі своїм колом завдань і методів їх вирішення. Всі види томографії за властивостями об'єктів, що вивчаються, можна розділити на два великі класи: трансмісійну обчислювальну томографію і емісійну обчислювальну томографію. У трансмісійній томографії зовнішнє випромінювання зондує пасивний (невипромінюючий) об'єкт, частково поглинаючись ним. В емісійній томографії активний (випромінюючий) об'єкт являє собою просторовий (двовимірний або тривимірний) розподіл джерел випромінювання, при цьому випромінювання, що виходить вздовж якого-небудь напрямку, є суперпозицією випромінювань всіх джерел, що лежать на лінії проєціювання [2].

У більшості алгоритмів вирішення плоскої задачі комп'ютерної томографії використовують пряме і обернене перетворення Радона. Їх аналіз показує, що завдання оптимізації кількості проєкцій для відновлення функцій по заданим класам (тобто відновлення об'єктів з характеристиками, що описуються



функціями по заданих класах) поки що не вирішене, що існуючі комп'ютерні томографи використовують однакову кількість проєкцій для відновлення різних об'єктів.

Таким чином, актуальною є задача розробки і дослідження нових методів вирішення плоскої задачі радоновської комп'ютерної томографії (крім рентгеновської), які можуть використовувати нетрадиційні схеми сканування.

**Мета і завдання кваліфікаційної роботи.** Метою кваліфікаційної роботи є дослідження та тестування нового метод відновлення розривних функцій, оснований на використанні розривних сплайнів та методу скінченних сум Фур'є та дослідження впливу явища Гіббса на результати дослідження.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «Відновлення розривних функцій спеціального вигляду з використанням проєкцій»;
- вибрати і обґрунтувати метод розв'язання задачі;
- розробити програмну реалізацію методу розв'язання задачі;
- навести результати обчислювального експерименту.

*Об'єктом дослідження* є процес відтворення внутрішньої структури тіла на основі проєкційних даних, що надходять з комп'ютерного томографа.

*Предметом дослідження* є особливості та характер впливу явища Гіббса на результати дослідження.

**Методи дослідження.** У кваліфікаційній роботі використовується метод скінченних сум Фур'є; метод побудови розривних сплайнів двох змінних з використанням інтерлінації функцій; метод відновлення розривних функцій; створення тестових розривних функцій, що моделюють дані, які можуть бути отримані з комп'ютерного томографа.

# **1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ**

## **1.1 Системний аналіз задачі відновлення розривних функцій спеціального вигляду з використанням проєкцій**

### **1.1.1 Вербальна модель системи**

У якості об'єкту аналізу виступає науковий центр рентгенології, що включає в себе відділи медицини та науково-дослідницької діяльності. Відділ медицини займається обстеженням пацієнтів з різними видами травм або захворюваннями та постановкою діагнозів за допомогою методів реконструкції зображення комп'ютерної томографії, які є предметом нашого аналізу.

Метою даної системи є виявлення діагнозу на базі методів томографічної реконструкції зображення та лікування травм або захворювань. Щоб мати якісне розуміння щодо мети системи необхідно знати з яких елементів складається наша система.

Виходячи з поточних міркувань, дана система, яка представляє з себе науковий центр рентгенології, складається з наступних підрозділів:

- відділ рентгенології;
- відділ рентгенографії;
- відділ рентгеноскопії;
- відділ мамології;
- відділ грудної хірургії;
- амбулаторний центр.

Вхід даної системи складається з науково-дослідницької діяльності, медичної служби пацієнтів та різних ресурсів системи (кадрові, фінансові, технічні і т.д.). А вихід системи – запровадження нових методів встановлення діагнозів та лікування на базі результатів науково-дослідницької діяльності, дотримання медичних вимог, лікування пацієнтів та прибуток.

### 1.1.2 Морфологічний опис системи

Морфологічний опис системи вказує на те, які компоненти системи будуть розглядатися [3].

Зовнішнє середовище являє собою сукупність всіх об'єктів поза границею системи, які впливають на систему, а також об'єкти, чії властивості змінюються в результаті поведінки системи.

Об'єктами зовнішнього середовища у нашому випадку виступають: пацієнти з різними видами травм або захворюваннями; медичний дослідницький університет, що займається науково-дослідницькою діяльністю в сфері рентгенології; міністерство охорони здоров'я (МОЗ), що забезпечує засади охорони у науковому центрі рентгенології.

Об'єкти зовнішнього середовища зображені на рисунку 1.1.

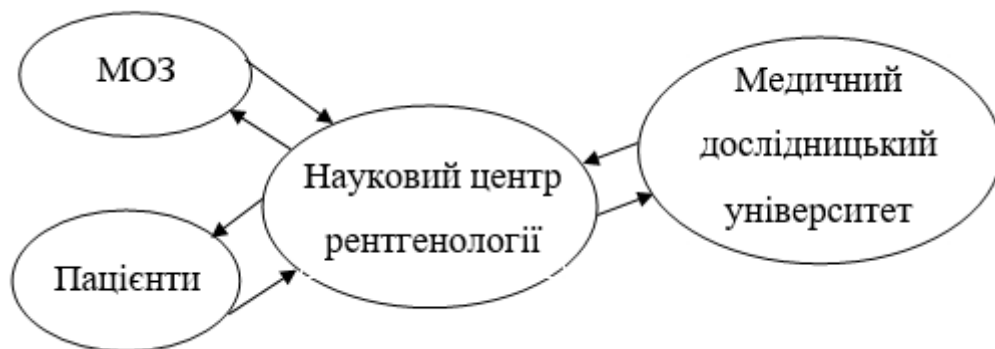


Рисунок 1.1 – Модель зовнішнього середовища

Модель "чорний ящик" (рис. 1.2) включає в себе модель границі, модель зовнішнього середовища, входи та виходи системи [3].

Фактори моделі включають в себе пацієнтів, наукових співробітників, лікарів, технічні ресурси (обладнання), а також ресурси фінансування (наукова та лікарська діяльність). Тоді у якості результату, будуть виступати: результати наукових досліджень, виробничі ресурси (ліки, лікування та здорові пацієнти), прибуток та медичні нормативи.



Рисунок 1.2 – Модель системи «чорний ящик»

1.1.3 Функціональна модель системи

Функціональна модель є структурним зображенням функцій системи або середовища, а також інформації та об'єктів, що зв'язують ці функції [3].

На подальших рисунках зображена контекстна діаграма (рисунок 1.3) та декомпозиція контекстної діаграми (рисунок 1.4).

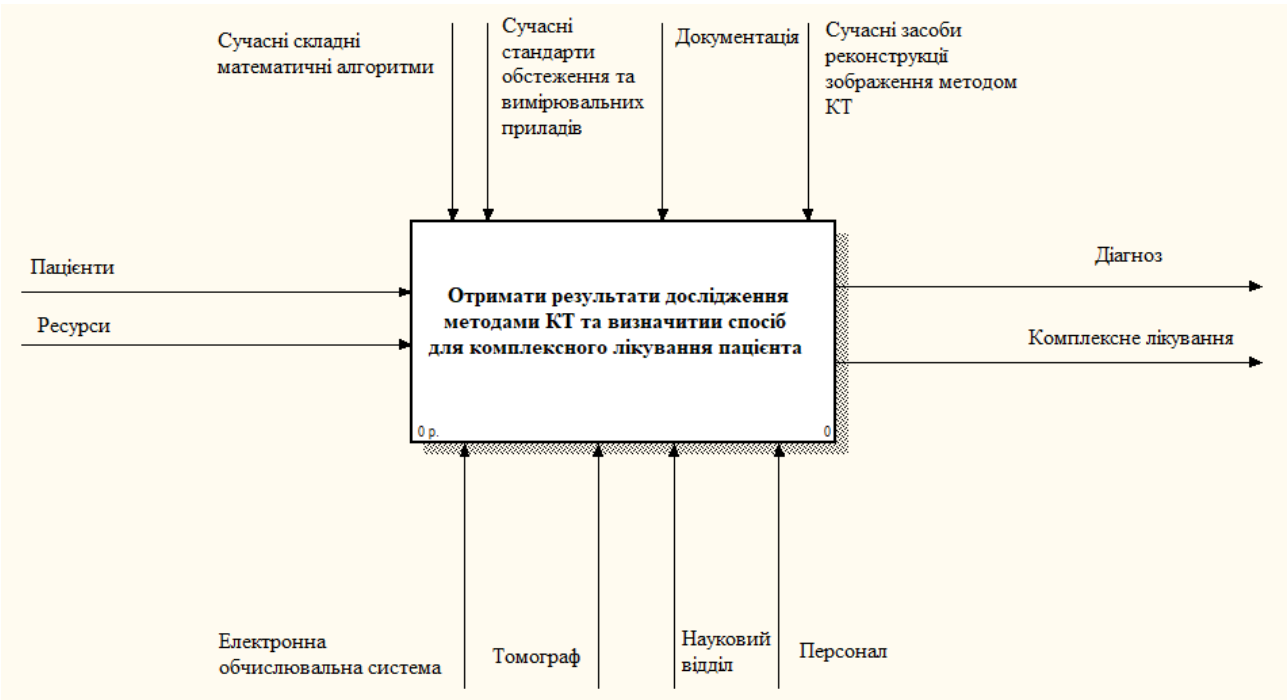


Рисунок 1.3 – Контекстна IDEF0 діаграма

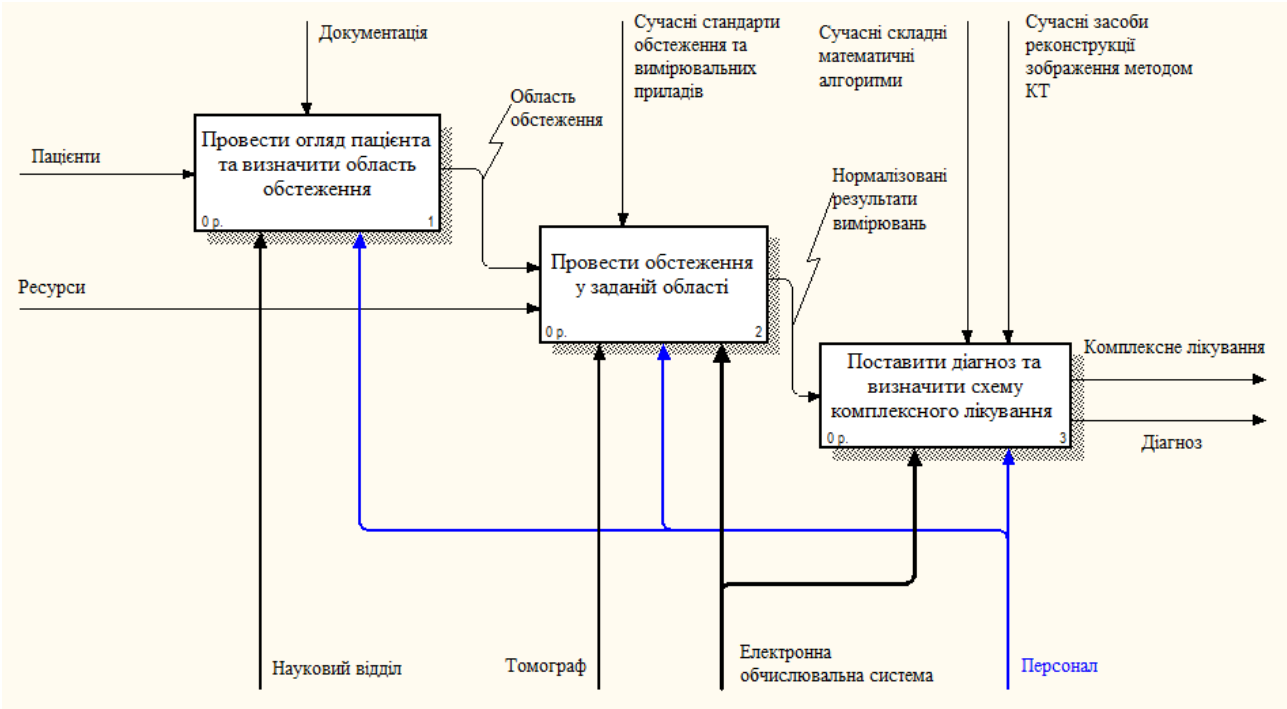


Рисунок 1.4 – Декомпозиція першого рівня контекстної IDEF0 діаграми

Скористаємося методом IDEF3, який може дати можливість змодельовати ситуацію, коли процеси виконуються у певній послідовності, а також описати об’єкти, що беруть спільну участь в одному процесі [3]. На рисунку 1.5 наведено контекстна діаграма IDEF3.

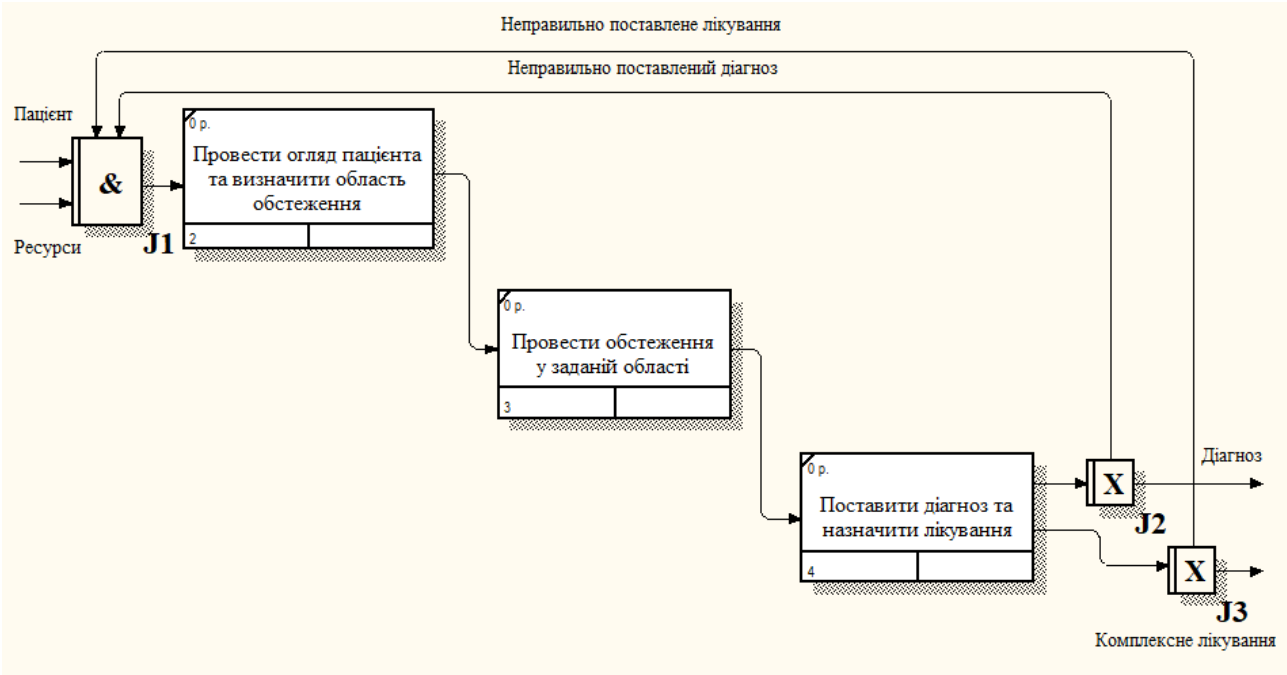


Рисунок 1.5 – Контекстна IDEF3 діаграма

### 1.1.4 Інформаційна модель системи

Скористаємося діаграмою потоків даних (DFD), яка використовується для опису документообігу та обробки інформації [3].

На рисунку 1.6 та рисунку 1.7 зображені контекстна DFD діаграма та її декомпозиція відповідно.

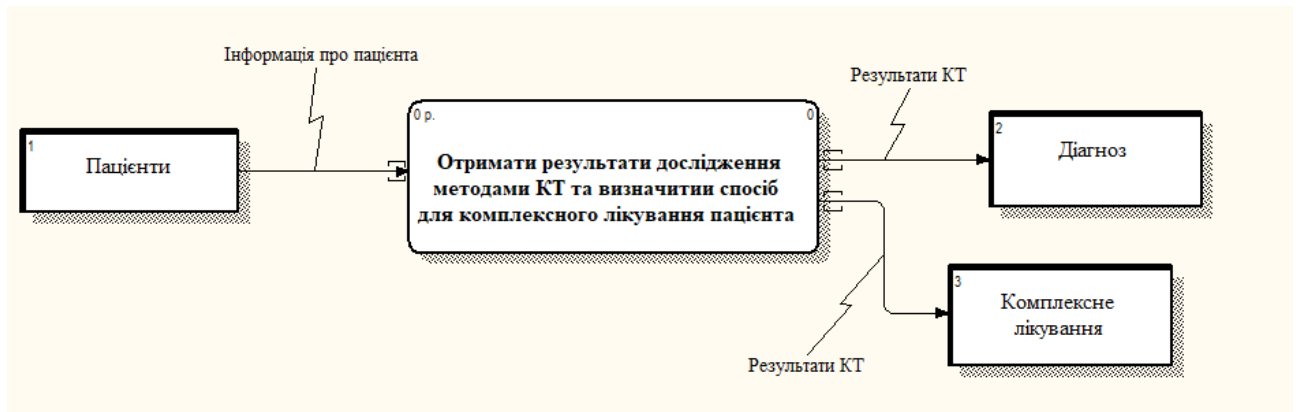


Рисунок 1.6 – Контекстна DFD діаграма

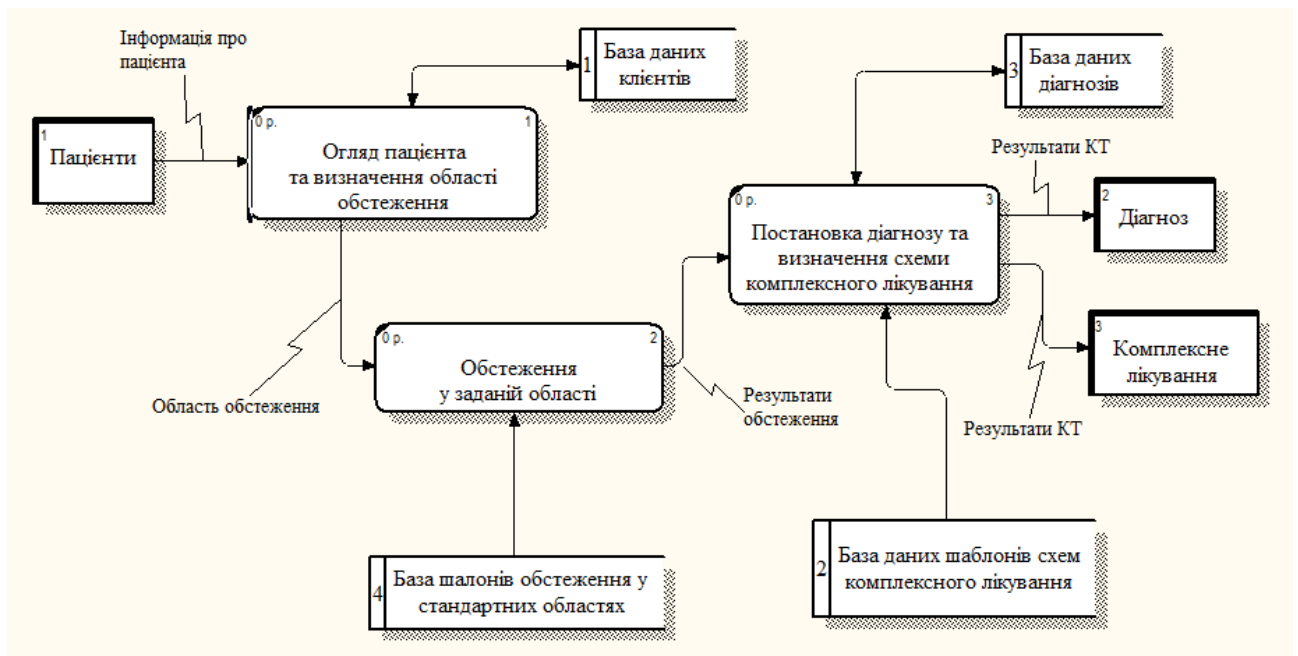


Рисунок 1.7 – Декомпозиція першого рівня контекстної DFD діаграми

## 1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі відновлення розривних функцій спеціального вигляду з використанням проєкцій

### 1.2.1 Модель аналізу проблеми

На просторі розглядуваних об'єктів виберемо компоненти, які впливають на отримання необхідного результату та скоординуємо їх у три групи властивостей: небажані властивості; критичні властивості; бажані властивості [3].

Небажані властивості:

- надмірно велика похибка розрахунків;
- надмірні обчислювальні витрати;
- проблеми побудови області моделювання.

Бажані властивості:

- мінімізація обчислювальних витрат;
- мінімізація похибки розрахунків.

Критичні властивості:

- складність реалізації методу;
- універсальність застосування.

### 1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

У методі аналізу ієрархій ми структуруємо задачу прийняття рішень шляхом побудови багаторівневої ієрархії, що об'єднує усі компоненти задачі [3].

Проведемо аналіз незадоволеностей, за допомогою побудови ієрархічної трьохрівневої моделі (рис. 1.8) [3]. У якості фокусу моделі візьмемо вибір типу методу для розв'язання задачі відновлення розривних функцій спеціального вигляду з використанням проєкцій. Для рівня незадоволеностей виберемо наступні критерії:

- швидкість роботи методу;
- складність реалізації методу;
- мінімізація похибки розрахунків методу;
- універсальність застосування методу;

А у якості характеристик, які впливають на розв'язок поставленої задачі, візьмемо такі характеристики:

- алгебраїчні методи;
- методи розкладання функції в ряд;
- точний розв'язок.



Рисунок 1.8 – Ієрархічна структура задачі вибору методу

Побудуємо матрицю попарних порівнянь, скориставшись шкалою Т. Сааті (табл. 1.1) [3].



Таблиця 1.1 – Матриця попарних порівнянь першого рівня

| Номер<br>п/п | K1  | K2  | K3  | K4 | Власний<br>вектор | Вектор<br>пріоритетів |
|--------------|-----|-----|-----|----|-------------------|-----------------------|
| K1           | 1   | 2   | 5   | 7  | 2,891             | 0,510                 |
| K2           | 1/2 | 1   | 4   | 6  | 1,864             | 0,333                 |
| K3           | 1/5 | 1/4 | 1   | 5  | 0,712             | 0,124                 |
| K4           | 1/7 | 1/6 | 1/5 | 1  | 0,263             | 0,052                 |

Для розрахунку індексу узгодженості знайдемо суми елементів матриці по стовбцях:

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = 1,842, \quad y_2 = 2 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = 3,421,$$

$$y_3 = 5 + 4 + 1 + \frac{1}{5} = 10,200, \quad y_4 = 7 + 6 + 5 + 1 = 19.$$

Тоді

$$\lambda_{\max}^K = 1,842 \cdot 0,510 + 3,421 \cdot 0,333 + 10,200 \cdot 0,124 + \\ + 19 \cdot 0,052 = 4,271.$$

Оскільки матриця попарних порівнянь критеріїв – матриця четвертого порядку, то  $RI^K = 1.11$ .

Отже, індекс узгодженості (ІУ):

$$CI^K = \frac{4,271 - 4}{4 - 1} = 0,093,$$

а відносна узгодженість (ВУ):

$$CR^K = \frac{CI^K}{RI^K} = \frac{0,093}{1,110} = 0,081.$$

Оскільки ВУ близько до 0,1, то вважаємо, що матриця попарних порівнянь критеріїв побудована правильно. Вектор локальних пріоритетів відносно проблеми вибору має вигляд

$$\vec{p}^K = (0,510; 0,333; 0,124; 0,052).$$

Далі формуємо матриці попарних порівнянь альтернатив по кожному критерію. Матриці попарних порівнянь представлені у вигляді таблиць 1.2 – 1.6.

Таблиця 1.2 – Матриця попарних порівнянь першого критерію

| K1 | A1 | A2  | A3  | Власний вектор | Вектор пріоритетів |
|----|----|-----|-----|----------------|--------------------|
| A1 | 1  | 1/3 | 1/5 | 0,406          | 0,091              |
| A2 | 3  | 1   | 1/7 | 0,754          | 0,170              |
| A3 | 5  | 7   | 1   | 3,271          | 0,738              |

Отримаємо ІУ, ВУ та вектор локальних пріоритетів для таблиці 1.2:

$$CI_1^A = \frac{3,233 - 3}{3 - 1} = 0,117,$$

$$CR_1^A = \frac{0,117}{1,11} = 0,105,$$

$$\vec{p}_1^A = (0,091; 0,170; 0,738).$$

Таблиця 1.3 – Матриця попарних порівнянь другого критерію

| K2 | A1  | A2 | A3  | Власний вектор | Вектор пріоритетів |
|----|-----|----|-----|----------------|--------------------|
| A1 | 1   | 5  | 2   | 2,154          | 0,559              |
| A2 | 1/2 | 1  | 1/3 | 0,550          | 0,143              |
| A3 | 1/2 | 3  | 1   | 1,145          | 0,297              |

Отримаємо ІУ, ВУ та вектор локальних пріоритетів для таблиці 1.3:

$$CI_2^A = \frac{3,397 - 3}{3 - 1} = 0,199,$$

$$CR_2^A = \frac{0,199}{1,11} = 0,179,$$

$$\vec{p}_2^A = (0,559; 0,143; 0,297).$$

Таблиця 1.4 – Матриця попарних порівнянь третього критерію

| K3 | A1  | A2  | A3 | Власний вектор | Вектор пріоритетів |
|----|-----|-----|----|----------------|--------------------|
| A1 | 1   | 1/7 | 7  | 1              | 0,261              |
| A2 | 7   | 1   | 2  | 2,410          | 0,630              |
| A3 | 1/7 | 1/2 | 1  | 0,415          | 0,108              |

Отримаємо ІУ, ВУ та вектор локальних пріоритетів для таблиці 1.4:

$$CI_3^A = \frac{4,249 - 3}{3 - 1} = 0,624,$$

$$CR_3^A = \frac{0,624}{1,11} = 0,562,$$

$$\vec{p}_3^A = (0,261; 0,630; 0,108).$$

Таблиця 1.5 – Матриця попарних порівнянь четвертого критерію

| К4 | A1  | A2  | A3 | Власний вектор | Вектор пріоритетів |
|----|-----|-----|----|----------------|--------------------|
| A1 | 1   | 1/3 | 4  | 0,101          | 0,256              |
| A2 | 3   | 1   | 8  | 2,885          | 0,671              |
| A3 | 1/4 | 1/8 | 1  | 0,315          | 0,073              |

Отримаємо ІУ, ВУ та вектор локальних пріоритетів для таблиці 1.5:

$$CI_4^A = \frac{3,018 - 3}{3 - 1} = 0,009,$$

$$CR_4^A = \frac{0,009}{1,11} = 0,008,$$

$$\vec{p}_4^A = (0,256; 0,671; 0,073).$$

На основі отриманих результатів розрахуємо вектор глобальних пріоритетів та відповідні показники.

Таблиця 1.6 – Кінцеві результати задачі вибору методу розв'язання

| Критерії     | К1    | К2    | К3    | К4    | Вектор пріоритетів |
|--------------|-------|-------|-------|-------|--------------------|
| Альтернативи |       |       |       |       |                    |
| A1           | 0,091 | 0,559 | 0,261 | 0,256 | 0,316              |
| A2           | 0,170 | 0,143 | 0,630 | 0,671 | 0,417              |
| A3           | 0,738 | 0,297 | 0,108 | 0,073 | 0,267              |

Отримаємо ІУ, ВУ та вектор локальних пріоритетів для таблиці 1.6:

$$CI = 0,090, CR = 0,081, \vec{p} = (0,316; 0,417; 0,267).$$

Максимальна компонента вектора глобальних пріоритетів відповідає другій альтернативі, тобто метод, за яким рекомендовано розв'язувати задачу від-

новлення розривних функцій спеціального вигляду з використанням проєкцій належить до групи методів, які основані на розкладанні функції в ряд.

### 1.2.3 Модель вирішення проблеми

Перейдемо до моделі аналізу вирішення проблеми математичного моделювання. Основним завданням аналізу є виділення значущих властивостей для визначеної незадоволеності системи у процесі її функціонування [3].

В результаті отримаємо три категорії незадоволень і відповідні характеристики для кожної з них (рисунок 1.9):

- а) небажані властивості;
  - надмірно велика похибка розрахунків;
  - надмірні обчислювальні витрати;
- б) бажані властивості;
  - мінімізація обчислювальних витрат;
  - мінімізація похибки розрахунків;
- в) критичні властивості;
  - складність реалізації методу;
  - універсальність застосування.

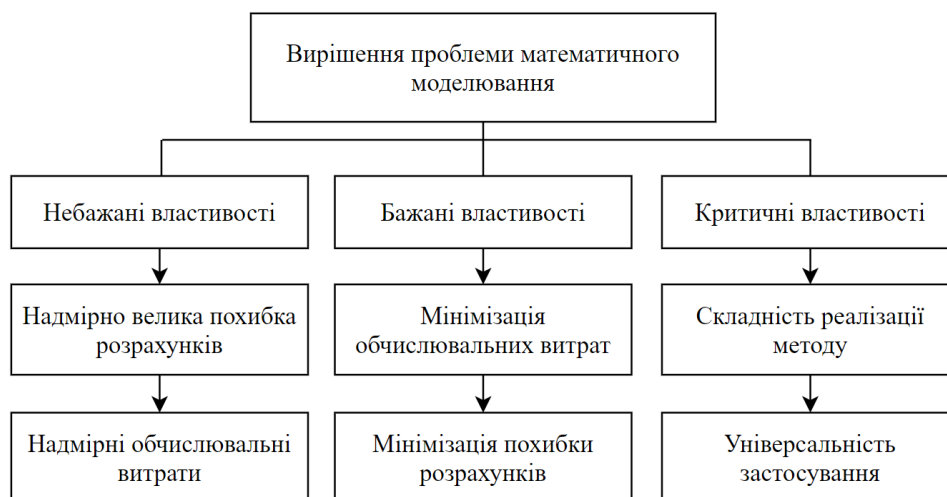


Рисунок 1.9 – Ієрархічна структура аналізу проблеми

Тепер побудуємо матрицю попарних порівнянь першого рівня, а також і кожної виділеної властивості [3].

Усі матричні дані порівнянь першого рівня та всіх властивостей наведені у відповідних таблицях 1.7 – 1.10.

Таблиця 1.7 – Матриця попарних порівнянь першого рівня

| Номер п/п | Бажані властивості | Критичні властивості | Небажані властивості | Власний вектор | Вектор пріоритетів |
|-----------|--------------------|----------------------|----------------------|----------------|--------------------|
| Бажані    | 1                  | 4                    | 2                    | 2              | 0,558              |
| Критичні  | 1/3                | 1                    | 1/4                  | 0,437          | 0,122              |
| Небажані  | 1/2                | 3                    | 1                    | 1,145          | 0,320              |

Таблиця 1.8 – Матриця попарних порівнянь небажаних властивостей

| Небажані властивості | Надмірна похибка | Надмірні витрати | Власний вектор | Вектор пріоритетів |
|----------------------|------------------|------------------|----------------|--------------------|
| Надмірна похибка     | 1                | 4                | 2              | 0,628              |
| Надмірні витрати     | 1/4              | 1                | 1,183          | 0,372              |

Таблиця 1.9 – Матриця попарних порівнянь бажаних властивостей

| Бажані властивості  | Мінімізація витрат | Мінімізація похибки | Власний вектор | Вектор пріоритетів |
|---------------------|--------------------|---------------------|----------------|--------------------|
| Мінімізація витрат  | 1                  | 2                   | 1,414          | 0,667              |
| Мінімізація похибки | 1/2                | 1                   | 0,707          | 0,333              |

Таблиця 1.10 – Матриця попарних порівнянь критичних властивостей

| Критичні властивості | Складність | Універсальність | Власний вектор | Вектор пріоритетів |
|----------------------|------------|-----------------|----------------|--------------------|
| Складність           | 1          | 1/3             | 0,577          | 0,250              |
| Універсальність      | 3          | 1               | 1,732          | 0,750              |

Далі у таблиці 1.11 наведені значення глобальних пріоритетів властивостей.

Таблиця 1.11 – Вектор глобальних пріоритетів

| Назва вектору глобальних пріоритетів | Значення вектору глобальних пріоритетів |
|--------------------------------------|-----------------------------------------|
| Надмірно велика похибка розрахунків  | 0,628                                   |
| Надмірні обчислювальні витрати       | 0,372                                   |
| Мінімізація обчислювальних витрат    | 0,667                                   |
| Мінімізація похибки розрахунків      | 0,333                                   |
| Складність реалізації методу         | 0,250                                   |
| Універсальність застосування         | 0,750                                   |

На основі значень з таблиці 1.11, зробимо висновок, що найвпливовішою трійкою властивостей є зменшення похибки розрахунків, мінімізація обчислювальних витрат та універсальність застосування.

### 1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

#### 1.3.1 Змістовна постановка задачі

Розглянемо задачу відновлення двовимірного розподілу коефіцієнта послаблення випромінювання  $f(x, y)$  (рис. 1.10) [2]. У даному випадку джерело випромінювання формує пучок форми «олівця» та проходить вздовж об'єкта дослідження. Паралельно до джерела випромінювання з протилежної сторони об'єкта дослідження рухається детектор випромінювання. Набір відліків, який ми отримуємо у результаті дослідження, визначає одномірну функцію, яка є проекцією. Цей спосіб вимірювання являє з себе кругову геометрію вимірювань, а проєкції називають паралельними проєкціями [2].

Далі система «Джерело-Детектор» визначає наступну проєкцію, поверта-

ючись відносно об'єкта на деякий кут та знімаючи новий набір відліків.

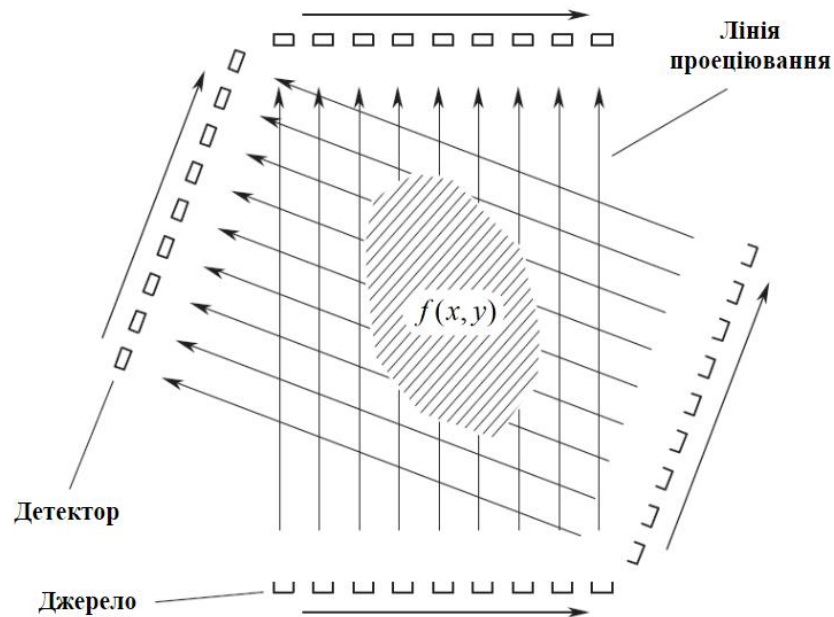


Рисунок 1.10 – Кругова геометрія вимірювань з паралельними проєкціями

Система «Джерело-Детектор» повторює такі заміри до того моменту, поки не повернеться на кут  $2\pi$ , однак системі достатньо повернутися на кут  $\pi$ , так як після цього результати вимірювань повторюються. Далі необхідно відновити двомірний розподіл  $f(x, y)$  по отриманому набору одномірних проєкцій.

Таку схему вимірювань називають круговою геометрією вимірювань, так як дана система обертається навколо об'єкта. Для отримання наступного відліку в проєкції пучок зміщується паралельно попередньому положенню, проєкції називають паралельними [2].

### 1.3.2 Формальна постановка задачі

Розглянемо основні співвідношення, щодо трансмісійної обчислювальної томографії, що є математичною надбудовою над фізичним процесом ослаблення випромінювання в речовині.

Отже тонкий промінь випромінювання з інтенсивністю  $I_0$  потрапляє на



шар речовини з розподілом лінійного коефіцієнта поглинання  $f(x)$  вздовж поширення проміння. Джерело випромінювання проходить дискретно уздовж об'єкта [2].

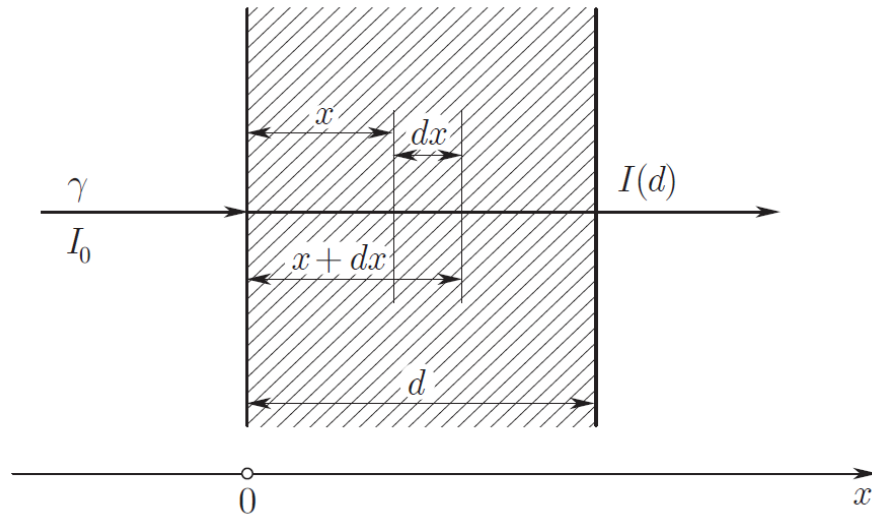


Рисунок 1.11 – Ослаблення випромінювання в середовищі

Паралельно з джерелом з протилежної сторони об'єкта дослідження рухається детектор випромінювання. Потім система повертається щодо об'єкта на кут  $\varphi$ , та знімає новий набір відліків, які визначають наступну проекцію. Будемо використовувати геометрію вимірів.

Початкове співвідношення:

$$\frac{dI(x)}{dx} = -f(x)I(x).$$

Це рівняння являє собою стаціонарне рівняння переносу випромінювання, яке поглинається у неоднорідному середовищі, що описує процес ослаблення випромінювання в речовині є балансом частинок або енергії [2].

Отже, в результаті сканування отримуємо криволінійні інтеграли функції  $f$  по прямим  $L_k$ . За сукупністю цих інтегралів потрібно відновити  $f$ :

$$\int_{L_k} f(x) dx = \gamma_k, \quad (1.1)$$

де  $k$  – відповідає перерізу прямої  $L_k$ .

Співвідношення (1.1) називається перетворенням Радона. Розглядаючи функцію  $f$  як функцію від двох змінних, отримуємо:

$$\int_{L_k} f(x, y) dl = \gamma_k.$$

Завдання полягає у відновленні функції  $f(x, y)$  за сукупністю проєкцій  $\gamma_k$ .

#### 1.4 Постановка задач дослідження

Метою даної роботи є дослідження методу відновлення розривних функцій спеціального вигляду за допомогою розривних сплайнів та методу скінченних сум Фур'є.

У якості результату дослідження поставлено усунення явища Гіббса для отримання високої точності.

Для відображення близькості відновлюваного зображення  $\vec{\tilde{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$  до заданого  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  використовуються середньоквадратична похибка  $D$ , абсолютна похибка  $R$  та максимальна по модулю похибка  $E$  [2].

Тобто

$$D = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{x}_i|,$$

$$E = \min_{i \in [1, n]} |x_i - \tilde{x}_i|.$$

Для оцінювання швидкості обробки інформації зазвичай, беруть час процесу, або вартість машинного часу.

Для вирішення даного завдання використовується метод відновлення розривних функцій спеціального вигляду з використанням проєкцій та скінченних сум Фур'є.

Вихідними даними завдання є:

- $N$  – число, відповідне верхньому і нижньому індексу в ряді Фур'є;
- значення числа розбивки по осях для дискретизації області при графічній ілюстрації та отриманні кількісних характеристик;
- число розбиття відрізка при інтегруванні;
- проєкційні дані  $\gamma_k$ , отримані з використанням тестових завдань.

Система комп'ютерної математики Mathcad виступає у якості ресурсного забезпечення процесу отримання результату: ЕОМ, що має велику пам'ять і високу швидкість.

Допущення і обмеження: розглядаються розривні функції з однією або декількома лініями розриву.

Область застосування: медицина та програмне забезпечення комп'ютерних томографів.

## 2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

### 2.1 Математична модель відновлення розривних функцій спеціального вигляду з використанням проєкцій

#### 2.1.1 Загальна постановка задачі

Вважаємо, що область, в якій задана розривна функція  $f(x, y)$ , повністю належить квадрату  $D = [0, 1]^2$  і відомі лінії розриву першого роду функції  $f(x, y)$  на границях  $\Gamma_k : w_k(x, y) = 0$  областей  $D_k$ ,  $k = \overline{1, M+1}$  [4]. Тут

$$D_1 = \{(x, y) : w_1(x, y) > 0\},$$

$$D_k = \{(x, y) : w_{k-1}(x, y) < 0 \wedge w_k(x, y) > 0\}, \quad k = \overline{2, M+1}.$$

Розглядаються випадки, коли лінії розриву є еліпсами (як частинний випадок, колами). У випадку, коли границі  $\Gamma_k$  областей  $D_k$  є еліпсами, з центром у точці  $(0,5; 0,5)$ , з півосями  $a_k, b_k$ , функції  $w_k(x, y)$  мають вигляд

$$w_k(x, y) = 1 - \sqrt{\frac{(x-0,5)^2}{a_k^2} + \frac{(y-0,5)^2}{b_k^2}}, \quad k = \overline{1, M},$$

$$a_1 < a_2 < \dots < a_M, \quad b_1 < b_2 < \dots < b_M,$$

$$w_{M+1}(x, y) = x(1-x)y(1-y).$$

Функція  $w_{M+1}(x, y)$  відповідає границі області  $D$ ,  $\Gamma_{M+1} : w_{M+1}(x, y) = 0$ . У випадку, коли границі  $\Gamma_k$  областей  $D_k$  є колами з центром у точці  $(0,5; 0,5)$ , з радіусами  $R_k$ , маємо  $a_k = b_k = R_k$ ,  $R_1 < R_2 < \dots < R_M$  [4].





$$O_2 f_{M+1}(x, y) = \frac{y-1}{0-1} f_{M+1}(x, 0) + \frac{x-0}{1-0} f_{M+1}(x, 1),$$

$$O_1 O_2 f_{M+1}(x, y) = \frac{x-1}{0-1} O_2 f_{M+1}(0, y) + \frac{y-0}{1-0} O_2 f_{M+1}(1, y).$$

Тут враховано, що формула

$$O f_{M+1}(x, y) = O_1 f_{M+1}(x, y) + O_2 f_{M+1}(x, y) - O_1 O_2 f_{M+1}(x, y)$$

є формулою поліноміальної інтерлінації функції  $f_{M+1}(x, y)$  на чотирьох сторонах квадрата  $D$ . Тобто

$$O f_{M+1}(x, y) \Big|_{\Gamma_{M+1}} = f_{M+1}(x, y) \Big|_{\Gamma_{M+1}}.$$

Функції  $f_{1,0,N}(x, y)$ ,  $f_{k,0,1,N}(x, y)$ ,  $f_{k,0,2,N}(x, y)$ ,  $f_{2,0,N}(x, y)$ ,  $k = \overline{2, M}$ ,

задаються так:

$$f_{1,0,N}(x, y) = f_1 \left( x - w_1(x, y) \frac{x-0,5}{a_1}, y - w_1(x, y) \frac{y-0,5}{b_1} \right),$$

$$f_{k,0,1,N}(x, y) = f_k \left( x - w_{k-1}(x, y) \frac{x-0,5}{a_{k-1}}, y - w_{k-1}(x, y) \frac{y-0,5}{b_{k-1}} \right),$$

$$f_{k,0,2,N}(x, y) = f_k \left( x - w_k(x, y) \frac{x-0,5}{a_k}, y - w_k(x, y) \frac{y-0,5}{b_k} \right), k = \overline{2, M},$$

$$f_{M+1,0,N}(x, y) = f_{M+1} \left( x - w_M(x, y) \frac{x-0,5}{a_M}, y - w_M(x, y) \frac{y-0,5}{b_M} \right).$$

Ці функції мають властивості, які формулюються у вигляді теореми [4].

Теорема. Функції  $f_{1,0,N}(x, y)$ ,  $f_{k,0,1,N}(x, y)$ ,  $f_{k,0,2,N}(x, y)$ ,  $f_{2,0,N}(x, y)$ ,

$k = \overline{2, M}$ , мають властивості:

$$\begin{aligned} f_{1,0,N}(x,y) &= f_1(x,y), w_1(x,y) = 0, \\ f_{k,0,1,N}(x,y) &= f_k(x,y), w_{k-1}(x,y) = 0, \\ f_{k,0,2,N}(x,y) &= f_k(x,y), w_k(x,y) = 0, k = \overline{2, M}, \\ f_{M+1,0,N}(x,y) &= f_{M+1}(x,y), w_M(x,y) = 0. \end{aligned}$$

Доведення проводиться безпосередньою підстановкою у формули для заданих функцій наступних виразів:

$$w_1(x,y) = 0, w_{k-1}(x,y) = 0, w_k(x,y) = 0, w_M(x,y) = 0, k = \overline{2, M}.$$

Тобто ці функції при побудові використовують лише сліди функцій  $f_k(x,y)$ ,  $k = \overline{1, M+1}$ , на лініях розриву, а також продовжують їх з ліній розриву в середину області [4].

### 2.1.3 Використання сплайна для побудови неперервної функції

З використанням заданої розривної функції та побудованого розривного сплайна формуємо функцію

$$\varphi(x,y) = f(x,y) - Sp(x,y). \quad (2.1)$$

Ця функція має такі властивості, які дозволять застосувати метод скінченних сум Фур'є з використанням проєкцій для її відновлення [5].



## 2.2 Побудова тестових задач

Задача відновлення функцій за допомогою проєкцій виникає в комп'ютерній томографії, коли експериментальними даними є не значення наближуваної функції в окремих точках, а інтеграли вздовж заданої системи ліній – проєкцій, які поступають з комп'ютерного томографа [6, 7].

1. Вважаємо лінії розриву функції  $f(x, y)$  відомими. Будуємо сплайн-функцію  $Sp(x, y)$ , яка має на вказаних лініях такі ж розриви першого роду, як і наближувана функція [4].

2. Знаходимо функцію  $\varphi(x, y)$  за формулою (2.1).

3. Відновлюємо функцію  $\varphi(x, y)$  за допомогою метода скінченних сум Фур'є, враховуючи, що ця функція не має розривів. Тобто її можна наближувати з допомогою відповідних сум Фур'є без явища Гіббса. Позначимо цю функцію  $\tilde{\varphi}(x, y)$  [5].

4. Використовуємо для аналізу функції  $f(x, y)$  суму побудованого вище сплайна та наближення функції  $\varphi(x, y)$  сумами Фур'є.

Приклад 1. Наближене відновлення розривної функції  $f(x, y)$ , яка має одну лінію розриву, що є колом.

Задана інформація:  $M$  – кількість ліній розриву,  $M=1$ ;  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$  – задані функції для побудови тестової розривної функції  $f(x, y)$ ; радіус кола  $R_1$  і його центр  $(0,5;0,5)$ ; проєкційні дані для функції  $f(x, y)$ .

Розв'язання задачі виконується так:

1. Побудова функції  $f(x, y)$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & \text{якщо } w_1(x, y) > 0; \\ \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2}, & \text{якщо } w_1(x, y) = 0; \\ f_2(x, y), & \text{якщо } w_1(x, y) < 0, \end{cases}$$

$$w_1(x, y) = R_1 - \sqrt{(x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2}.$$

2. Побудова сплайна  $Sp(x, y)$ :

$$Sp(x, y) = \begin{cases} \frac{w_1(x, y)}{R_1} f_1(0,5;0,5) + \\ + \left( \frac{w_1(0,5, 0,5) - w_1(x, y)}{w_1(0,5, 0,5)} \right) f_{1,N}(x, y), & w_1(x, y) > 0; \\ \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2}, & w_1(x, y) = 0; \\ \frac{w(x, y)}{w(x, y) - w_1(x, y)} f_{2,N}(x, y) + \\ + \frac{-w_1(x, y)}{w(x, y) - w_1(x, y)} Of_2(x, y), & w_1(x, y) < 0. \end{cases}$$

3. Формули для функцій, використаних для побудови сплайна:

$$f_{1,N}(x, y) = f_1 \left( x - w_1(x, y) \frac{dw_1(x, y)}{dx}, y - w_1(x, y) \frac{dw_1(x, y)}{dy} \right),$$

$$f_{2,N}(x, y) = f_2 \left( x - w_1(x, y) \frac{dw_1(x, y)}{dx}, y - w_1(x, y) \frac{dw_1(x, y)}{dy} \right),$$

$$w(x, y) = x(1-x)y(1-y),$$

$$O_1 f_2(x, y) = \frac{x-1}{0-1} f_2(0, y) + \frac{x-0}{1-0} f_2(1, y),$$

$$O_2 f_2(x, y) = \frac{y-1}{0-1} f_2(x, 0) + \frac{y-0}{1-0} f_2(x, 1),$$

$$O_1 O_2 f_2(x, y) = \frac{x-1}{0-1} O_2 f_2(0, y) + \frac{x-0}{1-0} O_2 f_2(1, y),$$

$$Of_2(x, y) = O_1 f_2(x, y) + O_2 f_2(x, y) - O_1 O_2 f_2(x, y).$$

4. Знаходимо функцію  $\varphi(x, y)$  за формулою (2.1).

5. Застосування методу О. М. Литвина [5] для знаходження коефіцієнтів Фур'є з використанням проєкцій для функції  $\varphi(x, y)$ . Вважаються відомими відповідні проєкційні дані. Отримаємо функцію  $\tilde{\varphi}(x, y)$ .

6. Наближене відновлення функції  $f(x, y)$ :

$$\tilde{f}(x, y) = Sp(x, y) + \tilde{\varphi}(x, y).$$

Приклад 2. Наближене відновлення розривної функції  $f(x, y)$ , яка має дві лінії розриву, що є концентричними колами.

Задана інформація:  $M$  – кількість ліній розриву,  $M = 2$ ;  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$ ,  $f_3(x, y)$  – задані функції для побудови тестової розривної функції  $f(x, y)$ ; радіуси кіл  $R_1, R_2$ , їх центр  $(0,5; 0,5)$ ; проєкційні дані для функції  $f(x, y)$ .

Розв'язання задачі виконується так:

1. Побудова функції  $f(x, y)$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & \text{якщо } 0 \leq w_1(x, y) < R_1; \\ \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2}, & \text{якщо } w_1(x, y) = R_1; \\ f_2(x, y), & \text{якщо } R_1 \leq w_1(x, y) < R_2; \\ \frac{f_2(x, y) + f_3(x, y)}{2}, & \text{якщо } w_1(x, y) = R_2; \\ f_3(x, y), & \text{якщо } w_1(x, y) > R_2, \end{cases}$$

$$w_1(x, y) = \sqrt{(x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2}.$$

2. Побудова сплайна  $Sp(x, y)$ :

$$s_1(x, y) = \frac{R_1 - w_1(x, y)}{R_1} \times f_1(0,5, 0,5) + \frac{w_1(x, y)}{R_1} \times f_{1,N}(x, y),$$

якщо  $0 < w_1(x, y) < R_1$ ;

$$Sp(x, y) = \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2},$$

якщо  $w_1(x, y) = R_1$ ;

$$Sp(x, y) = \frac{w_1(x, y) - R_2}{R_1 - R_2} \times f_{21,N}(x, y) + \frac{w_1(x, y) - R_1}{R_2 - R_1} \times f_{22,N}(x, y),$$

якщо  $R_1 < w_1(x, y) < R_2$ ;

$$Sp(x, y) = \frac{f_2(x, y) + f_3(x, y)}{2},$$

якщо  $w_1(x, y) = R_2$ ;

$$Sp(x, y) = \frac{\Omega(x, y) \times f_{3,N}(x, y) + Of_3(x, y) \times (w_1(x, y) - R_2)}{\Omega(x, y) + (w_1(x, y) - R_2)},$$

якщо  $w_1(x, y) > R_2$ ;

$$\Omega(x, y) = x(1-x)y(1-y).$$

3. Формули для функцій, використаних для побудови сплайна:

$$f_{1,N}(x,y) = f_1 \left( x - (w_1(x,y) - R_1) \frac{dw_1(x,y)}{dx}, y - (w_1(x,y) - R_1) \frac{dw_1(x,y)}{dy} \right),$$

$$f_{21,N}(x,y) = f_2 \left( x - (w_1(x,y) - R_1) \frac{dw_1(x,y)}{dx}, y - (w_1(x,y) - R_1) \frac{dw_1(x,y)}{dy} \right),$$

$$f_{22,N}(x,y) = f_2 \left( x - (w_1(x,y) - R_2) \frac{dw_1(x,y)}{dx}, y - (w_1(x,y) - R_2) \frac{dw_1(x,y)}{dy} \right),$$

$$f_{3,N}(x,y) = f_3 \left( x - (w_1(x,y) - R_2) \frac{dw_1(x,y)}{dx}, y - (w_1(x,y) - R_2) \frac{dw_1(x,y)}{dy} \right),$$

$$O_1 f_3(x,y) = \frac{x-1}{0-1} f_3(0,y) + \frac{x-0}{1-0} f_3(1,y),$$

$$O_2 f_3(x,y) = \frac{y-1}{0-1} f_3(x,0) + \frac{y-0}{1-0} f_3(x,1),$$

$$O_1 O_2 f_3(x,y) = \frac{x-1}{0-1} O_2 f_3(0,y) + \frac{x-0}{1-0} O_2 f_3(1,y),$$

$$O f_3(x,y) = O_1 f_3(x,y) + O_2 f_3(x,y) - O_1 O_2 f_3(x,y).$$

Далі пункти 4), 5), 6) аналогічні наведеним у прикладі 1.

Приклад 3. Наближене відновлення розривної функції  $f(x,y)$ , яка має одну лінію розриву, що є еліпсом.

Задана інформація:  $M$  – кількість ліній розриву,  $M=1$ ;  $f_1(x,y)$ ,  $f_2(x,y)$  – задані функції для побудови тестової розривної функції  $f(x,y)$ ; параметри  $a$  та  $b$ ; проєкційні дані для функції  $f(x,y)$ .

Розв'язання задачі виконується так:

1. Побудова функції  $f(x,y)$ :

$$f(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y), & \text{якщо } w_1(x,y) > 0; \\ \frac{f_1(x,y) + f_2(x,y)}{2}, & \text{якщо } w_1(x,y) = 0; \\ f_2(x,y), & \text{якщо } w_1(x,y) < 0, \end{cases}$$

$$w_1(x, y) = R_1 - \sqrt{\frac{(x-0,5)^2}{a^2} + \frac{(y-0,5)^2}{b^2}}.$$

2. Побудова сплайна  $Sp(x, y)$ :

$$Sp(x, y) = \begin{cases} \frac{w_1(x, y)}{R_1} f_1(0,5;0,5) + \\ + \left(1 - \frac{w_1(x, y)}{w_1(0,5, 0,5)}\right) f_{1,N}(x, y), & w_1(x, y) > 0; \\ \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2}, & w_1(x, y) = 0; \\ \frac{w(x, y)}{w(x, y) - w_1(x, y)} f_{2,N}(x, y) + \\ + \frac{-w_1(x, y)}{w(x, y) - w_1(x, y)} Of_2(x, y), & w_1(x, y) < 0. \end{cases}$$

Далі пункти 3), 4), 5), 6) аналогічні наведеним у прикладі 1, окрім

$$f_{1,N}(x, y) = f_1\left(x - w_1(x, y)\frac{x-0,5}{a}, y - w_1(x, y)\frac{y-0,5}{b}\right),$$

$$f_{2,N}(x, y) = f_2\left(x - w_1(x, y)\frac{x-0,5}{a}, y - w_1(x, y)\frac{y-0,5}{b}\right).$$

Приклад 4. Наближене відновлення розривної функції  $f(x, y)$ , яка має дві лінії розриву, що є еліпсами з одним центром.

Задана інформація:  $M$  – кількість ліній розриву,  $M=2$ ;  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$ ,  $f_3(x, y)$  – задані функції для побудови тестової розривної функції  $f(x, y)$ ; параметри  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  та  $b_2$ ; проєкційні дані для функції  $f(x, y)$ .

Розв'язання задачі виконується так:

1. Побудова функції  $f(x, y)$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & \text{якщо } w_1(x, y) \geq 0; \\ \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2}, & \text{якщо } w_1(x, y) = 0; \\ f_2(x, y), & \text{якщо } w_1(x, y) < 0 \wedge w_2(x, y) \geq 0; \\ \frac{f_2(x, y) + f_3(x, y)}{2}, & \text{якщо } w_2(x, y) = 0; \\ f_3(x, y), & \text{якщо } w_2(x, y) < 0, \end{cases}$$

$$w_1(x, y) = 1 - \sqrt{\frac{(x - 0,5)^2}{a_1} + \frac{(y - 0,5)^2}{b_1}},$$

$$w_2(x, y) = 1 - \sqrt{\frac{(x - 0,5)^2}{a_2} + \frac{(y - 0,5)^2}{b_2}}.$$

2. Побудова сплайна  $Sp(x, y)$ :

$$Sp(x, y) = \frac{w_1(x, y)}{w_1(0,5, 0,5)} \times f_1(0,5, 0,5) + \left(1 - \frac{w_1(x, y)}{w_1(0,5, 0,5)}\right) \times f_{1,N}(x, y),$$

якщо  $w_1(x, y) \geq 0$ ;

$$Sp(x, y) = \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2},$$

якщо  $w_1(x, y) = 0$ ;

$$Sp(x, y) = \frac{-w_2(x, y)}{w_1(x, y) - w_2(x, y)} \times f_{21,N}(x, y) + \frac{w_1(x, y)}{w_1(x, y) - w_2(x, y)} \times f_{22,N}(x, y),$$

якщо  $w_1(x, y) < 0 \wedge w_2(x, y) \geq 0$ ;

$$Sp(x, y) = \frac{f_2(x, y) + f_3(x, y)}{2},$$

якщо  $w_2(x, y) = 0$ ;

$$Sp(x, y) = \frac{\Omega(x, y) \times f_{3,N}(x, y) - Of_3(x, y) \times w_2(x, y)}{\Omega(x, y) - w_2(x, y)},$$

якщо  $w_2(x, y) < 0$ ;

$$\Omega(x, y) = x(1-x)y(1-y).$$

Далі пункти 3), 4), 5), 6) аналогічні наведеним у прикладі 2, окрім

$$f_{1,N}(x, y) = f_1\left(x - w_1(x, y)\frac{x-0,5}{a_1}, y - w_1(x, y)\frac{y-0,5}{b_1}\right),$$

$$f_{21,N}(x, y) = f_2\left(x - w_1(x, y)\frac{x-0,5}{a_1}, y - w_1(x, y)\frac{y-0,5}{b_1}\right),$$

$$f_{22,N}(x, y) = f_2\left(x - w_2(x, y)\frac{x-0,5}{a_2}, y - w_2(x, y)\frac{y-0,5}{b_2}\right),$$

$$f_{3,N}(x, y) = f_3\left(x - w_2(x, y)\frac{x-0,5}{a_2}, y - w_2(x, y)\frac{y-0,5}{b_2}\right).$$



## 2.3 Деякі додаткові теоретичні відомості

### 2.3.1 Деякі відомості з теорії кратних рядів Фур'є

Розглянемо довільну функцію  $f(x)$  з періодом  $2\pi$ , абсолютно інтегруємо в будь-якому скінченному проміжку і зв'язаний з нею ряд Фур'є [8]:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx.$$

Його коефіцієнти визначаються формулами

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos mu \, du, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin mu \, du.$$

Якщо тепер замінити  $\cos mx$  та  $\sin mx$  їх виразами через показникову функцію від чисто уявного аргументу [8]:

$$\begin{aligned} \cos mx &= \frac{1}{2} (e^{mxi} + e^{-mxi}), \\ \sin mx &= \frac{1}{2i} (e^{mxi} - e^{-mxi}) = \frac{i}{2} (e^{-mxi} - e^{mxi}), \end{aligned}$$

то отримаємо ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_m - b_m i) e^{mxi} + \frac{1}{2} (a_m + b_m i) e^{-mxi}.$$

Його можливо записати більш коротше таким чином:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{kxi},$$

вважаючи, що

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_m = \frac{1}{2}(a_m - b_m i), \quad c_{-m} = \frac{1}{2}(a_m + b_m i), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

так, що

$$c_{-m} = \overline{c_m}.$$

Це і є комплексна форма ряду Фур'є функції  $f(x)$  [8].

Нехай, функція  $f(x, y)$  задана в прямокутнику  $-l_1 \leq x \leq l_1$ ,  $-l_2 \leq y \leq l_2$  та при кожному  $y \in [-l_1, l_2]$  її можливо розкласти в тригонометричний ряд Фур'є (ТРФ) [9], як функції  $x$  на відрізку  $[-l_1, l_2]$ . Тоді отримаємо

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(y) e^{i \frac{n\pi x}{l_1}}, \quad (2.2)$$

де

$$c_n(y) = \frac{1}{2l_1} \int_{-l_1}^{l_1} f(\xi, y) e^{i \frac{n\pi \xi}{l_1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.3)$$

Нехай, кожен із функцій  $c_n(y)$  можливо розкласти на відрізку  $-l_1 \leq x \leq l_2$  в ТРФ, тобто

$$c_n(y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn} e^{i \frac{m\pi y}{l_2}}, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.4)$$

де

$$c_{nm}(y) = \frac{1}{2l_2 - l_1} \int_{-l_1}^{l_1} c_n(\eta) e^{-i \frac{m\pi y}{l_2}} d\eta, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.5)$$

Тоді, підставляючи (2.3) в (2.5) та (2.4) в (2.2), отримаємо

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn} e^{i \left( \frac{n\pi x}{l_1} + \frac{m\pi y}{l_2} \right)}, \quad (2.6)$$

де

$$c_{mn} = \frac{1}{4l_1 l_2} \int_{-l_1}^{l_1} \int_{-l_2}^{l_2} f(\xi, \eta) e^{-i \left( \frac{n\pi \xi}{l_1} + \frac{m\pi \eta}{l_2} \right)} d\xi d\eta.$$

Таким чином, ми отримали розкладання функції двох змінних в ТРФ у комплексній формі [9].

### 2.3.2 Математична модель відновлення функцій методом скінченних сум Фур'є

Задано проєкційні данні за допомогою криволінійного інтеграла:

$$\int_{L_k} f(x, y) dl = \gamma_k, \quad k = \overline{1, N},$$

$$L_k : x \cos \phi_k + y \sin \phi_k - s_k = 0,$$

де  $\gamma_k$  – задані числа [10].

Потрібно: відновити функцію  $f(x, y)$ .

У даній роботі функція  $f(x, y)$  відшукується у вигляді скінченної суми Фур'є:

$$f(x, y) \approx S_{N,N}(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N F_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)},$$

де коефіцієнти Фур'є подаються у вигляді:

$$F_{k,l} = \iint_D f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy. \quad (2.6)$$

Коефіцієнти Фур'є будуть знаходитися наближено за допомогою проєкційних даних Радона. Відзначимо, що коефіцієнти  $k, l$  в розв'язку відповідають параметрам  $\phi$  і  $s$  у перетворенні Радона.

Ідея отримання значень для коефіцієнтів Фур'є в зведенні кратного інтеграла до повторного. Отриманий внутрішній інтеграл можна інтерпретувати як проєкцію невідомої функції двох змінних вздовж деякого напрямку. На практиці саме уздовж цього напрямку потрібно провести сканування комп'ютерним томографом [10].

У подвійному інтегралі (2.6) проводиться заміна вигляду:

$$kx + ly = t, \quad -lx + ky = v.$$

Залежно від взаємного розташування на числовій осі значень  $k$  та  $l$  область інтегрування розіб'ється на 3 різних підобласті.

Ілюструємо на прикладі  $l > k > 0$ . Область в площині  $(x, y)$  визначається наступним чином:

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq \frac{k - kx}{l} \right\}, \\ D_2 &= \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1; \frac{k - kx}{l} \leq y \leq \frac{l - kx}{l} \right\}, \\ D_3 &= \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1; \frac{l - kx}{l} \leq y \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Подвійний інтеграл по першій підобласті зведеться до виразу виду:

$$I_1 = \iint_{D_1} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy = \frac{l}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi zl} F_1(zl) dz,$$

де  $F_1$  – проєкція невідомої функції  $f(x, y)$ .

Відповідно

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_1} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy = \iint_{\tilde{D}_1} f\left(\frac{kt - lv}{k^2 + l^2}, \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}\right) e^{-i2\pi t} |J| dt dv = \\ &= \int_0^l \frac{e^{-i2\pi t} dt}{k^2 + l^2} \int_{\frac{lt}{k}}^{\frac{kt}{l}} f\left(\frac{kt - lv}{k^2 + l^2}, \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}\right) dv = \left| \begin{aligned} &\int_{\frac{lt}{k}}^{\frac{kt}{l}} f\left(\frac{kt - lv}{k^2 + l^2}, \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}\right) dv = \\ &= F_1(k, l, t) = F_1(t) \\ &t = zl; dt = ldz; \\ &t = 0 \Rightarrow z = 0; t = 1 \Rightarrow z = 1 \end{aligned} \right| = \\ &= l \int_0^1 \frac{F_1(zl) e^{-i2\pi zl} dz}{k^2 + l^2} = \frac{l}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi zl} F_1(zl) dz. \end{aligned}$$

Далі обчислимо інтеграл

$$\int_{z_q}^{z_{q+1}} e^{-i2\pi zl} dz = \frac{1}{-i2\pi l} e^{-i2\pi zl} \Big|_{z_q}^{z_{q+1}} = -\frac{1}{i2\pi l} \left( e^{-i2\pi z_{q+1}l} - e^{-i2\pi z_q l} \right) = \left| \begin{matrix} z_q = \frac{q}{M} \\ z_{q+1} = \frac{q+1}{M} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{i2\pi l} \left( e^{-i2\pi \frac{q+1}{M} l} - e^{-i2\pi \frac{q}{M} l} \right) = -\frac{1}{i2\pi l} e^{-i2\pi \frac{q}{M} l} \left( e^{-i2\pi \frac{1}{M} l} - 1 \right) = \frac{e^{-i2\pi \frac{1}{M} l} - 1}{-i2\pi l} \cdot e^{-i2\pi \frac{q}{M} l}.$$

Таким чином,

$$I_1 = \frac{l}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi \frac{1}{M} l} - 1}{-i2\pi l} \cdot \sum_{q=0}^{M-1} F_1 \left( k, l, l \cdot \frac{q+0.5}{M} \right) \cdot e^{-i2\pi \frac{q}{M} l}.$$

Отже, в такому вигляді представляються формули для обчислення інтегралів при програмній реалізації в Mathcad. Аналогічно підраховуються інші інтеграли [10].

### 2.3.3 Інтерлінація функцій

В теорії наближення функцій двох і більше змінних  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $n \geq 2$ , в останні десятиліття інтенсивно розвивається розділ, присвячений побудові, дослідженню і деяким застосуванням операторів, які відновлюють (можливо, наближено) функції  $f(x)$  за відомими їх слідами та слідами їх частинних похідних до фіксованого порядку  $N$  на  $M$  ( $M > 1$ )  $m$ -вимірних ( $0 \leq m \leq n$ ) поверхнях в  $R_n$ . У випадку  $m=1$ ,  $n \geq 2$  інформація про функцію  $f(x)$  задається її слідами та слідами її нормальних похідних

$\frac{\partial^{|s|} f(x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}, |s| = s_1 + \dots + s_n, 1 \leq |s| \leq N$ , на  $M$  лініях і такі оператори називають операторами інтерлінації [10, 11].

Тобто інтерлінацією функції  $f(x, y)$  називається відновлення функції  $f(x, y)$  у точках між лініями  $\Gamma_k : w_k(x, y) = 0, k = \overline{1, m}$ , за допомогою її слідів на цих лініях [11].

Розглянемо оператори поліноміальної інтерлінації на системі взаємно перпендикулярних прямих.

Нехай  $\Gamma_{1i_1}, i_1 = \overline{1, M_1}$ , та  $\Gamma_{2i_2}, i_2 = \overline{1, M_2}$ , – дві системи взаємно перпендикулярних прямих, які вважаємо паралельними осям координат  $Ox$  та  $Oy$ :  $\Gamma_{1i_1} : x = x_{i_1}, i_1 = \overline{1, M_1}$ ,  $\Gamma_{2i_2} : y = y_{i_2}, i_2 = \overline{1, M_2}$  [12].

Нехай  $\varphi_{i_1, s_1}(y), s_1 = \overline{0, N}$ , та  $\psi_{i_2, s_2}(x), s_2 = \overline{0, N}$ , – дві системи функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної ( $x$  або  $y$ );  $h_{1i_1, s_1}(x) = h_{1, M_1, i_1, s_1}(x)$ ,  $h_{1i_2, s_2}(y) = h_{1, M_1, i_1, s_1}(y)$  – фундаментальні поліноми Ерміта, тобто поліноми від змінних  $x, y$  степенів  $M_1(N+1)-1, M_2(N+1)-1$  відповідно із такими властивостями:

$$h_{1i_1, s_1}^{(p_1)}(x_{i_1}) = \delta_{i_1, j_1} \delta_{s_1, p_1}, i_1, j_1 = \overline{1, M_1}, s_1, p_1 = \overline{0, N},$$

$$h_{2i_2, s_2}^{(p_2)}(y_{i_2}) = \delta_{i_2, j_2} \delta_{s_2, p_2}, i_2, j_2 = \overline{1, M_2}, s_2, p_2 = \overline{0, N}.$$

Теорема [13]. Якщо функції  $\varphi_{i_1, s_1} \in C^{r-s_1}(R), \psi_{i_2, s_2} \in C^{r-s_2}(R), r \geq 2N$  задовольняють у точках перетину прямих  $\Gamma_{1i_1}$  та  $\Gamma_{2i_2}$  умови  $\Upsilon_i^{N, N}, i = (i_1, i_2)$ ,

$$s = (s_1, s_2), \quad i_1 = \overline{1, M_1}, \quad i_2 = \overline{1, M_2}, \quad s_k = \overline{0, N}, \quad k = 1, 2$$

$$\varphi_{i_1, s_1}^{(s_2)}(y_{i_2}) = \psi_{i_2, s_2}^{(s_1)}(x_{i_1}) = f_{i, s}, \text{ то оператор } (M = (M_1, M_2))$$

$$E_{MN}(x, y) = \sum_{i_1=1}^{M_1} \sum_{s_1=0}^N h_{1,i_1,s_1}(y) + \sum_{i_2=1}^{M_2} \sum_{s_2=0}^N h_{2,i_2,s_2}(y) \psi_{i_2,s_2}(x) - \\ - \sum_{i_1=1}^{M_1} \sum_{i_2=1}^{M_2} \sum_{s_2=0}^N f_{i,s} h_{1,i_1,s_1}(x) h_{2,i_2,s_2}(y)$$

має такі властивості:

$$E_{MN}(x, y) = E_{MN}(\{\varphi_{1,i_1,s_1}; \varphi_{1,i_1,s_1}\}; x; y) \in C^{r-N}(R^2),$$

$$\left. \frac{\partial^{q_1} f}{\partial x^{q_1}} \right|_{x=x_{i_1}} = \varphi_{i_1,q_1}(y), \quad 0 \leq q_1 \leq N, \quad 1 \leq i_1 \leq M_1,$$

$$\left. \frac{\partial^{q_2} f}{\partial x^{q_2}} \right|_{y=y_{i_2}} = \psi_{i_2,q_2}(x), \quad 0 \leq q_2 \leq N, \quad 1 \leq i_2 \leq M_2.$$

При цьому, якщо  $f(x, y) \in C^r(R^2)$ ,  $r \geq 2N + 2$  – довільна функція, для

$$\text{якої } \left. \frac{\partial^{q_1} f}{\partial x^{q_1}} \right|_{x=x_{i_1}} = \varphi_{i_1,q_1}(y), \quad \left. \frac{\partial^{q_2} f}{\partial x^{q_2}} \right|_{y=y_{i_2}} = \psi_{i_2,q_2}(x), \quad 0 \leq q_1, q_2 \leq N, \quad 1 \leq i_1 \leq M_1,$$

$1 \leq i_2 \leq M_2$ , то  $E_{MN}(\{\varphi_{1,i_1,s_1}; \varphi_{1,i_1,s_1}\}; x; y) = E_{MN} f(x, y)$  і для залишку

$R_{MN} f(x, y) = (I - E_{MN}) f(x, y)$  справедливе інтегральне зображення

$(\xi = (\xi_1, \xi_2))$ :

$$R_{MN} f(x, y) = \sum_{i_1=1}^{M_1} \sum_{i_2=1}^{M_2} \sum_{s_1=0}^N \sum_{s_2=0}^N h_{1,i_1,s_1}(x) h_{2,i_2,s_2}(y) \times \\ \times \int_{x_{i_1}}^x \int_{y_{i_2}}^y f^{(p)}(\xi) \frac{(x_{i_1} - \xi_1)^{p_1-s_1-1} (y_{i_2} - \xi_2)^{p_2-s_2-1}}{(p_1-s_1-1)! (p_2-s_2-1)!} d\xi_1 d\xi_2,$$

$$\forall p = (p_1, p_2): N+1 \leq p_1 \leq M_1(N+1), N+1 \leq p_2 \leq M_2(N+1),$$



$$f^{(p)}(\xi) = f^{(p_1, p_2)}(\xi_1, \xi_2),$$

$$R_{MN} f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(p)}(\xi) G_{1, M_1, N, p_1}(x, \xi_1) G_{2, M_2, N, p_2}(x, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$G_{1, M_1, N, p_1}(x, \xi_1) = \sum_{i_1=0}^{M_1} \sum_{s_1=0}^N h_{1, i_1, s_1}(x) \frac{(x_{i_1} - \xi_1)^{p_1 - s_1 - 1}}{(p_1 - s_1 - 1)!} \chi(x_{i_1}, x; \xi_1),$$

$$G_{2, M_2, N, p_2}(y, \xi_2) = \sum_{i_2=0}^{M_2} \sum_{s_2=0}^N h_{2, i_2, s_2}(y) \frac{(y_{i_2} - \xi_2)^{p_2 - s_2 - 1}}{(p_2 - s_2 - 1)!} \chi(x_{i_2}, x; \xi_2),$$

$$\chi(a, b; t) = \begin{cases} 0, & t \notin [a, b], \\ 1, & a \leq t \leq b, \\ -1, & b \leq t < a. \end{cases}$$

### 2.3.4 Явище Гіббса

Феномен Гіббса, як ми його бачимо, вирішує проблему відновлення точкових значень функції з коефіцієнтів її розширення [14].

Проблему можна сформулювати таким чином:

Маючи  $2N + 1$  коефіцієнтів Фур'є функції  $\hat{f}_k$ , для  $-N \leq k \leq N$  невідомої функції  $f(x)$  визначеної скрізь на проміжку  $-1 \leq x \leq 1$ , побудувати точкові значення функції.

Прямий метод полягає в побудові класичної суми Фур'є:

$$f_N(x) = \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k e^{ik\pi x}.$$

Це дуже хороший спосіб відновлення точкових значень  $f(x)$  за умови, що  $f(x)$  є гладкою і періодичною. Насправді, якщо  $f(x)$  аналітична і періодична, відомо, що ряд Фур'є сходиться експоненціально швидко:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - f_N(x)| \leq e^{-\alpha N}, \alpha > 0.$$

Однак якщо  $f(x)$  є переривчастою або неперіодичною, то  $f_N(x)$  не є хорошим наближенням до  $f(x)$ . Само собою зрозуміло, що якість збіжності погана. Можна відзначити дві особливості апроксимації:

– далеко від розриву збіжність досить повільна. Якщо  $x_0$  – нерухома точка в  $(-1, 1)$ ,

$$|f(x_0) - f_N(x_0)| \sim O\left(\frac{1}{N}\right);$$

– поблизу границі існує проскакування, яке не зменшується зі збільшенням  $N$ ; таким чином

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - f_N(x)|$$

не прямує до нуля.

Неможливість відновити точкові значення неперіодичної, але в іншому випадку ідеально гладкої функції по її коефіцієнтам Фур'є – це феномен Гіббса.

Феномен Гіббса, мабуть, має на увазі, що за своєю природою неможливо отримати точну локальну інформацію (значення точок) зі знання глобальних властивостей (коефіцієнтів Фур'є) для кусково-гладких функцій [14].

Невеликий висновок: багато фізичних явищ представлені кусково-гладкими функціями. Наприклад, багато проблем в аеронавтиці і космонавтиці пов'язані з потоками рідини, що містять ударні хвилі, а саме, розриви в полі тиску. При чисельному прогнозуванні погоди необхідно враховувати поверхню Землі, яка має великі градієнти в регіонах, що містять гори. Явище Гіббса включає методи, засновані на глобальних наближеннях для таких завдань.

Інший приклад – стиснення даних. Дуже важливо мати гарне уявлення даних, щоб вирішити, як їх стиснути, а саме, яку інформацію зберегти. Важливо знати, чи підходить Фур'є-представлення даних для негладких сигналів.

У наданні інформації про функції є два етапи: зберігання і витяг. Гарним засобом зберігання інформації про функції є зберігання її коефіцієнтів. Однак в разі переривання функції слід використовувати більш чутливі методи для вилучення цієї інформації, а не наївно підсумовувати розкладання [14].

Таким чином, при чисельному моделюванні задач, пов'язаних з ударними хвилями, має сенс точно обчислити коефіцієнти Фур'є функції тиску, хоча і не отримувати її точкові значення шляхом підсумовування прямих рядів Фур'є. Для стиснення даних також доцільно зберігати коефіцієнти розкладання функції, навіть якщо вона є гладкою тільки по частинам.

Ми представили явище Гіббса в разі апроксимації Фур'є аналітичної, але неперіодичної функції. Однак існує набагато більше ситуацій в яких проявляється це явище. Далі ми викладемо ряд проблем, що відносяться до явища Гіббса [14].

Проблема 1. Маючи  $2N+1$  коефіцієнтів Фур'є функції  $\hat{f}_k$ , для  $-N \leq k \leq N$  аналітичної, але неперіодичної функції  $f(x)$  визначеної скрізь на проміжку  $-1 \leq x \leq 1$ , побудувати точкові значення функції.

У проблемі 1 передбачається, що функція аналітична, але неперіодична. Це еквівалентно припущенню, що ми маємо справу з функціями, де місце розташування розриву відомо. Відзначимо, що місце розташування розриву може бути отримано з його коефіцієнтів Фур'є; проте логічніше припустити, що підінтервал  $[a, b] \subset [-1, 1]$  не має розривів. Це приводить нас до проблеми 2 [14].

Проблема 2. Маючи  $2N+1$  коефіцієнтів Фур'є функції  $\hat{f}_k$ , для  $-N \leq k \leq N$  кусково-аналітичної функції  $f(x)$  визначеної скрізь на проміжку  $-1 \leq x \leq 1$ , побудувати точкові значення функції в будь-якому підінтервалі, що не включає точку розриву.

Явище Гіббса не обмежується розширеннями Фур'є. Насправді багато до-

слідників відзначали це явище в багатьох різних розкладаннях власних функцій. Звичайні розкладання включають розкладання, засновані на поліномах Чебишева і Лежандра. Ці поліноми є окремими випадками поліномів Гегенбауера.

У загальному випадку, при завданні коефіцієнтів розкладання Гегенбауера кусково-аналітичної функції можливо зіткнутися з тими ж проблемами збіжності [14].

Проблема 3. Розглянемо кусково-аналітичну функцію  $f(x)$ , позначену на  $[-1, 1]$ . Припустимо, що дані перші  $0 \leq k \leq N$  коефіцієнтів розкладання за поліномами Гегенбауера  $C_k^\mu(x)$  з ваговою функцією  $(1-x^2)^{\mu-\frac{1}{2}}$  для будь-якої постійної  $\mu \geq 0$  на всьому інтервалі  $[-1, 1]$ :

$$\hat{f}_k^\mu = \frac{1}{h_k^\mu} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\mu-\frac{1}{2}} C_k^\mu(x) f(x) dx, \quad 0 \leq k \leq N.$$

Потрібно побудувати точкові значення  $f(x)$  з експоненціальною точністю у всіх точках (включаючи самі розриви). Експоненціальна точність означає, що помилка убиває як  $e^{-\alpha N}$  при деякому  $\alpha > 0$ .

Найчастіше такі інтеграли оцінюються квадратурними формулами, що призводять до псевдоспектральних методів. У цьому контексті актуальними наступні дві проблеми [14].

Проблема 4. Нехай  $f(x)$  – невідома аналітична та неперіодична функція в області  $-1 \leq x \leq 1$ . Нехай  $f\left(\frac{k}{N}\right)$ ,  $-N \leq k \leq N-1$  відома. Треба побудувати з експоненціальною точністю точкові значення функції.

Побудова тригонометричного полінома не підходить через явище Гіббса. Тому засобом вирішення проблеми буде побудова наближення Фур'є, а потім розглядати його як окремий випадок проблеми 1 [14].

Проблема 5. Нехай  $f(x)$  – (невідома) кусково-аналітична функція в  $-1 \leq x \leq 1$  та  $f\left(\frac{k}{N}\right)$ ,  $-N \leq k \leq N-1$  відомі. Потрібно побудувати з експоненціальною точністю точкові значення функції.

Поліноміальні інтерполяції гладких функцій сходяться, якщо точки колокації пов'язані з нулями ортогональних поліномів. Знову ж, явище Гіббса має місце в разі кусково-гладких функцій. Тому ми ставимо наступне завдання [14].

Проблема 6. Припустимо, що значення точок  $f(x_i)$ , де  $x_i$  – точки Гаусса або точки Гаусса-Лобатто ортогонального базису  $\{\varphi_k(x)\}$ , розривної, але кусково-аналітичної функції  $f(x)$ . Потрібно відновити експоненціально точно значення точок на будь-якому підінтервалі  $[a, b]$  аналітичності  $f(x)$  [14].

## 3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

### 3.1 Mathcad як система комп'ютерної математики

Mathcad – це унікальна система для наукових та інженерних розрахунків, яка дозволяє спеціалістам в конкретній науково-технічній області дуже швидко освоїти роботу на комп'ютері та реалізовувати математичні моделі, не вдаючись у тонкості програмування на традиційних мовах [15].

Користувачі Mathcad – це вчені, інженери, студенти, різні технічні фахівці, яким доводиться проводити математичні розрахунки. Mathcad має свою власну справочну систему. Електронні книги доступні для використання в робочому документі безліч корисних формул, справочних даних і діаграм простим натисканням кнопок.

Об'єднуючи в одному робочому листі текст, графіки та математичні викладки, Mathcad облегшує розуміння найскладніших розрахунків. Провідні особливості Mathcad включають в себе: можливість комбінування тексту, математичних викладок і графіки в будь-якому місці екрана; вбудований алгоритм рішень систем рівнянь та нерівностей; розв'язок довільних інтегралів; обчислення сум рядів, добутків та ітерації; тригонометричні, гіперболічні та експоненціальні функції; статистичні функції, включаючи лінійну регресію, інтеграл помилок, функції ймовірнісних розподілів; вектори та матриці, включаючи операції матричного множення, звернення, матриць, транспонування, обчислення визначника матриці, скалярне та векторне множення; символічне інтегрування, диференціювання та багато іншого [15].

Mathcad дуже простий у дослідженнях при користуванні, зокрема, через відсутність необхідності спочатку писати програму, що реалізує ті чи інші математичні розрахунки, а потім запускати її на виконання. Замість цього достатньо просто вводити математичні вирази з допомогою вбудованого редактора формул, причому у вигляді, максимально наближеному до загальноприйнятого, і отримувати результат [15].

### 3.2 Алгоритм розв'язання задачі відновлення розривних функцій спеціального вигляду з використанням проєкцій і скінченних сум Фур'є

Крок 1. Задати вхідні дані:

- функції  $f_i(x, y), i = \overline{1, M+1}$ , з допомогою яких побудувати розривну функцію  $f(x, y)$ ;
- число  $N$ , що є порядком скінченної суми Фур'є (2.6);
- число  $NN$ , що задає розбиття відрізків при обчисленні інтегралів.

Крок 2. Вибрати перемикачем  $PR$  відновлення розривної функції  $f(x, y)$  з наявністю або без наявності явища Гіббса.

Кроки алгоритма відновлення розривної функції  $f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса:

Крок 3. Відновити функцію  $f(x, y)$  методом скінченних сум Фур'є та отримати наближений розв'язок  $f_N(x, y)$ .

Крок 4. Порівняти отримані результати для функції  $f(x, y)$  з точним розв'язком.

Кроки алгоритма відновлення розривної функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса:

Крок 3. Побудувати розривний сплайн  $Sp(x, y)$ .

Крок 4. Знайти неперервну функцію  $\varphi(x, y)$  (2.1).

Крок 5. Відновити функцію  $\varphi(x, y)$  методом скінченних сум Фур'є та отримати наближений розв'язок  $\varphi_N(x, y)$ .

Крок 6. Порівняти отримані результати для функції  $\varphi(x, y)$  з точним розв'язком.

Крок 7. Сформувати функцію  $f(x, y) = Sp(x, y) + \varphi_N(x, y)$ .

Крок 8. Порівняти отримані результати для функції  $f(x, y)$  з точним

розв'язком.

### 3.3 Опис програми

У якості вхідних даних до програми виступають тестові задачі у вигляді функцій виду  $f(x, y)$ , що задаються на області  $D$ .

За допомогою перемикача  $PR$  вибирається певна функція із списку тестових задач для відновлення за допомогою методу томографічної реконструкції. Проводиться побудова зображень поверхні та ліній рівня з використанням таблиці значень функції виду  $z = f(x, y)$ . Вибирається число  $N$ , що обмежує верхній та нижні індекси у сумі Фур'є (2.6).

Далі знаходяться коефіцієнти Фур'є з використанням проєкційних даних, задаються інтеграли для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є та будуються матриці коефіцієнтів Фур'є з використанням проєкційних даних з метою обчислити наближені значення коефіцієнтів Фур'є, згідно з формулами типу (2.10). Додатково розраховується наближення без наявності явища Гіббса.

На виході програми проводиться порівняння результатів точних і наближених значень відновлюваної функції та наводиться їх графічна інтерпретація. Інакше кажучи, ми отримуємо напівтонові зображення, лінії рівня, графічне зображення похибок від заміни заданої функції відтвореною функцією.

Для можливості порівняння похибок, вхідні функції нормуються таким чином, щоб вони приймали максимальне значення яке дорівнює 1.

Час роботи програми вимірюється за допомогою лічильника, що фіксує інтервал, за який компілювалася програма.

Точність відновлення оцінюється за допомогою порівняння отриманих результатів з точним значенням функції, шляхом розрахунку похибок. Для порівняння розглядаються максимальна по модулю, середньоквадратична та середня абсолютна похибки [5].



## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

### 4.1 Результати розв'язання задачі

Задача 1. Відновлення розривної функції з однією лінією розриву, що є колом

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & \text{якщо } w_1(x, y) > 0; \\ \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2}, & \text{якщо } w_1(x, y) = 0; \\ f_2(x, y), & \text{якщо } w_1(x, y) < 0, \end{cases}$$

$$f_1(x, y) = k_1 \times e^{-((x-0,5)^2 + (y-0,5)^2)},$$

$$f_2(x, y) = k_2 \times \sin\left(\left((x-0,5)^2 + (y-0,5)^2\right)\right),$$

$$w_1(x, y) = R - \sqrt{(x-0,5)^2 + (y-0,5)^2}$$

при  $k_1 = 10$ ,  $k_2 = 5$  та  $R = 0,25$ .

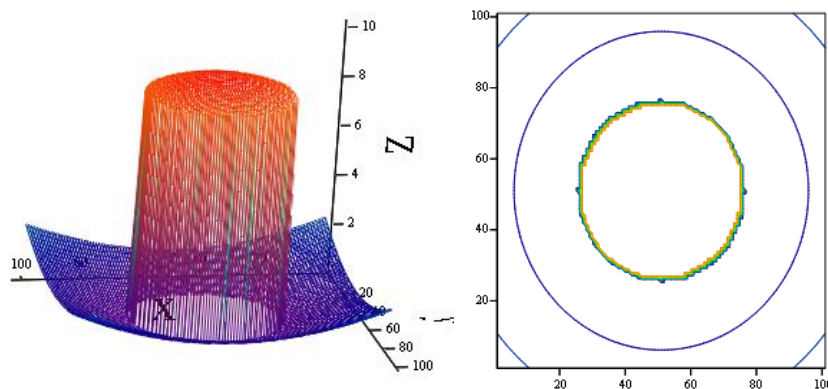


Рисунок 4.1 – Зображення заданої функції та її ліній рівня

Відновлення методом скінченних сум Фур'є (з наявністю явища Гіббса)

Результати обчислень представлені на рисунках 4.2 – 4.5 та у таблиці 4.1.

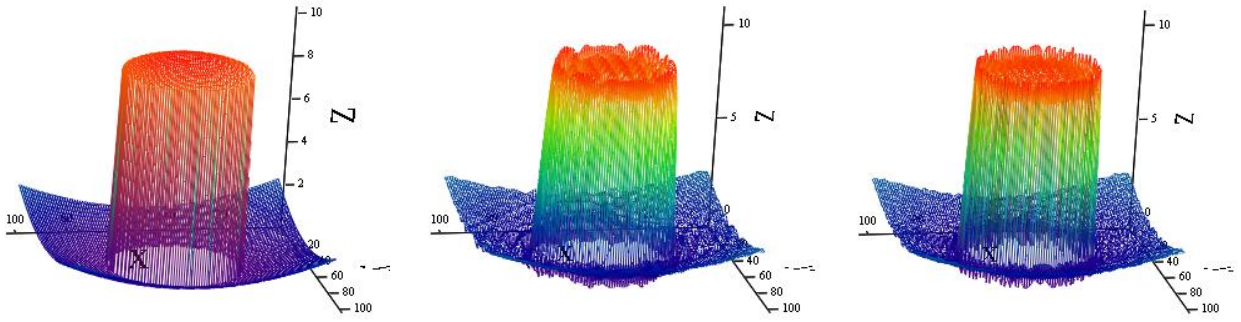


Рисунок 4.2 – Зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

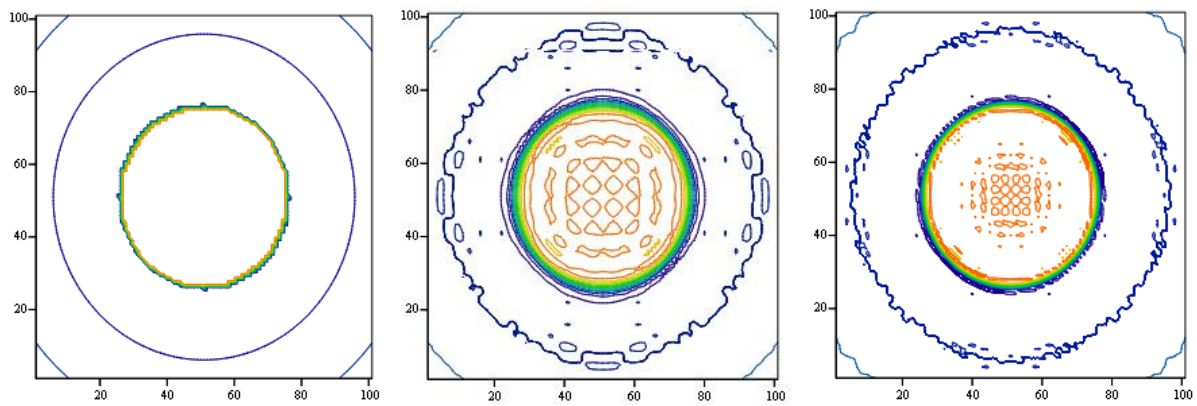


Рисунок 4.3 – Зображення ліній рівня заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

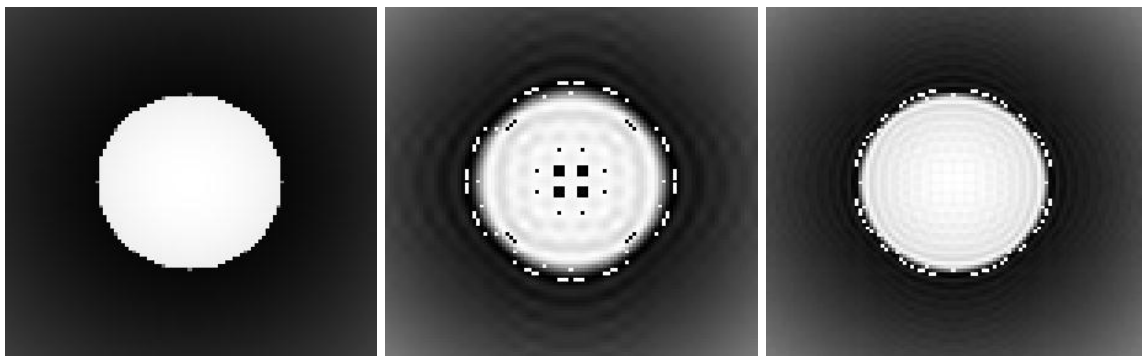


Рисунок 4.4 – Напівтонові зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

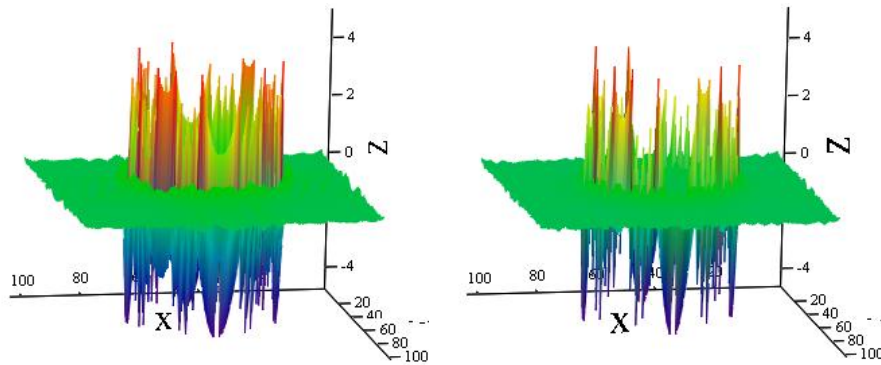


Рисунок 4.5 – Зображення похибок від заміни заданої функції  $f(x, y)$  відтвореною з наявністю явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

Таблиця 4.1 – Порівняння похибок при відтворенні функції  $f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса

| N  | $NN/2^{NN+1}$ | Число доданків у сумі Фур'є | Максимальна відносна  | Середньо-квадратична  | Середня абсолютна     | Час роботи (хв.) |
|----|---------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|
| 16 | 7/256         | 1089                        | $4,72 \times 10^{-1}$ | $5,83 \times 10^{-1}$ | $2,31 \times 10^{-1}$ | 2,29             |
| 32 | 7/256         | 4225                        | $4,78 \times 10^{-1}$ | $4,13 \times 10^{-1}$ | $1,42 \times 10^{-1}$ | 8,80             |
| 32 | 8/512         | 4225                        | $4,79 \times 10^{-1}$ | $4,13 \times 10^{-1}$ | $1,40 \times 10^{-1}$ | 17,40            |

Відновлення з використанням методу скінченних сум Фур'є та сплайна (без наявності явища Гіббса)

Результати обчислень представлені на рисунках 4.6 – 4.9 та у таблиці 4.2.

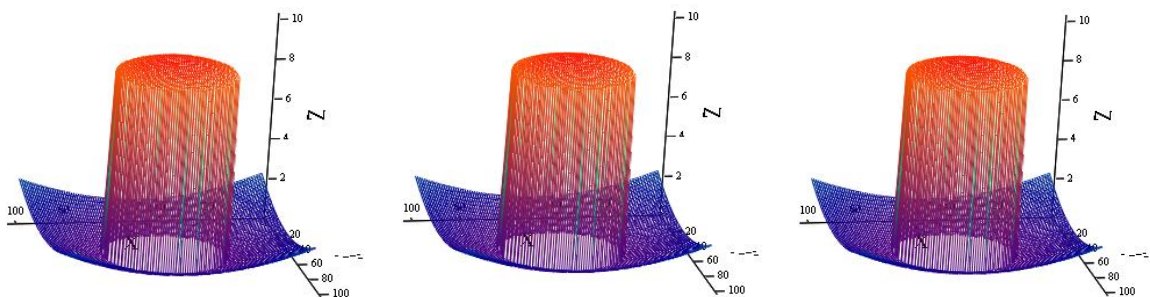


Рисунок 4.6 – Зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

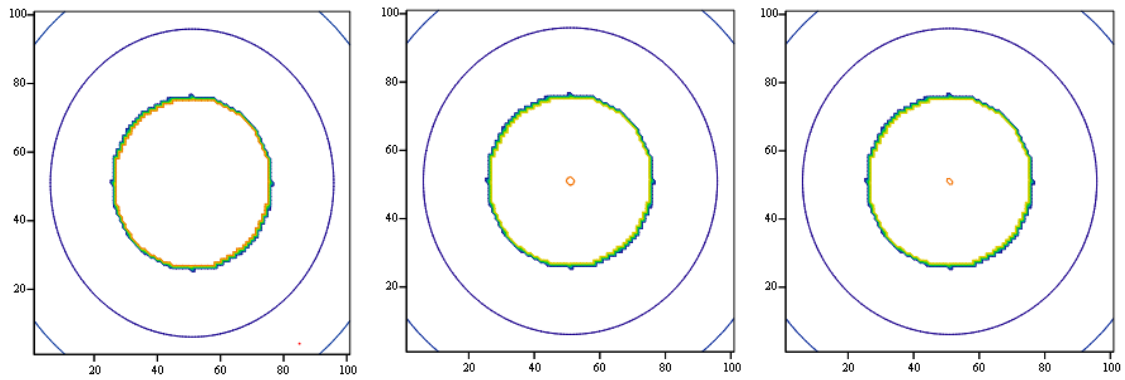


Рисунок 4.7 – Зображення ліній рівня заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

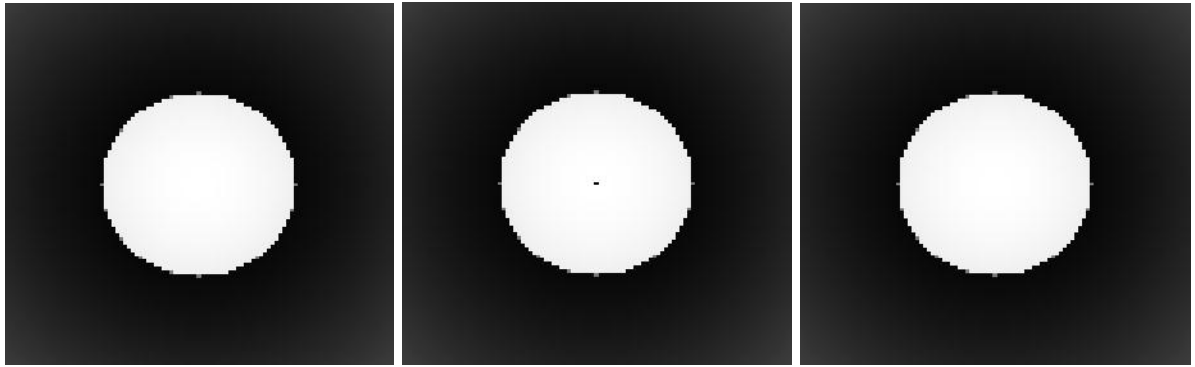


Рисунок 4.8 – Напівтонові зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

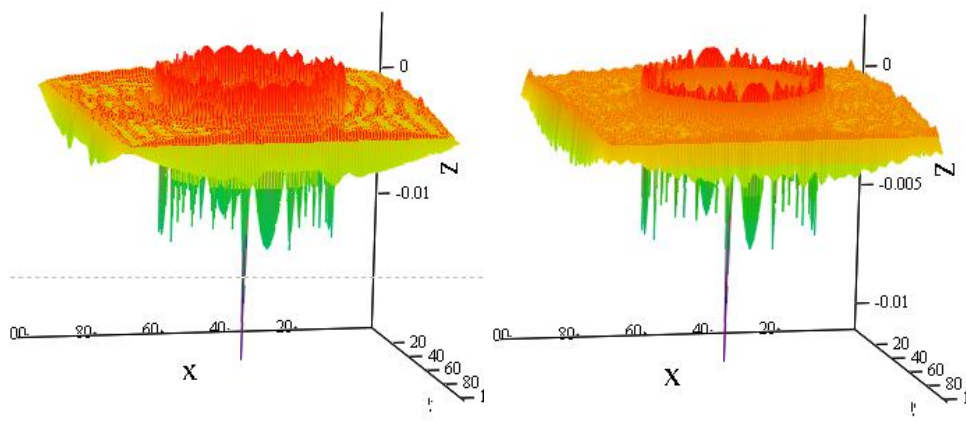


Рисунок 4.9 – Зображення похибок від заміни заданої функції  $f(x, y)$  відтвореною без наявності явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

Таблиця 4.2 – Порівняння похибок при відтворенні функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса

| N  | $NN/2^{NN+1}$ | Число доданків у сумі Фур'є | Максимальна відносна  | Середньо-квадратична  | Середня абсолютна     | Час роботи (хв.) |
|----|---------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|
| 16 | 7/256         | 1089                        | $1,99 \times 10^{-3}$ | $1,23 \times 10^{-3}$ | $6,86 \times 10^{-4}$ | 23,2             |
| 32 | 7/256         | 4225                        | $1,07 \times 10^{-3}$ | $5,35 \times 10^{-4}$ | $2,67 \times 10^{-4}$ | 54,72            |
| 32 | 8/512         | 4225                        | $1,04 \times 10^{-3}$ | $5,31 \times 10^{-4}$ | $2,57 \times 10^{-4}$ | 193              |

Узагальнені результати обчислень для задачі 1 представлені на рисунку 4.10 та у таблиці 4.3.

Таблиця 4.3 – Загальне порівняння похибок при відтворенні функції  $f(x, y)$

| N                          | $NN/2^{NN+1}$ | Число доданків у сумі Фур'є | Максимальна відносна  | Середньо-квадратична  | Середня абсолютна     | Час роботи (хв.) |
|----------------------------|---------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|
| З наявністю явища Гіббса   |               |                             |                       |                       |                       |                  |
| 16                         | 7/256         | 1089                        | $4,72 \times 10^{-1}$ | $5,83 \times 10^{-1}$ | $2,31 \times 10^{-1}$ | 2,29             |
| 32                         | 7/256         | 4225                        | $4,78 \times 10^{-1}$ | $4,13 \times 10^{-1}$ | $1,42 \times 10^{-1}$ | 8,80             |
| 32                         | 8/512         | 4225                        | $4,79 \times 10^{-1}$ | $4,13 \times 10^{-1}$ | $1,40 \times 10^{-1}$ | 17,40            |
| Без наявності явища Гіббса |               |                             |                       |                       |                       |                  |
| 32                         | 7/256         | 1089                        | $1,99 \times 10^{-3}$ | $1,23 \times 10^{-3}$ | $6,86 \times 10^{-4}$ | 23,2             |
| 32                         | 7/256         | 4225                        | $1,07 \times 10^{-3}$ | $5,35 \times 10^{-4}$ | $2,67 \times 10^{-4}$ | 54,72            |
| 32                         | 8/512         | 4225                        | $1,04 \times 10^{-3}$ | $5,31 \times 10^{-4}$ | $2,57 \times 10^{-4}$ | 193              |

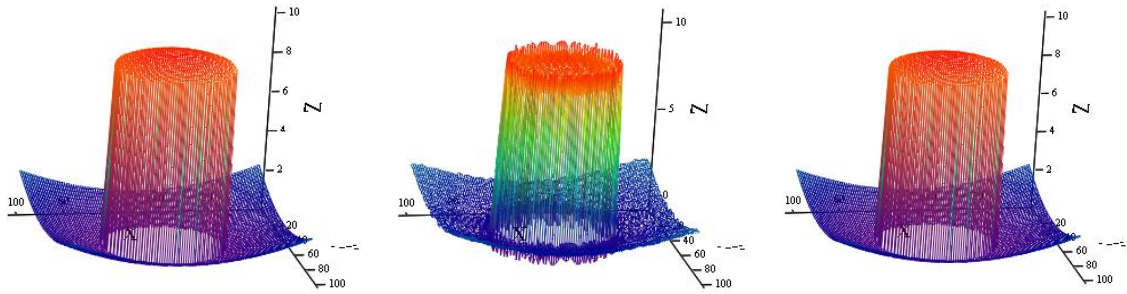


Рисунок 4.10 – Зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  при  $N = 32$  з наявністю та без наявності явища Гіббса відповідно

Задача 2. Відновлення розривної функції з однією лінією розриву, що є еліпсом

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & \text{якщо } w_1(x, y) > 0; \\ \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2}, & \text{якщо } w_1(x, y) = 0; \\ f_2(x, y), & \text{якщо } w_1(x, y) < 0, \end{cases}$$

$$f_1(x, y) = k_1 \times e^{((x-0,5)^2 + (y-0,5)^2) - k_2},$$

$$f_2(x, y) = k_3 - k_4 \times \sin((x-0,5)^2 + (y-0,5)^2),$$

$$w_1(x, y) = 1 - \sqrt{\frac{(x-0,5)^2}{a^2} + \frac{(y-0,5)^2}{b^2}}$$

при  $k_1 = 8$ ,  $k_2 = 0,2$ ,  $k_3 = 1$ ,  $k_4 = 1$ ,  $a = 0,25$  та  $b = 0,16$ .

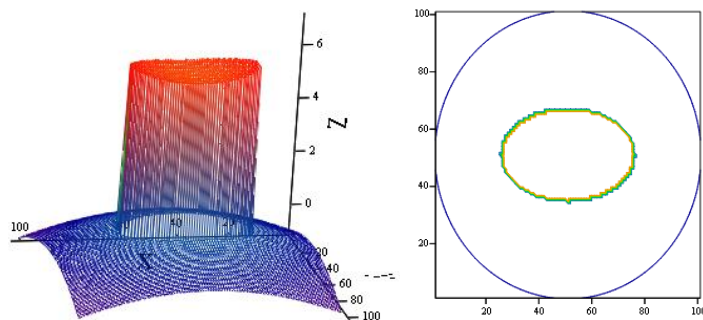


Рисунок 4.11 – Зображення заданої функції та її ліній рівня



Відновлення методом скінченних сум Фур'є (з наявністю явища Гіббса)

Результати обчислень представлені на рисунках 4.12 – 4.15 та у таблиці 4.4.

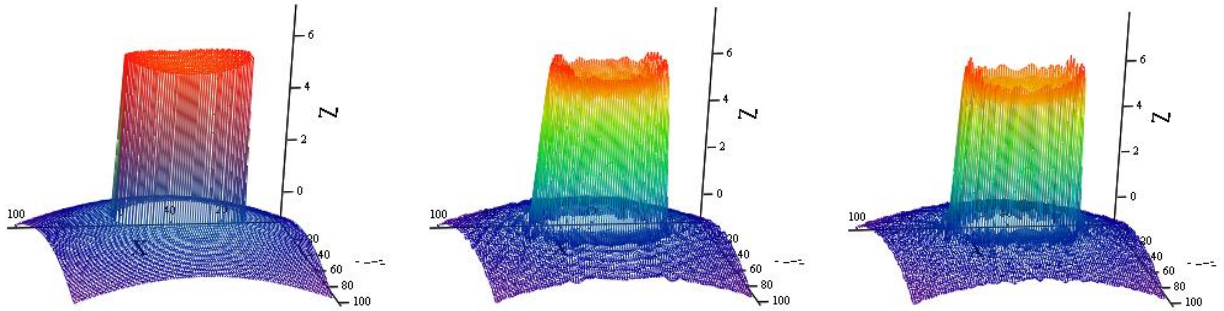


Рисунок 4.12 – Зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

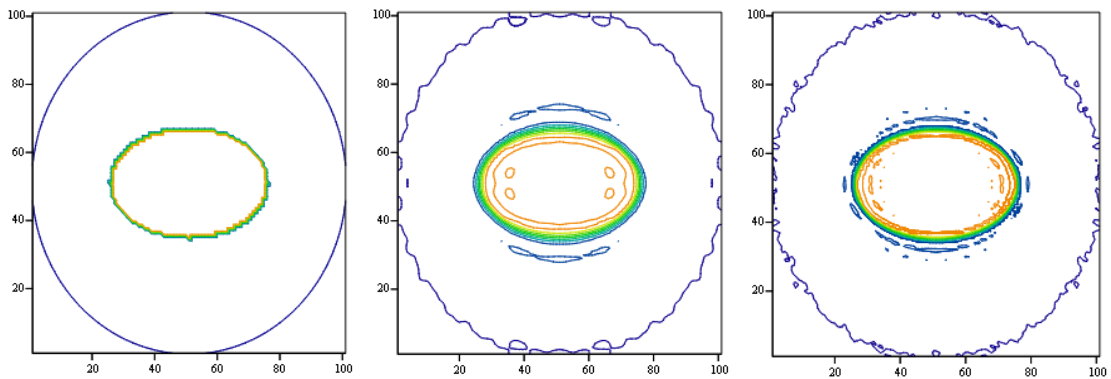


Рисунок 4.13 – Зображення ліній рівня заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

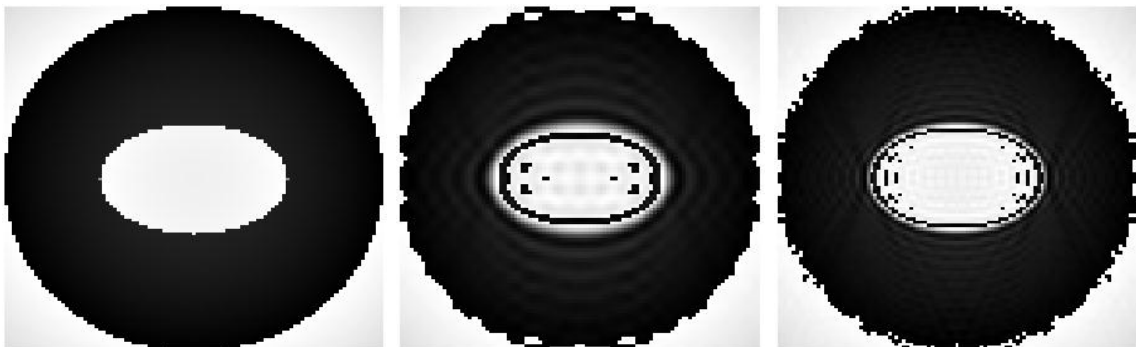


Рисунок 4.14 – Напівтонові зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

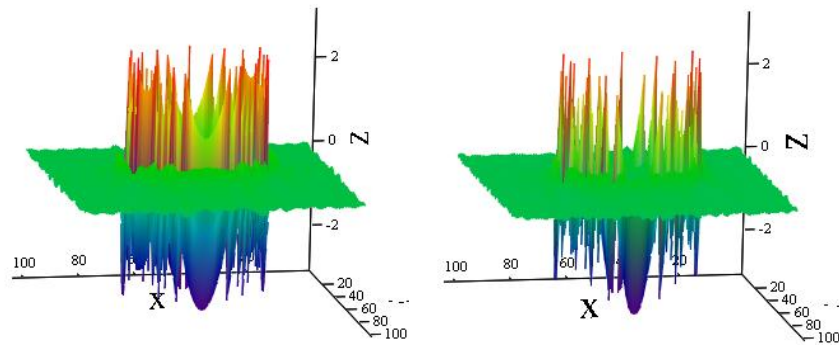


Рисунок 4.15 – Зображення похибок від заміни заданої функції  $f(x, y)$  відтвореною з наявністю явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

Таблиця 4.4 – Порівняння похибок при відтворенні функції  $f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса

| N  | $NN/2^{NN+1}$ | Число доданків у сумі Фур'є | Максимальна відносна  | Середньо-квадратична  | Середня абсолютна     | Час роботи (хв.) |
|----|---------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|
| 16 | 7/256         | 1089                        | $4,29 \times 10^{-1}$ | $3,58 \times 10^{-1}$ | $1,36 \times 10^{-1}$ | 1,94             |
| 32 | 7/256         | 4225                        | $4,42 \times 10^{-1}$ | $2,60 \times 10^{-1}$ | $9,10 \times 10^{-2}$ | 10,30            |
| 32 | 8/512         | 4225                        | $4,38 \times 10^{-1}$ | $2,59 \times 10^{-1}$ | $8,80 \times 10^{-2}$ | 18,90            |

Відновлення з використанням методу скінченних сум Фур'є та сплайна (без наявності явища Гіббса)

Результати обчислень представлені на рисунках 4.16 – 4.19 та у таблиці 4.5.

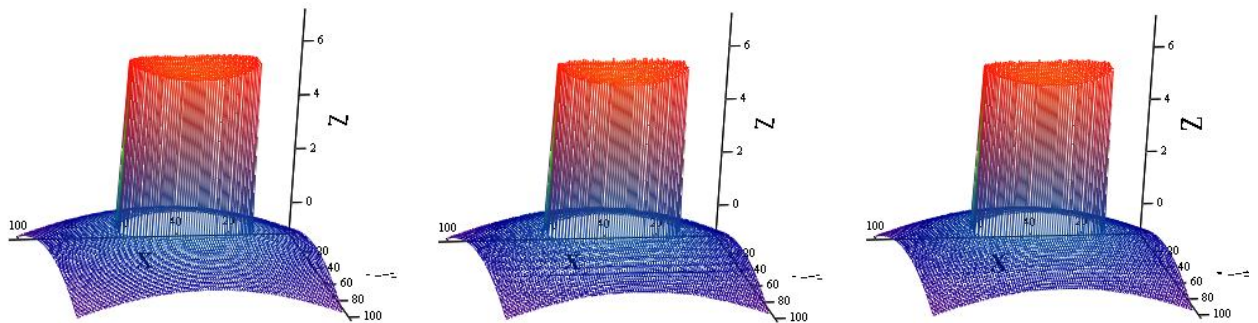


Рисунок 4.16 – Зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно



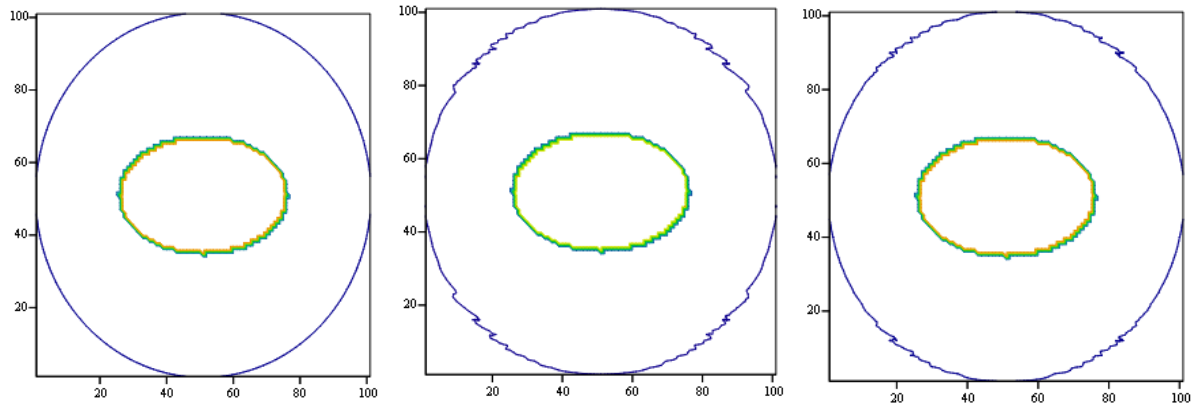


Рисунок 4.17 – Зображення ліній рівня заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

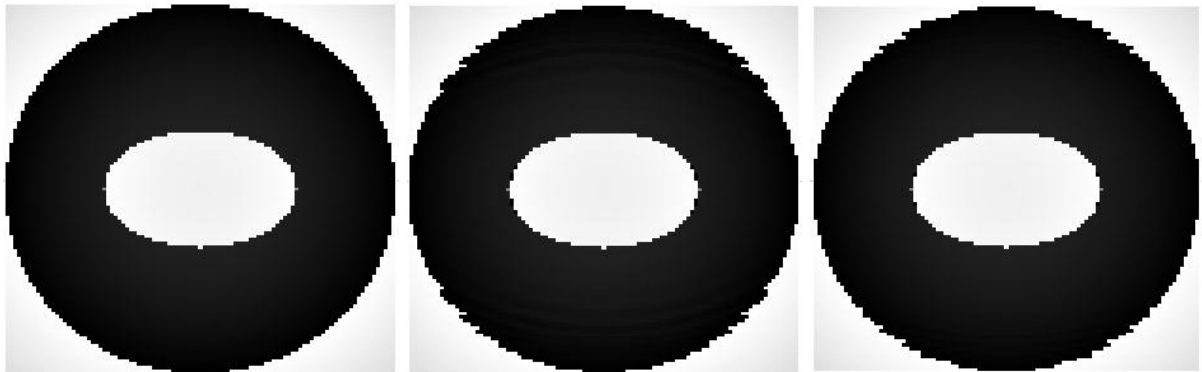


Рисунок 4.18 – Напівтонові зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

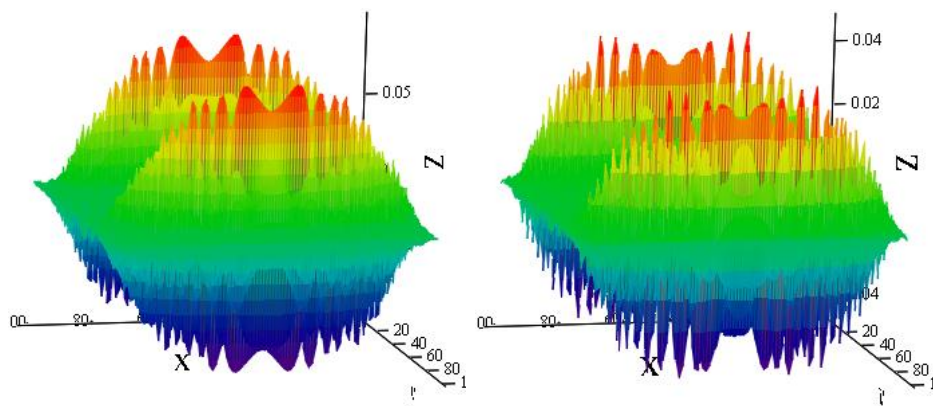


Рисунок 4.19 – Зображення похибок від заміни заданої функції  $f(x, y)$  відтвореною без наявності явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

Таблиця 4.5 – Порівняння похибок при відтворенні функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса

| N  | $NN/2^{NN+1}$ | Число доданків у сумі Фур'є | Максимальна відносна  | Середньо-квадратична  | Середня абсолютна     | Час роботи (хв.) |
|----|---------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|
| 16 | 7/256         | 1089                        | $1,40 \times 10^{-2}$ | $2,20 \times 10^{-2}$ | $1,40 \times 10^{-2}$ | 10,6             |
| 32 | 7/256         | 4225                        | $6,63 \times 10^{-3}$ | $9,94 \times 10^{-3}$ | $6,06 \times 10^{-3}$ | 61,80            |
| 32 | 8/512         | 4225                        | $6,65 \times 10^{-3}$ | $9,93 \times 10^{-3}$ | $6,05 \times 10^{-3}$ | 87,7             |

Узагальнені результати обчислень для задачі 2 представлені на рисунку 4.20 та у таблиці 4.6.

Таблиця 4.6 – Загальне порівняння похибок при відтворенні функції  $f(x, y)$

| N                          | $NN/2^{NN+1}$ | Число доданків у сумі Фур'є | Максимальна відносна  | Середньо-квадратична  | Середня абсолютна     | Час роботи (хв.) |
|----------------------------|---------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|
| З наявністю явища Гіббса   |               |                             |                       |                       |                       |                  |
| 16                         | 7/256         | 1089                        | $4,29 \times 10^{-1}$ | $3,58 \times 10^{-1}$ | $1,36 \times 10^{-1}$ | 1,94             |
| 32                         | 7/256         | 4225                        | $4,42 \times 10^{-1}$ | $2,60 \times 10^{-1}$ | $9,10 \times 10^{-2}$ | 10,30            |
| 32                         | 8/512         | 4225                        | $4,38 \times 10^{-1}$ | $2,59 \times 10^{-1}$ | $8,80 \times 10^{-2}$ | 18,90            |
| Без наявності явища Гіббса |               |                             |                       |                       |                       |                  |
| 32                         | 7/256         | 1089                        | $1,40 \times 10^{-2}$ | $2,20 \times 10^{-2}$ | $1,40 \times 10^{-2}$ | 10,6             |
| 32                         | 7/256         | 4225                        | $6,63 \times 10^{-3}$ | $9,94 \times 10^{-3}$ | $6,06 \times 10^{-3}$ | 61,80            |
| 32                         | 8/512         | 4225                        | $6,65 \times 10^{-3}$ | $9,93 \times 10^{-3}$ | $6,05 \times 10^{-3}$ | 87,7             |

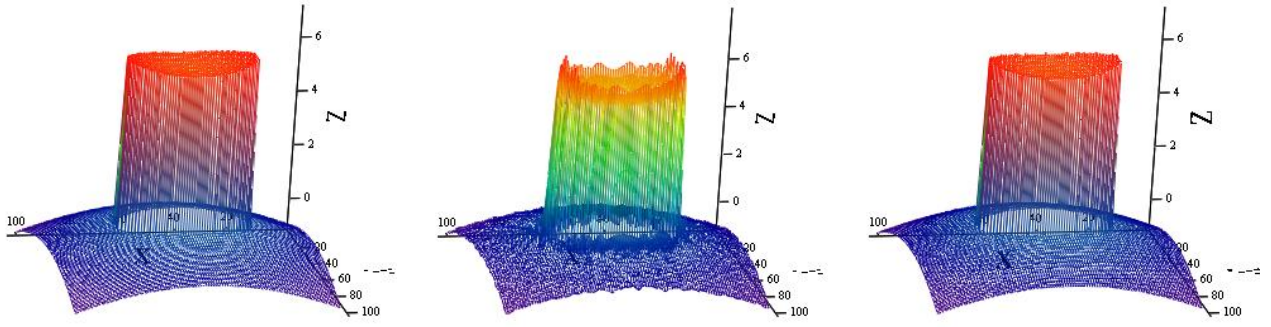


Рисунок 4.20 – Зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  при  $N = 32$  з наявністю та без наявності явища Гіббса відповідно

Задача 3. Відновлення розривної функції з двома лініями розриву, що є колами

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & \text{якщо } 0 \leq w_1(x, y) < R_1; \\ \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2}, & \text{якщо } w_1(x, y) = R_1; \\ f_2(x, y), & \text{якщо } R_1 \leq w_1(x, y) < R_2; \\ \frac{f_2(x, y) + f_3(x, y)}{2}, & \text{якщо } w_1(x, y) = R_2; \\ f_3(x, y), & \text{якщо } w_1(x, y) > R_2, \end{cases}$$

$$f_1(x, y) = k_1 \times \sin\left((x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2\right),$$

$$f_2(x, y) = k_2 \times e^{(x-0,5)^2 + (y-0,5)^2},$$

$$f_3(x, y) = k_3 \times (w_1(x, y) - R_2) + k_4 \times (w_1(x, y) - R_2)^2 + k_5 \times (w_1(x, y) - R_2)^3,$$

$$w_1(x, y) = \sqrt{(x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2}$$

при  $k_1 = 4$ ,  $k_2 = 3$ ,  $k_3 = \frac{1}{2}$ ,  $k_4 = \frac{3}{2}$ ,  $k_5 = 2$ ,  $R_1 = 0,25$  та  $R_2 = 0,45$ .

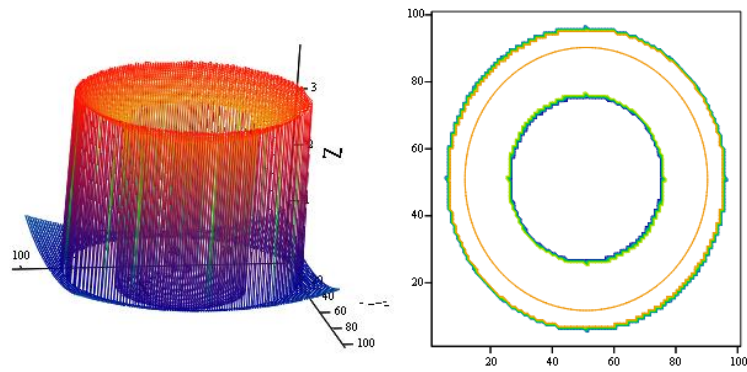


Рисунок 4.21 – Зображення заданої функції та її ліній рівня

Відновлення методом скінченних сум Фур'є (з наявністю явища Гіббса)

Результати обчислень представлені на рисунках 4.22 – 4.25 та у таблиці 4.7.

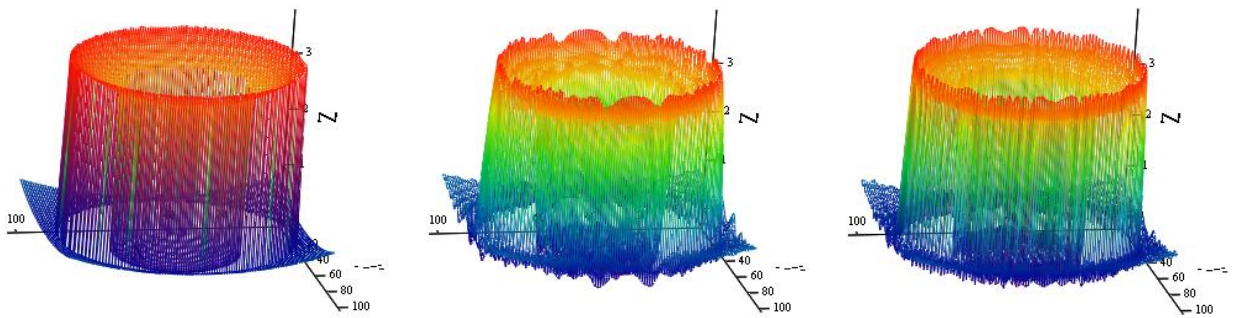


Рисунок 4.22 – Зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

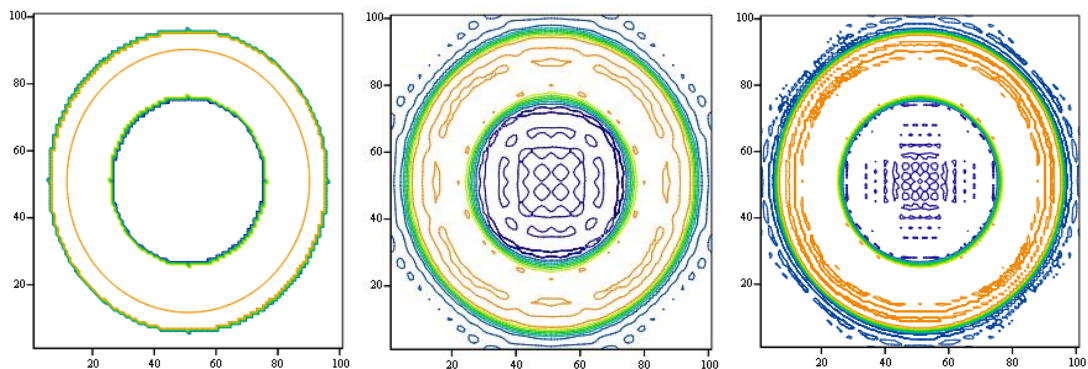


Рисунок 4.23 – Зображення ліній рівня заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

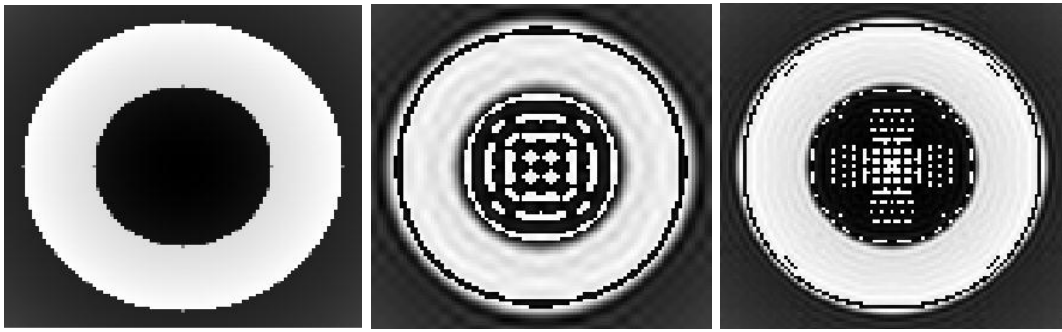


Рисунок 4.24 – Напівтонові зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

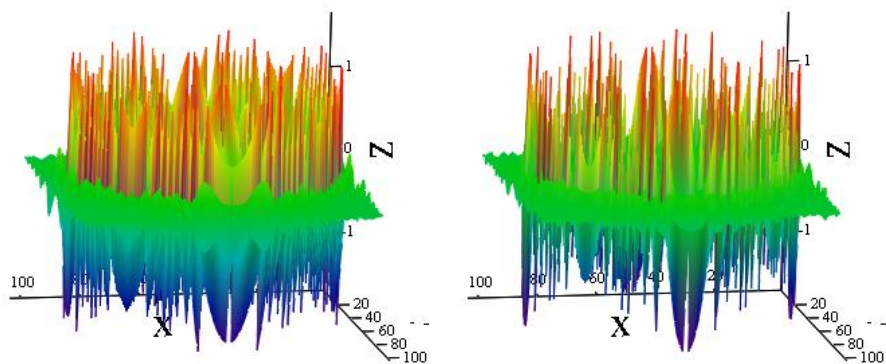


Рисунок 4.25 – Зображення похибок від заміни заданої функції  $f(x, y)$  відтвореною з наявністю явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

Таблиця 4.7 – Порівняння похибок при відтворенні функції  $f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса

| N  | $NN/2^{NN+1}$ | Число доданків у сумі Фур'є | Максимальна відносна  | Середньо-квадратична  | Середня абсолютна     | Час роботи (хв.) |
|----|---------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|
| 16 | 7/256         | 1089                        | $4,42 \times 10^{-1}$ | $3,27 \times 10^{-1}$ | $1,83 \times 10^{-1}$ | 8,59             |
| 32 | 7/256         | 4225                        | $4,38 \times 10^{-1}$ | $2,31 \times 10^{-1}$ | $1,09 \times 10^{-1}$ | 33               |
| 32 | 8/512         | 4225                        | $4,36 \times 10^{-1}$ | $2,30 \times 10^{-1}$ | $1,09 \times 10^{-1}$ | 71,40            |

Відновлення з використанням методу скінченних сум Фур'є та сплайна (без наявності явища Гіббса)

Результати обчислень представлені на рисунках 4.26 – 4.29 та у таблиці



4.8.

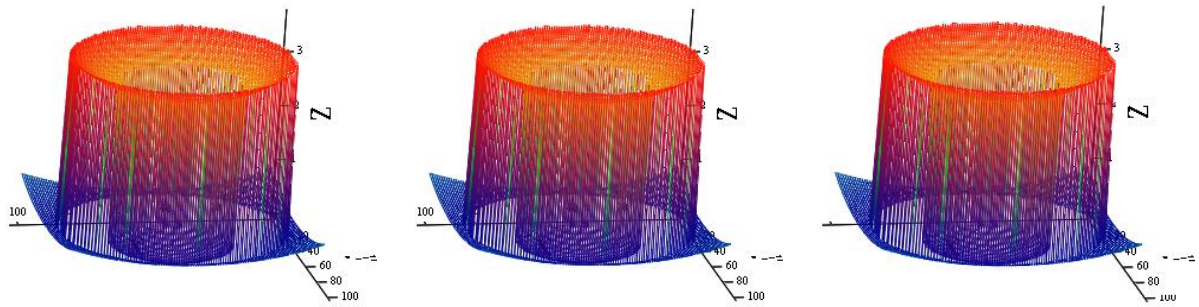


Рисунок 4.26 – Зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

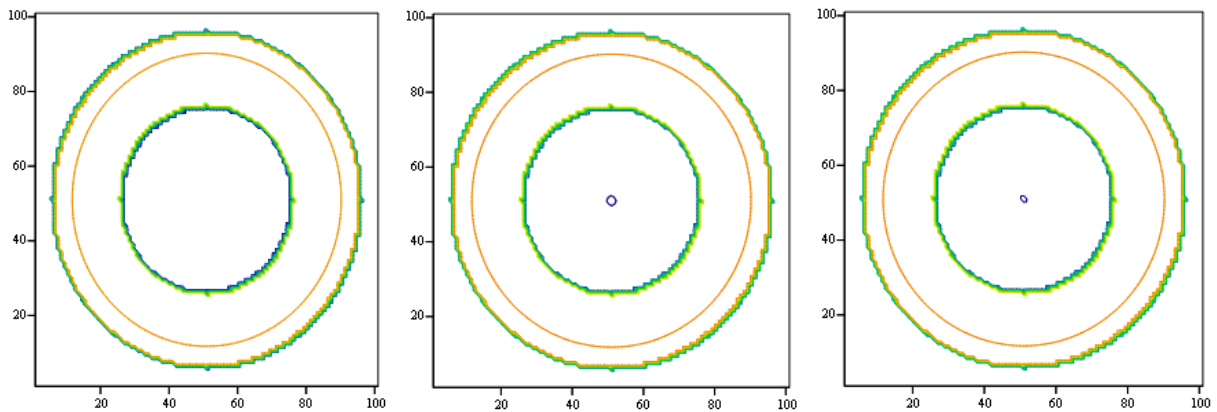


Рисунок 4.27 – Зображення ліній рівня заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

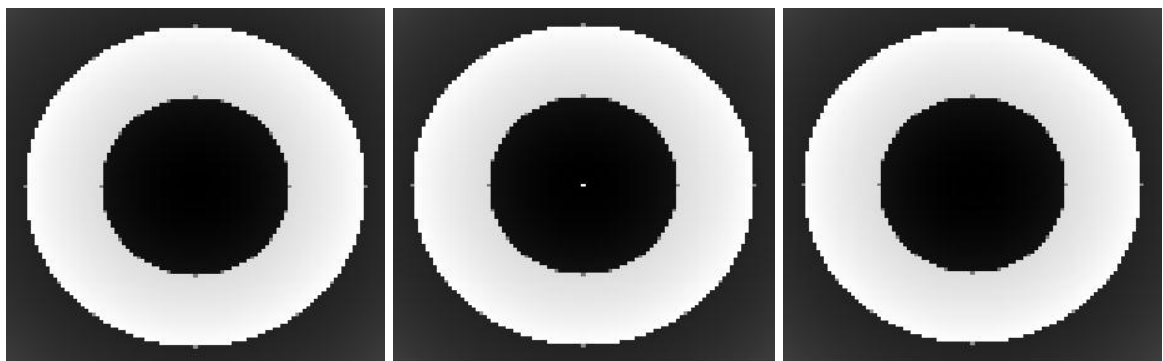


Рисунок 4.28 – Напівтонові зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

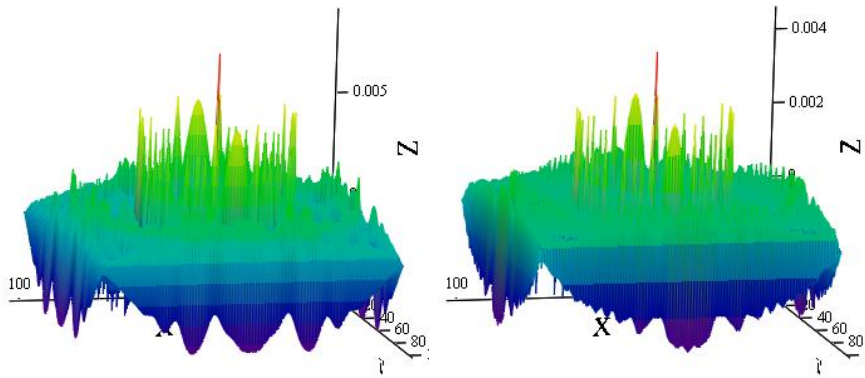


Рисунок 4.29 – Зображення похибок від заміни заданої функції  $f(x, y)$  відтвореною без наявності явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

Таблиця 4.8 – Порівняння похибок при відтворенні функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса

| N  | $NN/2^{NN+1}$ | Число доданків у сумі Фур'є | Максимальна відносна  | Середньо-квадратична  | Середня абсолютна     | Час роботи (хв.) |
|----|---------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|
| 16 | 7/256         | 1089                        | $2,37 \times 10^{-3}$ | $1,10 \times 10^{-3}$ | $7,35 \times 10^{-4}$ | 79,20            |
| 32 | 7/256         | 4225                        | $1,19 \times 10^{-3}$ | $5,12 \times 10^{-4}$ | $2,82 \times 10^{-4}$ | 361              |
| 32 | 8/512         | 4225                        | $1,21 \times 10^{-3}$ | $5,11 \times 10^{-4}$ | $2,80 \times 10^{-4}$ | 600              |

Узагальнені результати обчислень для задачі 3 представлені на рисунку 4.30 та у таблиці 4.9.

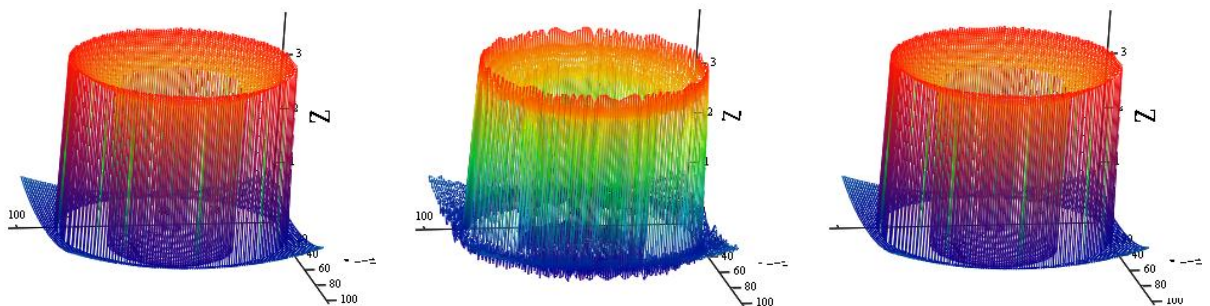


Рисунок 4.30 – Зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  при  $N = 32$  з наявністю та без наявності явища Гіббса відповідно

Таблиця 4.9 – Загальне порівняння похибок при відтворенні функції

$$f(x, y)$$

| N                          | $NN/2^{NN+1}$ | Число доданків у сумі Фур'є | Максимальна відносна  | Середньо-квадратична  | Середня абсолютна     | Час роботи (хв.) |
|----------------------------|---------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|
| З наявністю явища Гіббса   |               |                             |                       |                       |                       |                  |
| 16                         | 7/256         | 1089                        | $4,42 \times 10^{-1}$ | $3,27 \times 10^{-1}$ | $1,83 \times 10^{-1}$ | 8,59             |
| 32                         | 7/256         | 4225                        | $4,38 \times 10^{-1}$ | $2,31 \times 10^{-1}$ | $1,09 \times 10^{-1}$ | 33               |
| 32                         | 8/512         | 4225                        | $4,36 \times 10^{-1}$ | $2,30 \times 10^{-1}$ | $1,09 \times 10^{-1}$ | 71,40            |
| Без наявності явища Гіббса |               |                             |                       |                       |                       |                  |
| 32                         | 7/256         | 1089                        | $2,37 \times 10^{-3}$ | $1,10 \times 10^{-3}$ | $7,35 \times 10^{-4}$ | 79,20            |
| 32                         | 7/256         | 4225                        | $1,19 \times 10^{-3}$ | $5,12 \times 10^{-4}$ | $2,82 \times 10^{-4}$ | 361              |
| 32                         | 8/512         | 4225                        | $1,21 \times 10^{-3}$ | $5,11 \times 10^{-4}$ | $2,80 \times 10^{-4}$ | 600              |

Задача 4. Відновлення розривної функції з двома лініями розриву, що є еліпсами

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & \text{якщо } w_1(x, y) \geq 0; \\ \frac{f_1(x, y) + f_2(x, y)}{2}, & \text{якщо } w_1(x, y) = 0; \\ f_2(x, y), & \text{якщо } w_1(x, y) < 0 \wedge w_2(x, y) \geq 0; \\ \frac{f_2(x, y) + f_3(x, y)}{2}, & \text{якщо } w_2(x, y) = 0; \\ f_3(x, y), & \text{якщо } w_2(x, y) < 0, \end{cases}$$

$$f_1(x, y) = k_1 \times e^{(x-0,5)^2 + (y-0,5)^2},$$

$$f_2(x, y) = k_2 \times \cos\left((x-0,5)^2 + (y-0,5)^2\right),$$

$$f_3(x, y) = k_3 \times \sin\left((x-0,5)^2 + (y-0,5)^2\right),$$



$$w_1(x, y) = 1 - \sqrt{\frac{(x - 0,5)^2}{a_1} + \frac{(y - 0,5)^2}{b_1}},$$

$$w_2(x, y) = 1 - \sqrt{\frac{(x - 0,5)^2}{a_2} + \frac{(y - 0,5)^2}{b_2}}$$

при  $k_1 = 4$ ,  $k_2 = 3$ ,  $k_3 = 5$ ,  $a_1 = 0,16$ ,  $b_1 = 0,25$ ,  $a_2 = 0,36$  та  $b_2 = 0,49$ .

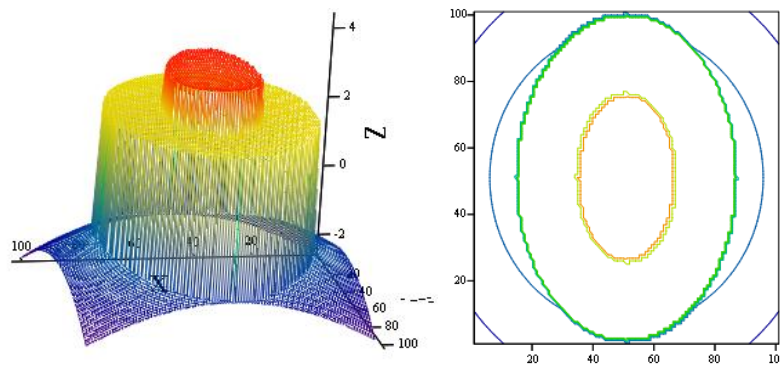


Рисунок 4.31 – Зображення заданої функції та її ліній рівня

Відновлення методом скінченних сум Фур'є (з наявністю явища Гіббса)

Результати обчислень представлені на рисунках 4.32 – 4.35 та у таблиці 4.10.

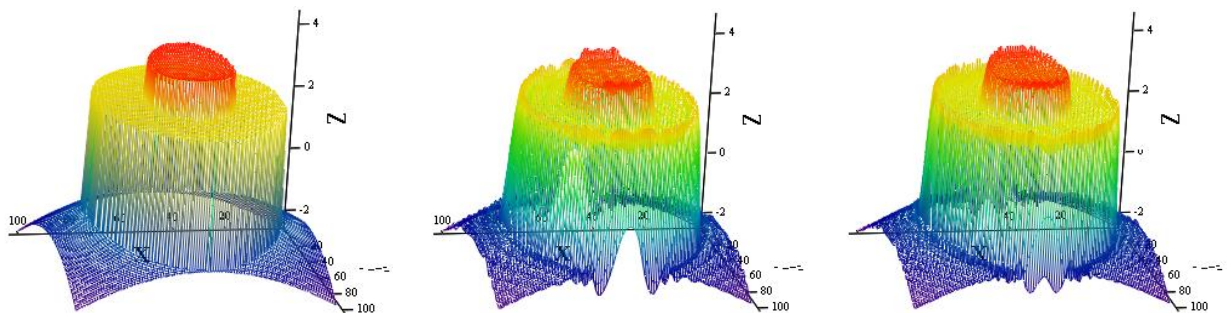


Рисунок 4.32 – Зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції

$f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

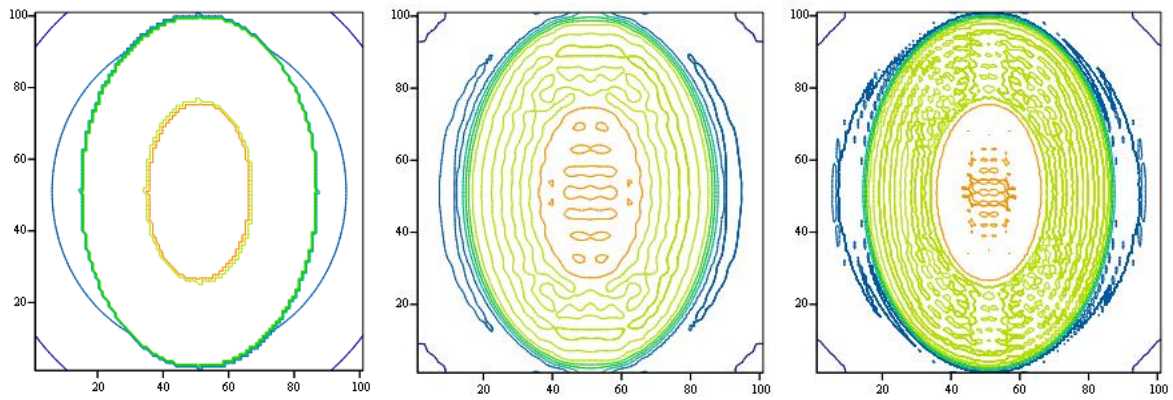


Рисунок 4.33 – Зображення ліній рівня заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

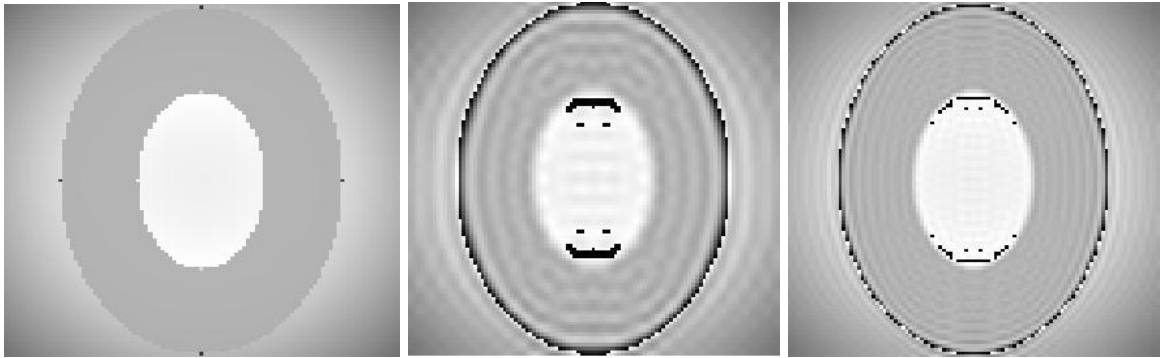


Рисунок 4.34 – Напівтонові зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

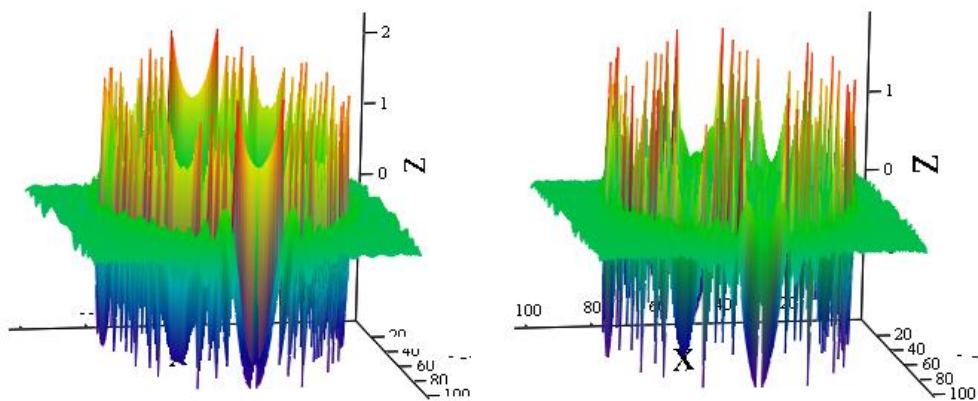


Рисунок 4.35 – Зображення похибок від заміни заданої функції  $f(x, y)$  відтвореною з наявністю явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

Таблиця 4.10 – Порівняння похибок при відтворенні функції  $f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса

| N  | $NN/2^{NN+1}$ | Число доданків у сумі Фур'є | Максимальна відносна  | Середньо-квадратична  | Середня абсолютна     | Час роботи (хв.) |
|----|---------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|
| 16 | 7/256         | 1089                        | $5,08 \times 10^{-1}$ | $3,40 \times 10^{-1}$ | $1,73 \times 10^{-1}$ | 8,98             |
| 32 | 7/256         | 4225                        | $4,49 \times 10^{-1}$ | $2,39 \times 10^{-1}$ | $1,01 \times 10^{-1}$ | 44,70            |
| 32 | 8/512         | 4225                        | $4,45 \times 10^{-1}$ | $2,39 \times 10^{-1}$ | $1,01 \times 10^{-1}$ | 90,90            |

Відновлення з використанням методу скінченних сум Фур'є та сплайна (без наявності явища Гіббса)

Результати обчислень представлені на рисунках 4.36 – 4.39 та у таблиці 4.11.

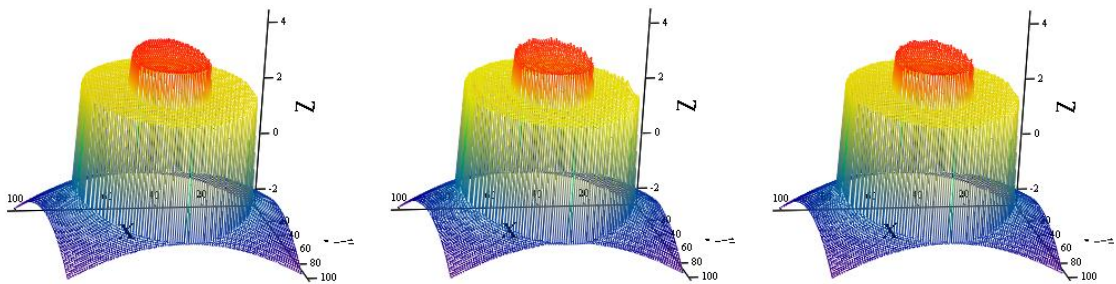


Рисунок 4.36 – Зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

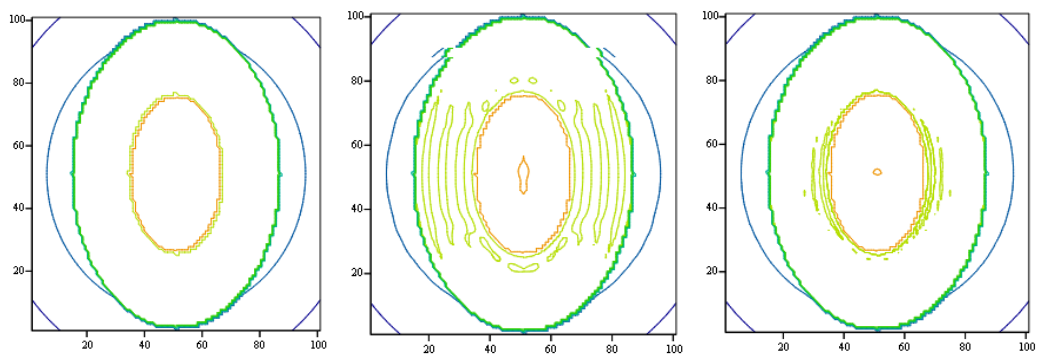


Рисунок 4.37 – Зображення ліній рівня заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

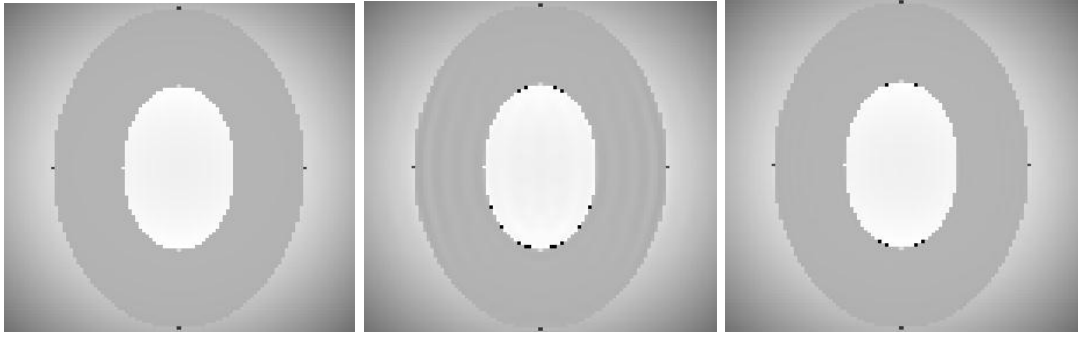


Рисунок 4.38 – Напівтонові зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

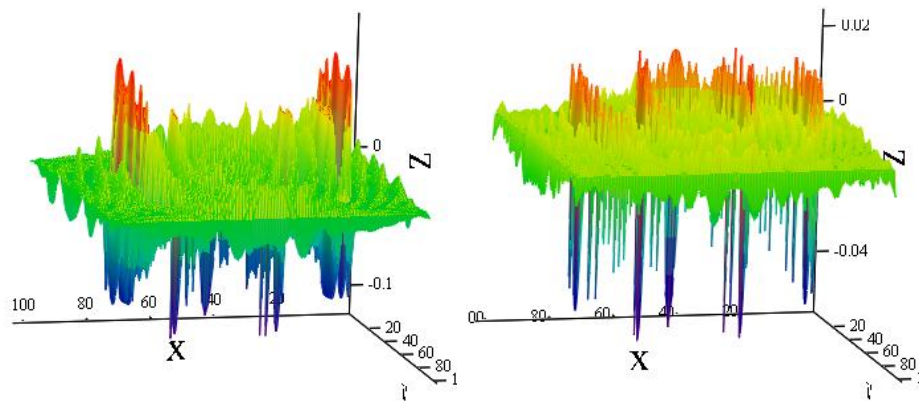


Рисунок 4.39 – Зображення похибок від заміни заданої функції  $f(x, y)$  відтвореною без наявності явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

Таблиця 4.11 – Порівняння похибок при відтворенні функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса

| N  | $NN/2^{NN+1}$ | Число доданків у сумі Фур'є | Максимальна відносна  | Середньо-квадратична  | Середня абсолютна     | Час роботи (хв.) |
|----|---------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|
| 16 | 7/256         | 1089                        | $2,70 \times 10^{-2}$ | $1,90 \times 10^{-2}$ | $1,10 \times 10^{-2}$ | 20,70            |
| 32 | 7/256         | 4225                        | $1,30 \times 10^{-2}$ | $5,50 \times 10^{-3}$ | $3,07 \times 10^{-3}$ | 80,20            |
| 32 | 8/512         | 4225                        | $1,20 \times 10^{-2}$ | $5,48 \times 10^{-3}$ | $3,03 \times 10^{-3}$ | 143              |

Узагальнені результати обчислень для задачі 4 представлені на рисунку 4.40 та у таблиці 4.12.

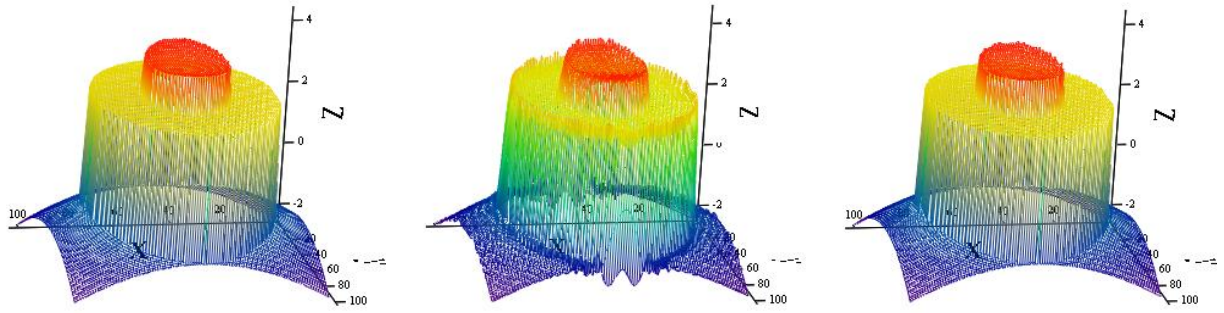


Рисунок 4.40 – Зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  при  $N = 32$  з наявністю та без наявності явища Гіббса відповідно

Таблиця 4.12 – Загальне порівняння похибок при відтворенні функції  $f(x, y)$

| N                          | $NN/2^{NN+1}$ | Число доданків у сумі Фур'є | Максимальна відносна  | Середньо-квадратична  | Середня абсолютна     | Час роботи (хв.) |
|----------------------------|---------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|
| З наявністю явища Гіббса   |               |                             |                       |                       |                       |                  |
| 16                         | 7/256         | 1089                        | $5,08 \times 10^{-1}$ | $3,40 \times 10^{-1}$ | $1,73 \times 10^{-1}$ | 8,98             |
| 32                         | 7/256         | 4225                        | $4,49 \times 10^{-1}$ | $2,39 \times 10^{-1}$ | $1,01 \times 10^{-1}$ | 44,70            |
| 32                         | 8/512         | 4225                        | $4,45 \times 10^{-1}$ | $2,39 \times 10^{-1}$ | $1,01 \times 10^{-1}$ | 90,90            |
| Без наявності явища Гіббса |               |                             |                       |                       |                       |                  |
| 32                         | 7/256         | 1089                        | $2,70 \times 10^{-2}$ | $1,90 \times 10^{-2}$ | $1,10 \times 10^{-2}$ | 20,70            |
| 32                         | 7/256         | 4225                        | $1,30 \times 10^{-2}$ | $5,50 \times 10^{-3}$ | $3,07 \times 10^{-3}$ | 80,20            |
| 32                         | 8/512         | 4225                        | $1,20 \times 10^{-2}$ | $5,48 \times 10^{-3}$ | $3,03 \times 10^{-3}$ | 143              |

Задача 5. Відновлення розривної функції з двома лініями розриву, що є еліпсами, за умовою задачі 4 при таких значеннях параметрів:  $k_1 = -1$ ,  $k_2 = 3$ ,  $k_3 = 5$ ,  $a_1 = 0,16$ ,  $b_1 = 0,25$ ,  $a_2 = 0,36$  та  $b_2 = 0,49$ .



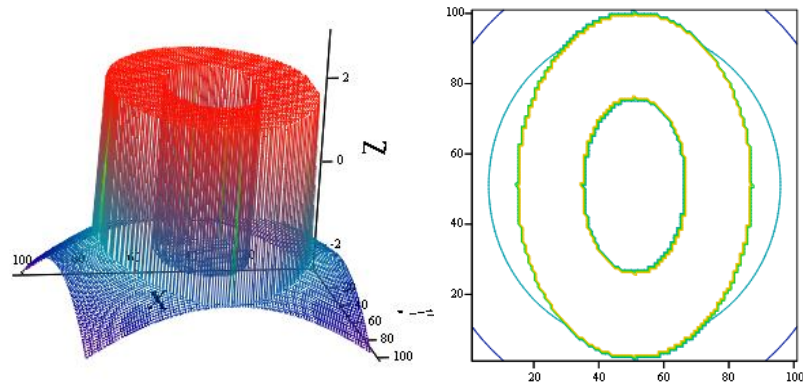


Рисунок 4.41 – Зображення заданої функції та її ліній рівня

Відновлення методом скінченних сум Фур'є (з наявністю явища Гіббса)

Результати обчислень представлені на рисунках 4.42 – 4.45 та у таблиці 4.13.

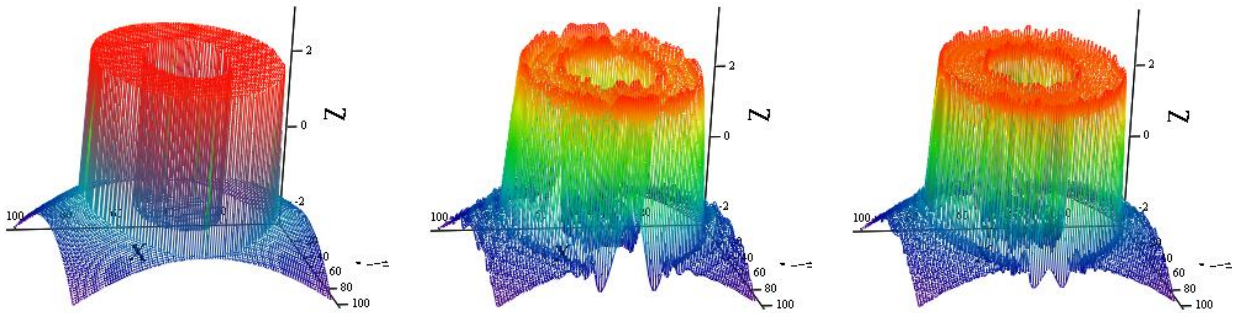


Рисунок 4.42 – Зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

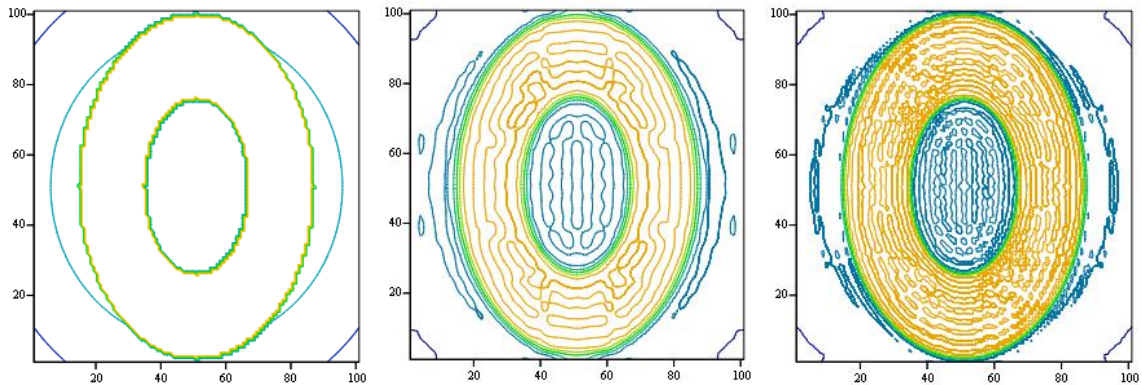


Рисунок 4.43 – Зображення ліній рівня заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

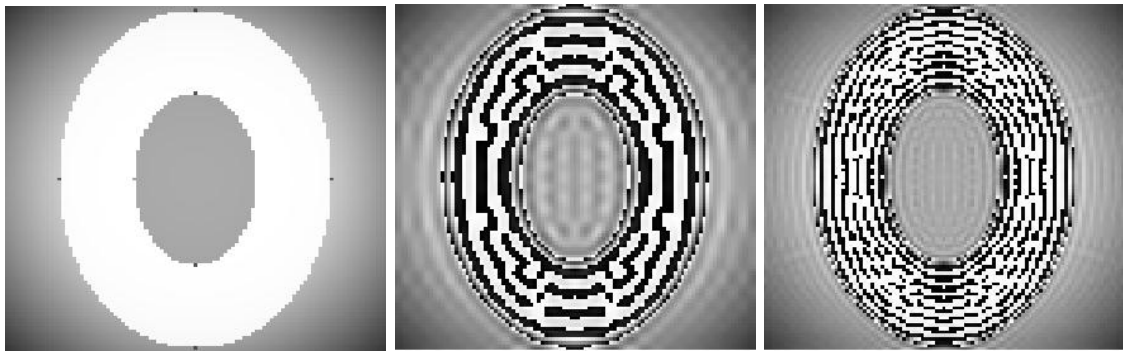


Рисунок 4.44 – Напівтонові зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

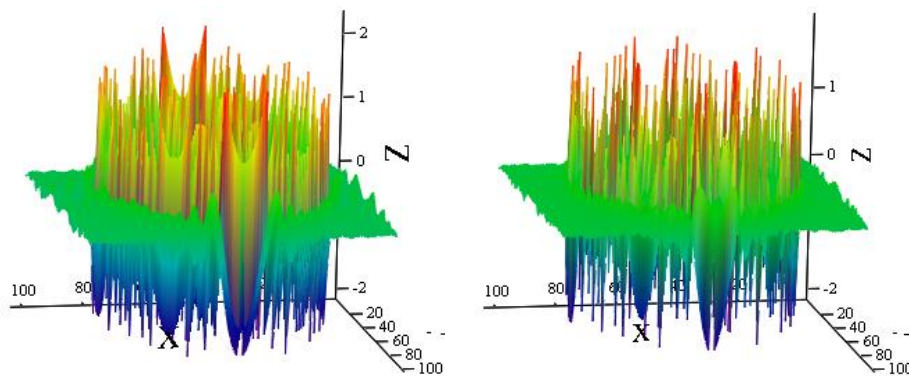


Рисунок 4.45 – Зображення похибок від заміни заданої функції  $f(x, y)$  відтвореною з наявністю явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

Таблиця 4.13 – Порівняння похибок при відтворенні функції  $f(x, y)$  з наявністю явища Гіббса

| N  | $NN/2^{NN+1}$ | Число доданків у сумі Фур'є | Максимальна відносна  | Середньо-квадратична  | Середня абсолютна     | Час роботи (хв.) |
|----|---------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|
| 16 | 7/256         | 1089                        | $7,42 \times 10^{-1}$ | $4,12 \times 10^{-1}$ | $2,20 \times 10^{-1}$ | 10,60            |
| 32 | 7/256         | 4225                        | $6,80 \times 10^{-1}$ | $2,90 \times 10^{-1}$ | $1,32 \times 10^{-1}$ | 62,90            |
| 32 | 8/512         | 4225                        | $6,78 \times 10^{-1}$ | $2,90 \times 10^{-1}$ | $1,31 \times 10^{-1}$ | 120              |

Відновлення з використанням методу скінченних сум Фур'є та сплайна (без наявності явища Гіббса)

Результати обчислень представлені на рисунках 4.46 – 4.49 та у таблиці 4.14.

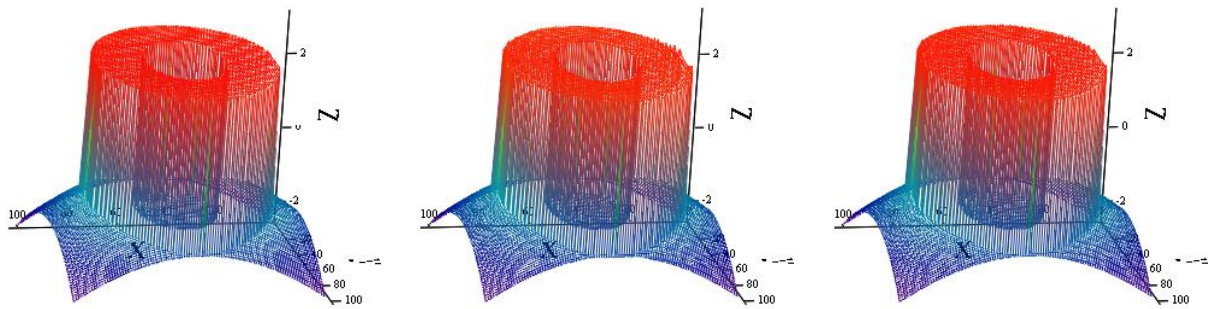


Рисунок 4.46 – Зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

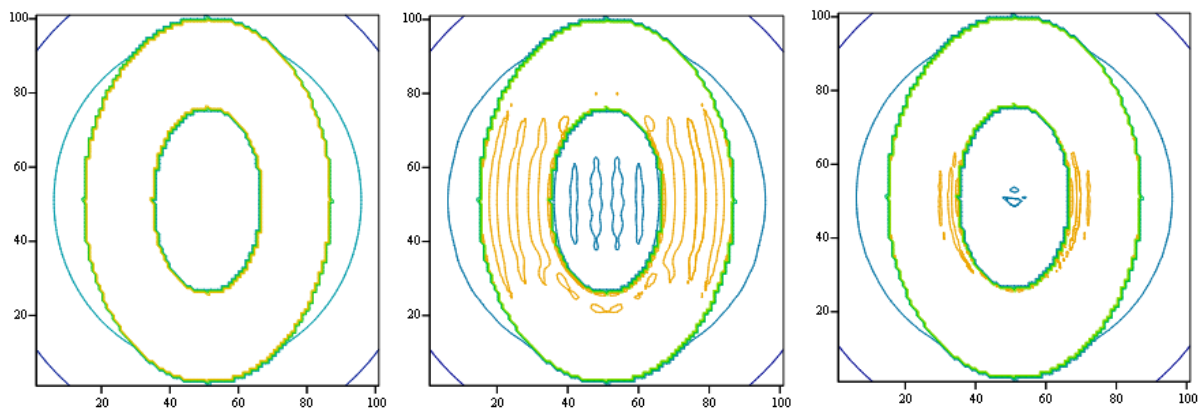


Рисунок 4.47 – Зображення ліній рівня заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

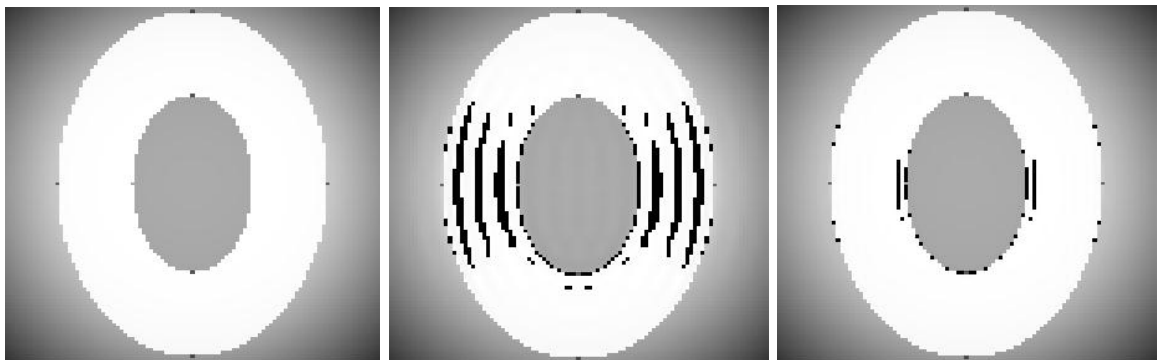


Рисунок 4.48 – Напівтонові зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно



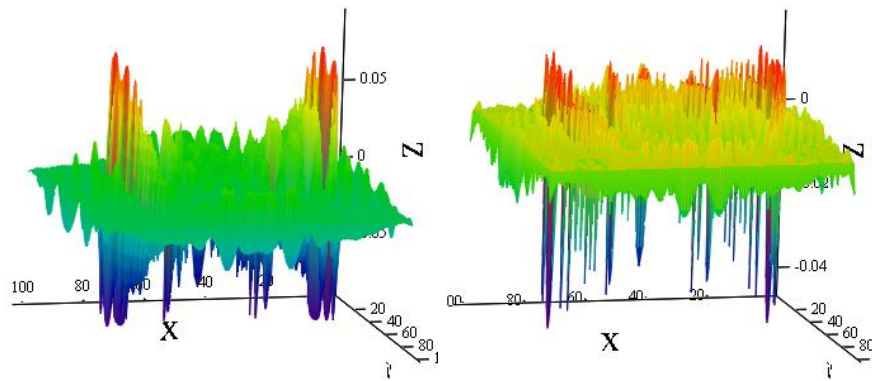


Рисунок 4.49 – Зображення похибок від заміни заданої функції  $f(x, y)$  відтвореною без наявності явища Гіббса при  $N = 16$  та  $N = 32$  відповідно

Таблиця 4.14 – Порівняння похибок при відтворенні функції  $f(x, y)$  без наявності явища Гіббса

| N  | $NN/2^{NN+1}$ | Число доданків у сумі Фур'є | Максимальна відносна  | Середньо-квдратична   | Середня абсолютна     | Час роботи (хв.) |
|----|---------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|
| 16 | 7/256         | 1089                        | $0,30 \times 10^{-1}$ | $1,80 \times 10^{-2}$ | $1,10 \times 10^{-2}$ | 20,70            |
| 32 | 7/256         | 4225                        | $1,50 \times 10^{-2}$ | $4,78 \times 10^{-3}$ | $2,66 \times 10^{-3}$ | 99,40            |
| 32 | 8/512         | 4225                        | $1,50 \times 10^{-2}$ | $4,77 \times 10^{-3}$ | $2,65 \times 10^{-3}$ | 197              |

Узагальнені результати обчислень представлені на рисунку 4.50 та у таблиці 4.15.

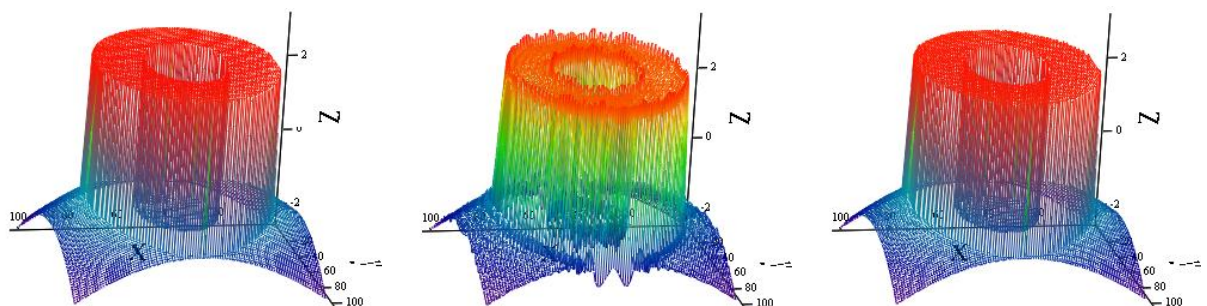


Рисунок 4.50 – Зображення заданої функції  $f(x, y)$  та відтвореної функції  $f(x, y)$  при  $N = 32$  з наявністю та без наявності явища Гіббса відповідно

Таблиця 4.15 – Загальне порівняння похибок при відтворенні функції

$$f(x, y)$$

| N                          | $NN/2^{NN+1}$ | Число доданків у сумі Фур'є | Максимальна відносна  | Середньо-квадратична  | Середня абсолютна     | Час роботи (хв.) |
|----------------------------|---------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|
| З наявністю явища Гіббса   |               |                             |                       |                       |                       |                  |
| 16                         | 7/256         | 1089                        | $7,42 \times 10^{-1}$ | $4,12 \times 10^{-1}$ | $2,20 \times 10^{-1}$ | 10,60            |
| 32                         | 7/256         | 4225                        | $6,80 \times 10^{-1}$ | $2,90 \times 10^{-1}$ | $1,32 \times 10^{-1}$ | 62,90            |
| 32                         | 8/512         | 4225                        | $6,78 \times 10^{-1}$ | $2,90 \times 10^{-1}$ | $1,31 \times 10^{-1}$ | 120              |
| Без наявності явища Гіббса |               |                             |                       |                       |                       |                  |
| 32                         | 7/256         | 1089                        | $0,30 \times 10^{-1}$ | $1,80 \times 10^{-2}$ | $1,10 \times 10^{-2}$ | 20,70            |
| 32                         | 7/256         | 4225                        | $1,50 \times 10^{-2}$ | $4,78 \times 10^{-3}$ | $2,66 \times 10^{-3}$ | 99,40            |
| 32                         | 8/512         | 4225                        | $1,50 \times 10^{-2}$ | $4,77 \times 10^{-3}$ | $2,65 \times 10^{-3}$ | 197              |

#### 4.2 Аналіз результатів

При чисельній реалізації методу відновлення розривних функцій, що ґрунтується на використанні сплайнів та застосуванні методу скінченних сум Фур'є до неперервної функції, побудованої з допомогою сплайнів, варіювалися відновлювані розривні функції  $f(x, y)$ , кількість ліній розриву  $M$ , число доданків в сумі Фур'є  $N$  число  $NN$ , що задає розбиття відрізків при обчисленні інтегралів. Результати ілюструвалися графічно та кількісно введенням відповідних малюнків та таблиць. Аналіз показав, що результати покращувалися зі збільшенням чисел  $N$  та  $NN$ .

Окрім того, порівнювалися результати досліджень з безпосереднім використанням методу скінченних сум Фур'є до відновлення розривних функцій. У цьому випадку суттєва присутність впливу явища Гіббса на результати наближення розривної функції виражена чисельно в неможливості покращити ре-

зультат збільшенням чисел  $N$  та  $NN$ . Графічно це виражається наявністю осциляцій при зображенні розривних функцій.

Дослідження показали ефективність нового методу відновлення розривних функцій, який дозволяє усунути вплив явища Гіббса на результати відновлення.

## ВИСНОВКИ

В даній роботі був розглянутий системний аналіз проблеми відновлення розривних функцій спеціального вигляду з використанням проєкцій. Були наведені теоретичні положення, стосовно розглянутого методу. В результаті тестування нового методу, оснований на використанні розривних сплайнів та методу скінченних сум Фур'є вдалося уникнути явища Гіббса при відтворенні розривних функцій. У цьому методі різниця між наближуваною функцією  $f(x, y)$  і розривним сплайном  $Sp(x, y)$  є неперервною функцією, що дозволяє наближувати її з використанням методу скінченних сум Фур'є.

Програмна реалізація методу була виконана в системі комп'ютерної математики Mathcad. У якості результатів представлені зображення відновленої функції, лінії рівня, напівтонові зображення, що прийнято при розгляданні задач комп'ютерної томографії та порівняльні таблиці з наглядними чисельними результатами роботи програми. Збільшення порядку скінченних сум Фур'є приводить до зменшення похибки наближення функції  $f(x, y)$ . При цьому для обчислення коефіцієнтів Фур'є використовуються проєкції. Явище Гіббса в наближуваній функції відсутнє. Аналіз результатів показав ефективність розглянутого методу відновлення розривних функцій.

Цей метод є одним з ефективних підходів уникнення явища Гіббса, який виникає при наближенні сумами Фур'є розривних функцій двох змінних.

Таким чином, задача відновлення розривних функцій за їх проєкціями є актуальною для розробки і дослідження нових методів розв'язання плоскої задачі радонівської комп'ютерної томографії, які можуть використовувати нетрадиційні схеми сканування.

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. Москва : Мир, 1990. 288 с.
2. Терещенко С. А. Методы вычислительной томографии. Москва : Физматлит, 2004. 320 с.
3. Лямец В. И., Тевяшев А. Д. Системный анализ. Вводный курс : учеб. пос. Харьков : ХНУРЭ, 2004. 448 с.
4. Литвин О. М., Литвин О. Г., Литвин О. О., Межуєв В. І. Метод відновлення розривних функцій за допомогою даних проєкцій та кінцевих сум // 9-а Міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційні системи та технології ІСТ-2020» (м. Одеса, 24-26 вересня 2020 р.). Одеса, С. 661–673.
5. Литвин О. М. Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії // Системний аналіз, управління і інформаційні технології: Вісник Харківського держ. політех. ун-ту. Збірка наукових праць. № 125. Харків : ХДПУ, 2000. С. 27–35.
6. Литвин О. М., Литвин О. Г. Аналіз результатів обчислювального експерименту відновлення розривних функцій двох змінних за допомогою проєкцій // Кібернетика та системний аналіз. 2021. №5 (57). Харків : ХНУРЕ, С. 98–107.
7. Литвин О. М., Литвин О. Г., Приклади наближеного відновлення розривних функцій двох змінних сумами Фур'є без явища Гіббса // 9-а Міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційні системи та технології ІСТ-2020» (м. Харків, 17-20 листопада 2020 р.). Харків, 2020, С. 47-51.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. Москва : Лань, 2009. 657 с.
9. Будаков Б. М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. Москва : Наука, 1965. 607 с.
10. Литвин О. М., Кулик С. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням вейвлетів // Проблеми машинобудування. 2008. Т.

11, №2. С. 56–65.

11. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харків : Основа, 2002. 544 с.

12. Литвин О. М. Інтерлінація функцій. Харків : Основа, 1992. 236 с.

13. Литвин О. М. Методи обчислень. Додаткові розділи // навч. посіб. К. : Наук. думка, 2005. 344 с.

14. Gottlieb D., Shu C. W. On the Gibbs phenomenon and its resolution // Society for Industrial and Applied Mathematics. 1997. 25 p.

15. Кирьянов Д. В. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2012. 432 с.