УДК 621.3.006.357

Т. В. ДОРОШЕНКО, К. А. СЕЛИВАНОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА ПРИЁМНИКА СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ ВОЛЬТЕРРА

Постановка задачи

Различные системы радиосвязи приобрели небывалый масштаб развития. Особенно это стало заметно за последние годы, когда получили мощное внедрение системы мобильной связи. Многие достижения, которые будут применены в системах мобильной связи третьего и четвертого поколений, являются логическим продолжением технологии CDMA (Code Division Multiple Access – множественного доступа с кодовым разделением. В отличие от других методов доступа абонентов к сети, где энергия сигнала концентрируется на выбранных частотах или временных интервалах, сигналы CDMA распределены в непрерывном частотно-временном пространстве. CDMA обладают высокой помехоустойчивостью, причем как от пассивных, так и от активных помех. Однако до того, как помехи будут подавлены методами цифровой обработки сигналов, они должны пройти через высокочастотный тракт приемника и не вызвать насыщения малошумящего широкополосного усилителя (МШУ) и смесителя. Поэтому одним из недостатков широкополосных систем является чувствительность этих систем к нелинейным искажениям.

Таким образом, возникает задача анализа таких систем на воздействие нескольких входных широкополосных сигналов для дальнейшей оценки возможности приема и обработки информации.

Основная часть

В последнее десятилетие с целью исследования нелинейных структур используются методы, базирующиеся на свойствах нелинейных функционалов и их аппроксимаций в виде функциональных рядов (полиномов) Вольтерра. Известные достоинства этих методов – естественность описания операторов для многих случаев практики, одновременный учет нелинейных и инерционных свойств цепей и др. привлекли к этим методам ряд исследователей, как в стране, так и за рубежом.

В общем виде математическую модель нелинейной динамической системы можно представить в виде

$$y(t)=F[x(t)], \tag{1}$$

где $x(t)$ – входной сигнал (воздействие), $y(t)$ – выходной сигнал (реакция системы).

Рассмотрим случай, когда входное воздействие системы $x(t)$ выражается аддитивной смесью гармоник

$$x(t) = \exp(j\omega_{вх1}t) + \exp(j\omega_{вх2}t) + \ldots + \exp(j\omega_{вхn}\, t), \tag{2}$$

где $\omega_{вхi} = 2\pi f_{вхi}$, $i = 1,2,3,\ldots n$, причём $\omega_{вхi} \neq \omega_{вхj}$ при $i \neq j$.

Введем ограничение: уровень входного сигнала $x(t)$ должен быть таким, чтобы анализируемая совокупность элементов системы имела слабую нелинейность.

Данные допущения дают основания нелинейную динамическую систему представить в виде рядов Вольтерра [1]:

$$y(t)=F[x(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h_2(\tau_1,\tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)x(t-\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3+\ldots$$

$$\ldots+=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)\prod_{i=1}^{n}x(t-\tau_i)d\tau_1\ldots d\tau_n \tag{3}$$

В данном выражении $h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ – ядро Вольтера n-го порядка. Следует отметить, что ядро первого порядка $h_i(\tau_1)$ – это импульсная характеристика линейной цепи. Отсюда, ядра более высокого порядка можно рассматривать как импульсные характеристики выходного порядка, которые служат для описания различных порядков нелинейности. Другими словами, ядро n-го порядка $h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ можно назвать нелинейной импульсной характеристикой порядка n.

Введем еще одно ограничение, положив, что ядра являются сепарабельными. Это дает основание применить к ним оператор преобразования Фурье, в результате чего получим нелинейную передаточную функцию порядка n:

$$H_n(f_1,f_2,\ldots f_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau_1,\tau_2\ldots\tau_n)\exp[j2\pi(f_1\tau_1+f_2\tau_2+\ldots+f_n\tau_n)]d\tau_1 d\tau_2 d\tau_n\,. \quad (4)$$

Для упрощения дальнейших расчётов полагаем, что нелинейные передаточные функции являются симметричными функциями своих аргументов, т.е. имеется возможность изменять порядок аргументов $H_n(f_1,f_2,\ldots f_n)$.

Выполним обратное преобразование Фурье передаточной функции порядка n (4). В результате получим выражение нелинейной импульсной характеристики порядка n:

$$h_n(\tau_1,\tau_2\ldots\tau_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}H_n(f_1,f_2,\ldots f_n)\exp[j2\pi(f_1\tau_1+f_2\tau_2+\ldots+f_n\tau_n)]df_1 df_2 df_n\,. \quad (5)$$

После этого обратимся к соотношению вход – выход (3) и запишем его в виде

$$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}y_n(t)\,, \quad (6)$$

где

$$y_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau_1,\tau_2\ldots\tau_n)x(t-\tau_1)\ldots x(t-\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n\,. \quad (7)$$

Подставляя (5) в (7) и выполняя многократное интегрирование по $\tau_1,\tau_2\ldots\tau_n$ получим

$$y_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}H_n(f_1,f_2,\ldots f_n)\prod_{i=1}^{n}X(f_i)\exp(j2\pi f_i t)df_i\,, \quad (8)$$

где $X(f_i)$ – амплитудно-частотный спектр входного воздействия

Эта формула в удобной форме выражает члены n-го порядка разложения входного сигнала как функцию спектра на входе $X(f_i)$:

$$X(f)=\delta(f-f_{вх1})+\delta(f-f_{вх2})+\ldots+\delta(f-f_{вхn})\,. \quad (9)$$

При таком входном сигнале представление выходного сигнала (3) и (8) принимает следующую форму:

$$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}H_n(f_1,f_2,\ldots f_n)\prod_{i=1}^{n}[\delta(f-f_{вх1})+\delta(f-f_{вх2})+\ldots+\delta(f-f_{вхn})]\exp(j2\pi f_i t)df_i\,. \quad (10)$$

Произведение суммы дельта функций даёт сумму всех различных членов вида

$$\delta(f-f_{k1})+\delta(f-f_{k2})+\ldots+\delta(f-f_{kn})\,. \quad (11)$$

причём каждый индекс κ_i принимает значения от 1 до n. Если каждые f_{ki} фигурируют в произведении (11) m_i раз, то имеется

$$\frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_n!}=(n;m_1,m_2,\ldots,m_n) \quad (12)$$

членов, которые, если не считать перестановок, идентичны друг другу. В соотношении (12) мультипликативный коэффициент обозначен как *(n; m_1, m_2 ... m_n)*. Произведем действия в соответствии с (10) и объединим полученные члены. Тогда результат можно представить так:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m} \frac{n!}{m_1! m_2! \ldots m_n!} H_n(f_{k1}, \ldots, f_{kn}) \exp[j2\pi(f_{k1} + \ldots + f_{kn})]t\,, \tag{13}$$

где m под знаком суммы показывает, что сумму входят все различные множества $\{m_i\}$, так, что

$$m_i \prec m_{i+1} \text{ и } \sum_{i=1}^{n} m_i = n\,. \tag{14}$$

Неравенство $m_i \prec m_{i+1}$ упорядочивает частоты в $\{f_{mi}\}$ по индексу таким образом, чтобы наборы частот, отличающиеся только перестановкой, не повторялись.

Таким образом, мы получили, что в (13) коэффициент при $\exp[i2\pi(f_{вх1} + \ldots f_{вхn})t]$ равен $n! H_n(f_{вх1}, \ldots, f_{вхn})$. Отсюда можно заключить, что существует рекуррентный метод определения всех нелинейных передаточных функций по уравнению, описывающему систему.

Данный метод состоит в следующем:

1. Система вначале «зондируется» одним экспоненциальным входным воздействием, в результате чего находится $H_1(f)$.

2. Затем подаётся сумма двух экспонент и определяется $H_2(f_{вх1}, f_{вх2})$, выражается через $H_1(f)$.

3. При продолжении этой процедуры на каждом шаге добавляется по одной дополнительной экспоненте, вплоть до *n*-го порядка, на котором входной сигнал представляет собой сумму n экспонент с частотами $(f_{вх1}, \ldots, f_{вхn})$.

Отсюда вытекает, что нелинейная передаточная функция порядка *n* строится из всех нелинейных передаточных функций низших порядков (рис. 1).

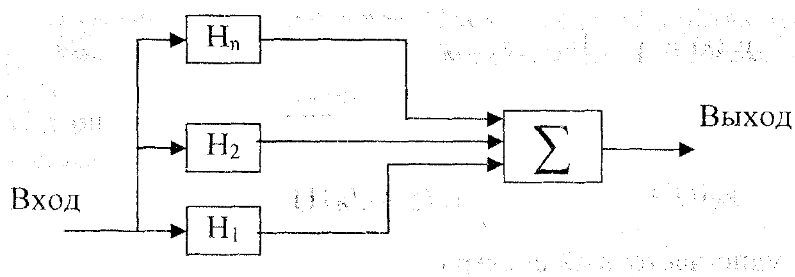

Рис.1

Следовательно, зная параметры входного сигнала *x(t)* и передаточную функцию *n*-го порядка H_n мы можем проанализировать интересующие нас параметры выходной реакции системы *y(t)* и тем самым решить поставленную задачу.

Для иллюстрации рассмотрим конкретный случай применения этого метода. В этих целях систему необходимо разбить на типовые элементы (для упрощения анализа функционирования системы). После определения передаточных функций для каждого элемента, будет определена суммарная передаточная функция системы, вид которой зависит от последовательности соединения элементов (последовательного, параллельного или с обратной связью).

Итак, возьмем нелинейную цепь (рис. 2), которая состоит из концентратора, линейного и нелинейного резистора, соединённых параллельно с источником тока *i(t)*.

Ток *i(t)* и напряжение на конденсаторе *u(t)* связаны дифференциальным уравнением

$$i(t) = C\frac{d}{dt}u(t) + K_1 u(t) + K_2 u^2(t)\,, \tag{15}$$

в котором $K_1 = \dfrac{1}{R}$.

Ток $i(t)$ отождествим с $x(t)$, а напряжение $u(t)$ с $y(t)$. После подстановки в качестве $u(t)$ величины, определяемой (13), можно, воспользовавшись последовательностью входных сигналов, вычислить последовательные нелинейные передаточные функции этой цепи.

В качестве исходного входного сигнала возьмем

$$i(t) = \exp(j2\pi f_{вх}t)\,. \tag{16}$$

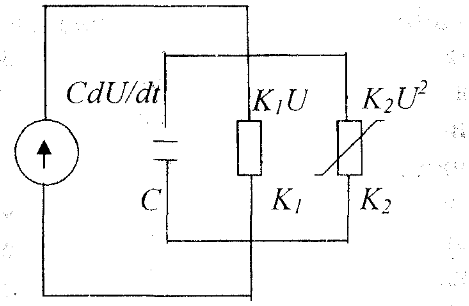

Рис. 2

Приравнивая коэффициенты $\exp(j2\pi f_{вх}t)$ в обеих частях (14) получаем

$$1 = (j2\pi f_{вх}C + K_1)H_1(f_{вх})\,. \tag{17}$$

Таким образом, ядро Вольтерра первого порядка для этой цепи оказывается просто решением (14) в предположении, что K_2=0, а нелинейность разомкнута:

$$H_1(f_{вх}) = \frac{1}{j2\pi f_{вх}C + K_1}\,. \tag{18}$$

Поступая таким же образом с суммой двух экспонент

$$i(t) = \exp(j2\pi f_{вх1}t) + \exp(j2\pi f_{вх2}t) \tag{19}$$

и приравнивая коэффициенты $2!\exp[j2\pi(f_{вх1} + f_{вх2})t]$ в обеих частях (14) после подстановки величин $u(t)$ из (13), получаем

$$0 = [j2\pi(f_{вх1} + f_{вх2})C + K_1]H_2(f_{вх1}, f_{вх2}) + K_2H_1(f_{вх1})H_1(f_{вх2})\,. \tag{20}$$

Решая (19) относительно $H_2(f_{вх1}, f_{вх2})$ и учитывая (16) находим

$$H_2(f_{вх1}, f_{вх2}) = -K_2H_1(f_{вх1})H_1(f_{вх2})H_1(f_{вх1} + f_{вх2})\,. \tag{21}$$

Затем берётся сумма трёх экспонент

$$i(t) = \exp(j2\pi f_{вх1}t) + \exp(j2\pi f_{вх2}t) + \exp(j2\pi f_{вх3}t)\,. \tag{22}$$

Приравнивая коэффициенты при $3!\exp[j2\pi(f_{вх1} + f_{вх2} + f_{вх3})t]$ в обеих частях (14), приходим к выражению

$$\begin{aligned} H_3(f_{вх1}, f_{вх2}, f_{вх3}) = -\frac{1}{3}K_2[H_1(f_{вх1})H_2(f_{вх2}, f_{вх3}) + \\ + H_1(f_{вх2})H_2(f_{вх1}, f_{вх3}) + H_1(f_{вх3})H_2(f_{вх1}, f_{вх2})]H_1(f_{вх1} + f_{вх2} + f_{вх3}) \end{aligned} \tag{23}$$

Подставляя выражение для ядра второго порядка (20) получим

$$\begin{aligned} H_3(f_{вх1}, f_{вх2}, f_{вх3}) = -\frac{1}{3}K_2^2H_1(f_{вх1})H_1(f_{вх2})H_1(f_{вх3})[H_1(f_{вх1} + f_{вх2}) + \\ + H_1(f_{вх2} + f_{вх3}) + H_1(f_{вх1} + f_{вх3})]H_1(f_{вх1} + f_{вх2} + f_{вх3}). \end{aligned} \tag{24}$$

Дальнейшие вычисления производятся аналогично.

Достоинство рассмотренного метода анализа нелинейной системы состоит в том, что он допускает рекурсивный подход для получения передаточных функций системы.

Выводы

1. Технические решения, которые будут применены в системах мобильной связи третьего и четвертого поколений, направлены на использование технологии CDMA. Одним из недостатков широкополосных систем является чувствительность этих систем к нелинейным искажениям. Поэтому возникает задача анализа таких систем на воздействие нескольких входных широкополосных сигналов для дальнейшей оценки возможности приема и обработки информации.

2. В последнее десятилетие с целью исследования нелинейных структур используются методы, базирующиеся на свойствах нелинейных функционалов и их аппроксимаций в виде функциональных рядов (полиномов) Вольтерра. Известные достоинства этих методов – естественность описания операторов для многих случаев практики, одновременный учет нелинейных и инерционных свойств цепей и др. привлекли к этим методам ряд исследователей как в стране, так и за рубежом. Однако данный метод ограничивает сложность в получении ядер.

3. В работе предложен рекуррентный метод определения всех нелинейных передаточных функций, который состоит в следующем: Система вначале «зондируется» одним экспоненциальным входным воздействием, в результате чего находится $H_1(f)$. Затем подаётся сумма двух экспонент и определяется $H_2(f_{вх1}, f_{вх2})$ выражается через $H_1(f)$. При продолжении этой процедуры на каждом шаге добавляется по одной дополнительной экспоненте, вплоть до n-го порядка, на котором входной сигнал представляет собой сумму n экспонент с частотами $(f_{вх1}, \ldots, f_{вхn})$.

Список литературы: 1. *Колхеп Р.* Беспроводные сети. М.: Эко-Трэндс, 2004. 159 с. 2. *Свойства* выходного сигнала систем, описываемых рядами Вольтерра (нелинейных систем с памятью), при подаче на вход гармонических колебаний и гауссова шума // ТИИЭР. 1970. Т 63, №12. 3. *Бедросян, Райс.* Искажение и перекрёстные помехи при линейной фильтрации сигналов с угловой модуляцией // ТИИЭР. Т.56, №1; 4. *S.Narayanan,* Application of Volterra series to intermodulation distortion analysis of transistor feedback amplifier // IEEE Trans.Circuit Theory, vol.CT-17,Nov.1970. 5. *Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С.* Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М.: Радио и связь. 1976. 448 с.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 10.01.2006