

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ _____ ” _____ 2020 р.

ЗАВДАННЯ НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Кобозеву Владиславу Костянтиновичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Дослідження оптимального методу скінченних елементів при розв'язанні крайової задачі кручення стержня

затверджена наказом по університету від 23 жовтня 2020 р. № 1422 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 грудня 2020 р.

3. Вихідні дані до роботи задача Діріхле для рівняння Пуассона

$\Delta u(x, y) = f(x, y) = -2$, $(x, y) \in D$, $u(x, y) = 0$, $(x, y) \in \Gamma$, де D – область форми кута

$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\} \setminus \{(x, y) : c \leq x \leq a, c \leq y \leq b\}$, з розбиттям виду

$x_k = \frac{a}{m} \cdot k$, де $k = 0, 1, \dots, m$; $y_l = \frac{a}{n} \cdot l$, де $l = 0, 1, \dots, n$ та $a, b \geq 1$, а Γ – границя області

D .

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз проблеми розв'язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона зі сталою правою частиною

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз проблеми _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	вересень 2020 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	жовтень – листопад 2020 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	листопад – грудень 2020 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	листопад – грудень 2020 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	грудень 2020 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	грудень 2020 р.	виконано

Дата видачі завдання 1 вересня 2020 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Литвин О.М.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 64 с., 15 табл., 13 рис., 2 дод., 11 джерела.

ОПТИМАЛЬНИЙ МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, КЛАСИЧНИЙ МЕТОД, МЕТОД РІТЦА, ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ, РІВНЯННЯ ПУАССОНА.

Об'єкт дослідження – оптимальний метод скінченних елементів.

Мета роботи – дослідити оптимальний метод скінченних елементів при розв'язанні крайової задачі кручення стержня та кручення стержня форми кута в перерізі.

Методи дослідження – метод Рітца, класичний метод, оптимальний метод скінченних елементів.

Атестаційна робота присвячена глибокому дослідженню оптимального методу скінченних елементів, знаходження точних оцінок наближення диференційовних функцій та рівнянь, відповідних класів за допомогою кусочно-поліноміальних і узагальнених кусочно ермітових інтерліантов, створення методу ОМСЕ, його обґрунтування для випадку, зводиться до лінійної інтерлінації, розв'язання крайових, розробка алгоритмів задач методом ОМСЕ в разі прямокутних елементів та прямокутних елементів у формі кутка, дослідження симетрично-крайових задач, що виникають при вирішенні крайових задач методом ОМСЕ.

ABSTRACT

Introductory note: 64 pages, 15 tables, 16 figures, 2 appendixes, 11 sources.

THE OPTIMAL METHOD OF FIXED ELEMENTS, THE CLASSICAL METHOD, THE METHOD OF THE RITCA, THE DIRICLE TASK, THE POISSON EQUATION.

Object of research – optimal finite elements.

Purpose of work – to investigate the optimal finite element method in solving the boundary-value problem of torsion of a rod in the shape of an angle in a section.

Methods of research – the Ritz method, the classical method, the optimal method of elements finite.

The thesis is devoted to the study of the optimal method of skinned elements, the finding of exact estimates of the approximation of differentiating functions of the corresponding classes with the help of piecewise-polynomial and generalized piecewise ermite interlinates, the creation of the OFME method, its substantiation for the case, is reduced to linear interleaving, the development of algorithms the cutting of boundary value problems by the method of OFME in the case of rectangular elements, development of algorithms the cutting of boundary, the study of symmetric-boundary problems that arise in the solution of border counties by the method of OFME.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	8
1 Системний аналіз проблеми розв’язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона зі сталою правою частиною та постановка задач дослідження	10
1.1 Системний аналіз проблеми розв’язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона зі сталою правою частиною	10
1.1.1 Вербальна модель системи	10
1.1.2 Морфологічний опис системи	11
1.1.3 Функціональна модель системи	11
1.1.4 Інформаційна модель системи	14
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми розв’язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона зі сталою правою частиною	15
1.2.1 Модель аналізу проблеми	15
1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадовільністю методом аналізу ієрархій	16
1.2.3 Модель вирішення проблеми	21
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	21
1.3.1 Змістовна постановка задачі	21
1.3.2 Формальна постановка задачі	22
1.4 Постановка задач дослідження	23
2 Вибір та обґрунтування метода розв’язання	28
2.1 Огляд відомих класичних схем методів	28
2.1.1 Класичний метод кінцевих елементів	28
2.1.2. Метод сіток	29
2.1.3 Метод Рітца.....	30
2.2 Загальна теорія оптимальної схеми методу кінцевих елементів	32
2.2.1 Точний розв’язок симетрично – граничної крайової задачі	32
2.2.2 Рівняння Пуассона. Прямокутні елементи у формі кута	35

	7
2.3.3 Оцінка швидкості збіжності методу OMCE	46
3 Програмна реалізація	56
3.1 Mathcad як система символної математики.....	56
3.2 Опис програми.....	57
4 Результати обчислювального експерименту	59
4.1 Результати обчислень для $n = 6$	59
4.2 Результати обчислень для $n = 4$	63
4.3 Результати обчислень для $n = 8$	69
5 Аналіз можливих застосувань	75
Висновки	76
Перелік джерел посилання	77
Додаток А Програмна реалізація $n = 4$	78
Додаток Б Програмна реалізація $n = 8$	84

ВСТУП

Значне поширення оптимального методу скінченних елементів (ОМСЕ) викликало великі численні дослідження з побудови повних систем координатних функцій, які собою забезпечують:

– потрібний клас диференційованості наближеного шуканого розв'язку в області інтегрування;

– необхідний порядок збіжності наближеного до точного розв'язку.

При цьому залежно від способів розбиття області інтегрування на елементи (прямокутні, трикутні тощо) які розкривали себе, в роботах ряду авторів отриманих і дослідженням різних систем функцій.

У разі розбиття області на прямокутні елементи (або в m -вимірному випадку на гіперкуби) значне поширення набули інтерполянти а саме кусочно-ермітові.

Інтерлінації, а також інтерфлетация функцій є одним з найбільш інтенсивно розвиваються, а інколи й найважливіші, розділів математичного аналізу. Інтерес до них дуже великий, він обумовлений широким застосуваннями як в самій математиці (функції побудови, що задовольняють неоднорідним крайовим умовам; теорія функції наближення), так навіть і за її межами (відновлення поверхонь по відомим їх перетинах – даними радіолокації або гідролокації; обробка результатів експериментів, в проектуванні літаків, автомобілів, судів.

До теперішнього часу метод Л.В. Канторовича розв'язання крайових задач для рівнянь з приватними похідними шляхом зведення їх до систем звичайних диференціальних рівнянь, свій подальший розвиток знайшов у вигляді методів зведення до систем нелінійних (метод Ніду – Айнола Л., Керр А.Д., Александер Х., Вікторов А.Д., Підгорний А.Н. і Литвин О.М.) та лінійних (метод Ліду – Підгорний А.Н. і Литвин О.М., Федько В.В., Литвин О.М.) інтегродиференціальних рівнянь (і. – д.у.). До цих методів примикає саме наш метод оптимальних кінцевих елементів (метод ОМСЕ – Литвин О.М.). З огляду на їх високу точність і швидкість, актуальною є розробка їх чисельних алгоритмів

реалізації, а також саме оцінка швидкості збіжності.

У нашій роботі сформульовано і доведено теореми, які дозволяють створювати вперше алгоритми знаходження оптимальні функції координат в методі кінцевих елементів в разі прямокутних і трикутних елементів, та також прямокутних елементів у формі кута в перерізі. Для кожної окремої схеми була знайдена оцінка швидкості ОМСЕ а саме її збіжності.

Вперше були введені в дослідження і розгляд симетрично – крайові задачі, що виникають при розв'язуванні і вирішенні крайових задач методами ОМСЕ.

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ЗІ СТАЛОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз проблеми розв'язання задачі Діріхле зі сталою правою частиною для рівняння Пуассона

1.1.1 Вербальна модель системи

Об'єкт аналізу – «Задача Діріхле для рівняння Пуассона».

Предмет аналізу – «Аналіз проблеми розв'язання задачі Діріхле зі сталою правою частиною для рівняння Пуассона».

Точка зору: дослідник.

Ціль: Знайти метод, а саме оптимальній метод, для розв'язання даної задачі та подібних до нашої задачі.

Модель типу «чорний ящик» (рис.1.1) увагу акцентує на взаємодії системи із зовнішнім середовищем.

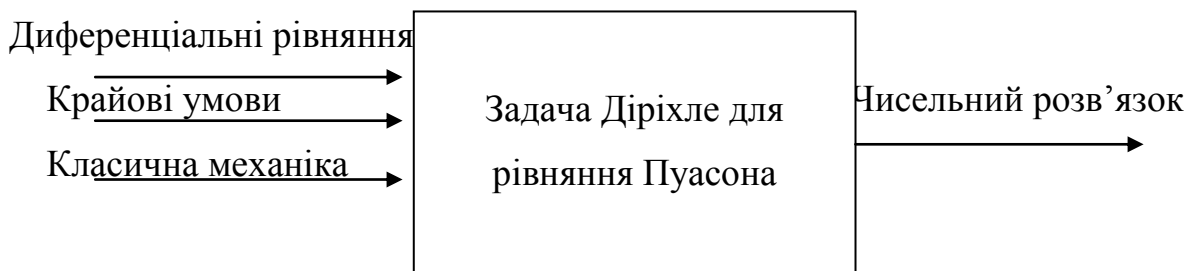


Рисунок 1.1 – Модель типу «чорний ящик»

У нашій моделі «чорний ящик» виходами є її цільові продукти, а входи – це вплив на систему середовищ. Зміст «чорного ящика» не розкривається, тому що звертається увага тільки на саму межу системи. Межа, в свою чергу, підкреслює саму цілісність системи, відокремленість її від зовнішнього середовища та взаємодію системи і середовища.

1.1.2 Морфологічний опис системи

Морфологічний опис системи ми будемо розглядати з опис зовнішнього середовища, який приведений на рис. 1.2.

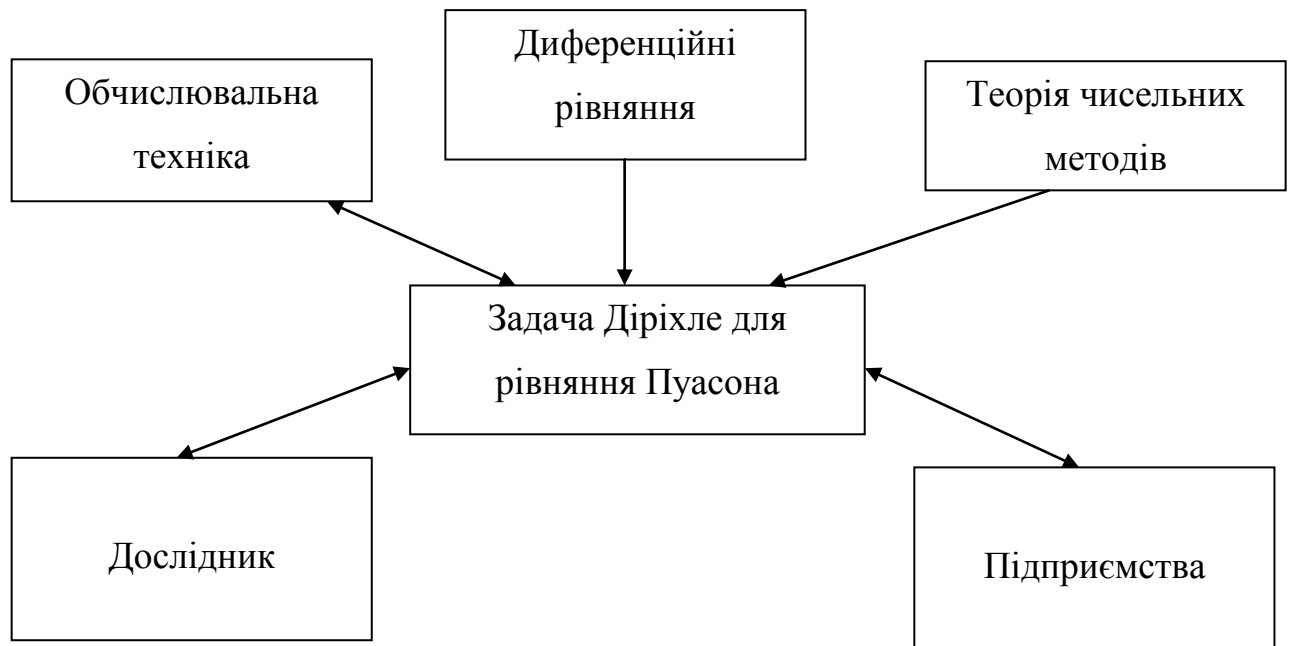


Рисунок 1.2 – Модель системи зовнішнього середовища

Зовнішнє середовище – сукупність всіх об'єктів за межами самої системи, зміна об'єктів, чії властивості змінюються в результаті поведінки системи а також які впливають на систему.

1.1.3 Функціональна модель системи

Контекстна діаграма є вершиною деревовидної діаграмою структури і являє собою саме такий загальний опис системи та її взаємодії між зовнішнім середовищем.

Контекстна діаграма зображує собою функціонування системи в її цілому (рис. 1.3). В рамках методології IDEF0 процес представляється у наборі у вигляді елементів, які показуються ресурси, а також, взаємодіють між собою що

підкреслює себе у кожній роботі.

Після опису системи повністю проводиться розбиття її на фрагменти великі та малі. Процес який ми розглядаємо називається функціональною декомпозицією, а діаграми, які описують кожну взаємодію фрагменту і фрагментів, називаються діаграмами декомпозиції.

Після декомпозиції діаграми контекстної проводиться декомпозиція кожного великого фрагмента системи на більш дрібні і так далі, для досягнення потрібного опису рівня деталізації.

Після того, як описали контекст, проводиться побудова наступних діаграм в нашій ієрархії. Кожна діаграма, а саме наступна, є більш докладним описом однієї з робіт на діаграмі, а саме попередній. У нашому випадку розглядається функціонування системи «Завдання розв'язати рівняння Пуасона для задачі Діріхле». Декомпозиція діаграми, а саме, контекстної (рис. 1.4) демонструє основні функції системи та навіть їх деталізації за рівнями (рис. 1.5).

IDEF3 – це метод, який бере за основу мету дати можливість описати ситуацію аналітикам, коли виконуються процеси в певній послідовності, а також описати об'єкти, які беруть участь в одному процесі – спільно.

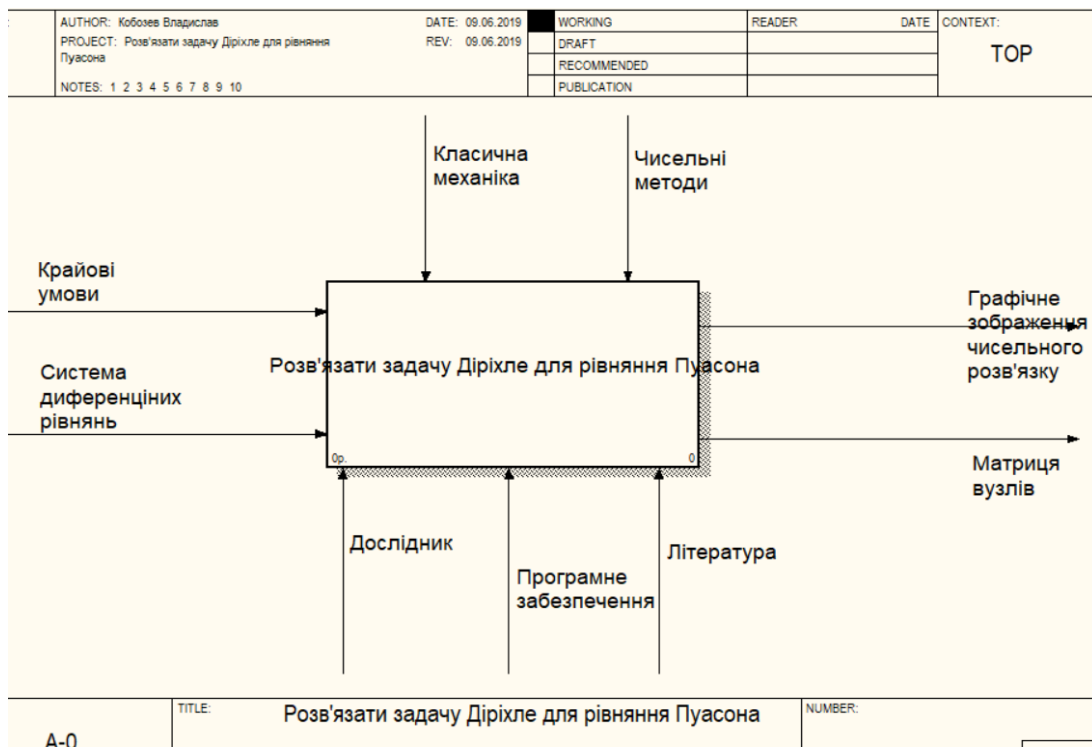


Рисунок 1.3 – Контекстна діаграма (рівень А-0)

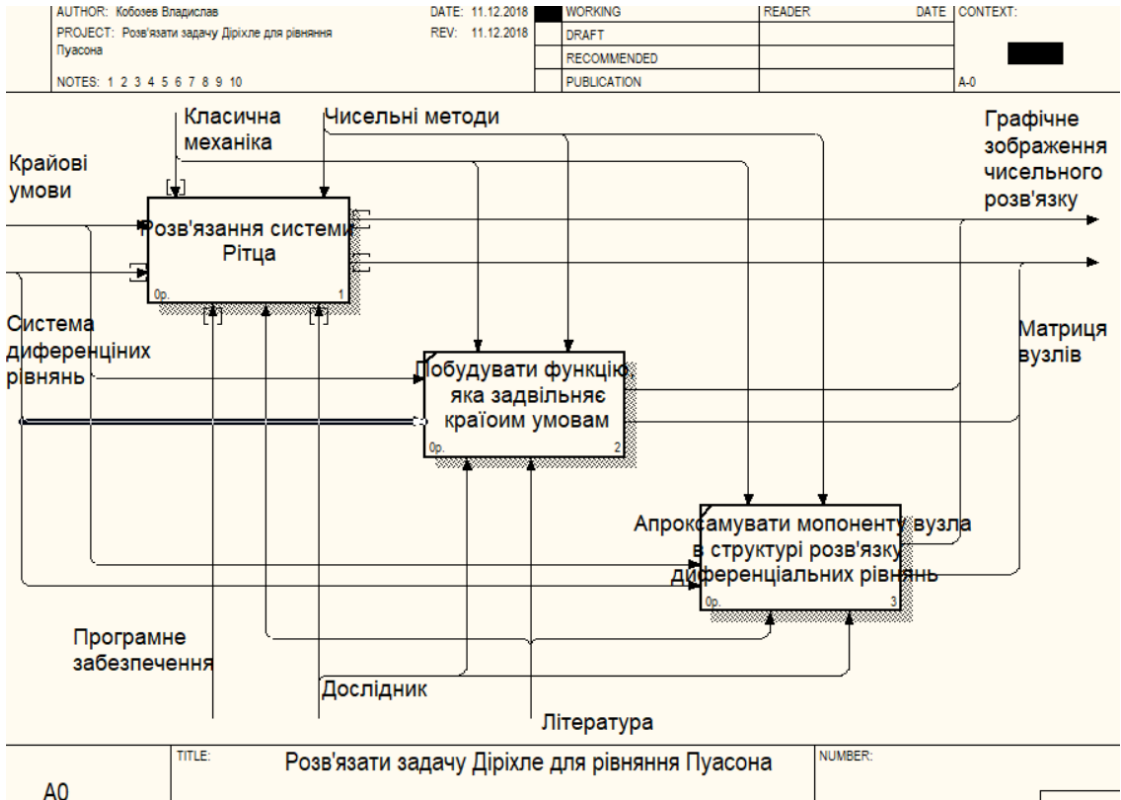


Рисунок 1.4 – Декомпозиція роботи «Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Пуасона»: рівень A0

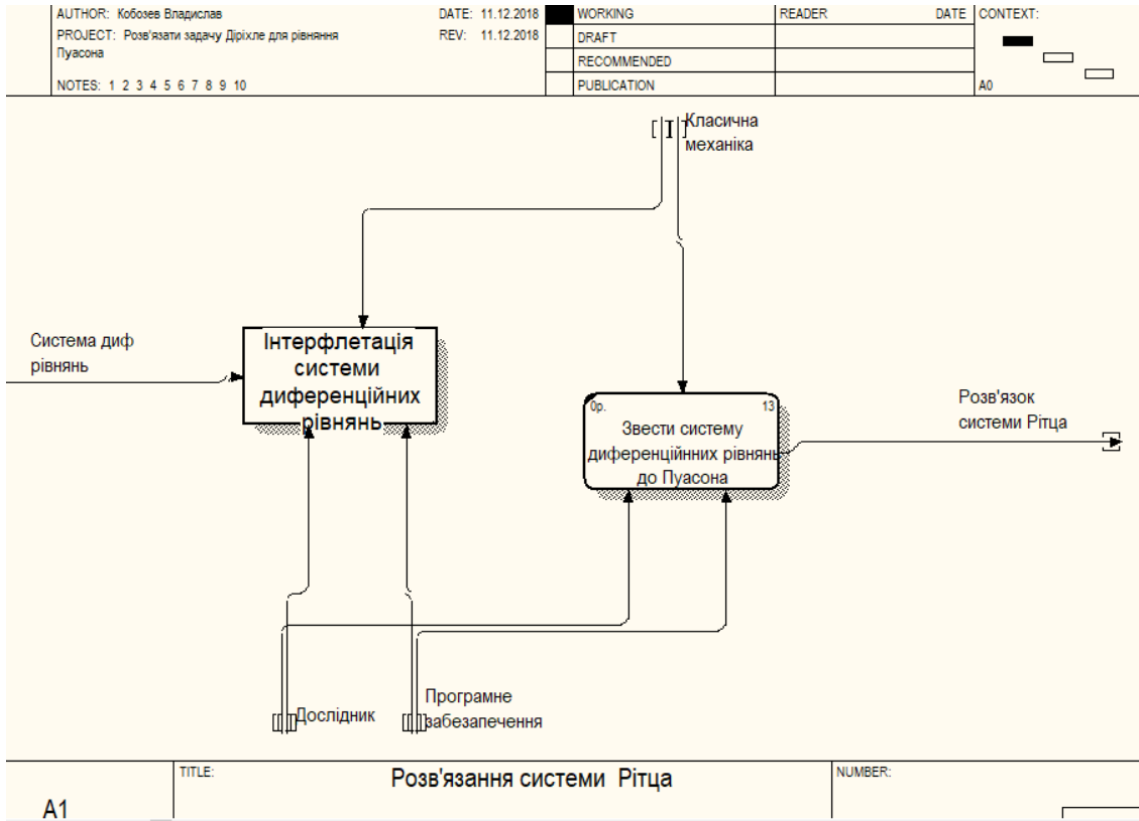


Рисунок 1.5 – Декомпозиція роботи «Розв'язання системи Рітца»: рівень A1

1.1.4 Інформаційна модель

Інформаційна модель відображає систему відносини між елементами у вигляді системи структур даних, акцентуючи дослідника, а саме його увагу на складі і взаємозв'язку потоків даних.

Діаграми потоків даних (Data Flow Diagramming, DFD) використовуються для обробки інформації та опису документообігу. Подібно DFD, IDEF0 представляє систему моделі як мережу пов'язаних систему між собою систему. Їх можна використовувати як доповнення до нашої моделі IDEF0 для більш детального та наочного відображення поточних операцій. DFD-діаграма представлена на рис. 1.6.

Головна мета DFD – показати, як робота кожного елемента перетворює свої вхідні дані у вихідні, а також виявити та знайти відносини між кожними їх цих робіт. Будь-яка DFD-діаграма може розмішувати роботи, сутності а саме зовнішні, потоки даних (стрілки) і сховища даних.

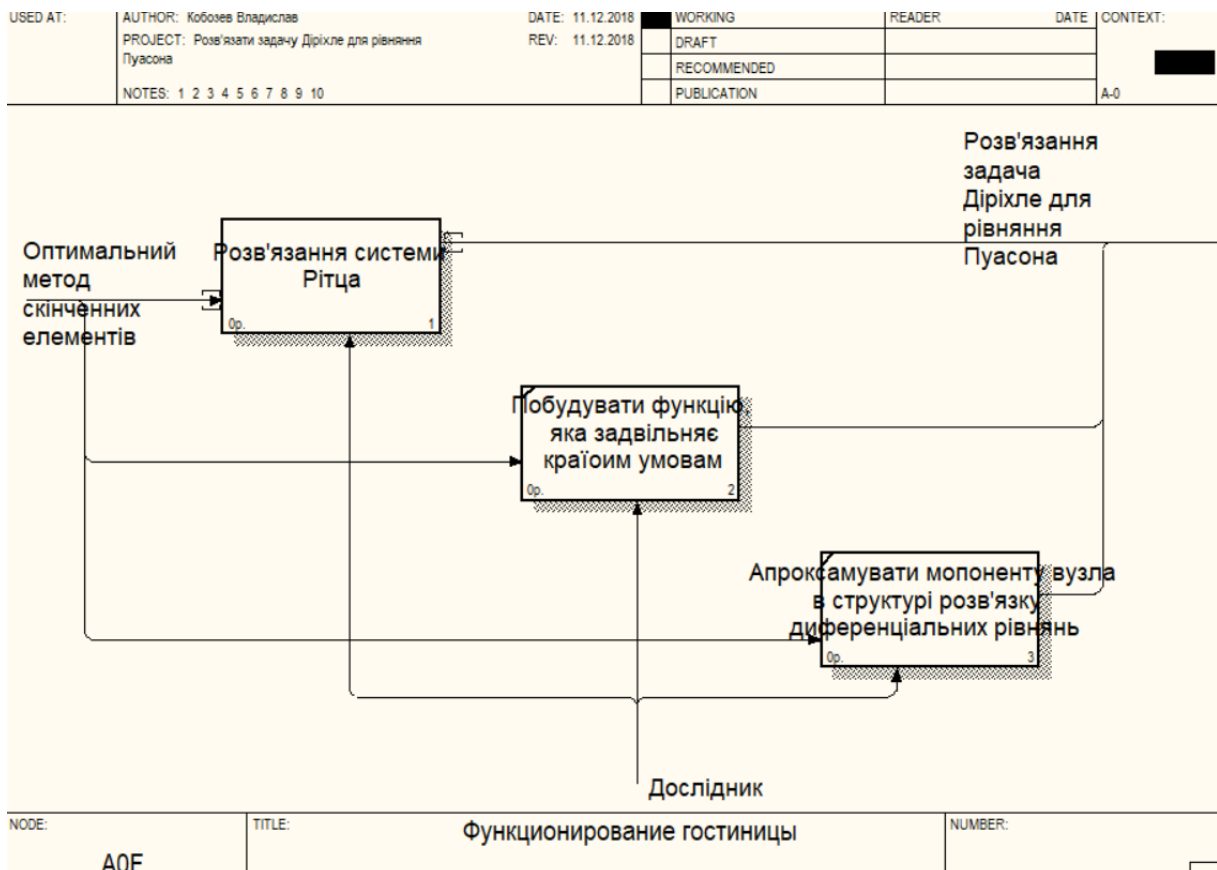


Рисунок 1.6 – DFD-діаграма

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми розв'язання рівняння Пуассона для задачі Діріхле зі сталою правою частиною

1.2.1 Модель аналізу проблеми

Одним з методів, які застосовують для структуризації проблеми ієрархічний підхід, є метод ієрархії а саме аналітичної (MAI) (англ. Analytic Hierarchy Process – АНР), розроблений Т. Сааті (США, 1980 р.) і розвинений саме його учнями. MAI реалізує задачі декомпозиції експертного оцінювання на більш прості частини складові. У результаті наших відносин визначається значимість альтернатив за ієрархічною системою критеріїв. Відносна значимість виражається чисельно у виді та вигляді пріоритетів векторів. Отримані у спосіб який ми розглянули значення векторів пріоритетів є оцінками в шкалах відношень і відповідають так як зараз називають жорстким оцінкам або жорсткими.

Досліджуємо задачу про вибір методу, яким буде розв'язана рівняння Пуассона для задачі Діріхле зі сталою правою частиною. Проблема буде вирішуватися за наступними критеріями:

- критерій перший: точність розв'язання;
- критерій другий: задовільність граничних умов;
- критерій третій: врахування особливостей точного розв'язку в кутових точках;
- критерій четвертий: оптимальність.

Обирати будемо з множини альтернатив:

- альтернатива перша: метод сіток;
- альтернатива друга: OMCE;
- альтернатива третя: метод Рітца.

Побудуємо структуру, а саме, ієрархічну, використовуючи метод парних порівнянь. Ієрархічна, наша ієрархічна, структура приведена на рисунку 1.7

Є такі модифікації MAI, які визначаються характером зв'язків між альтернативами і критеріями, а також методом порівняння альтернатив.

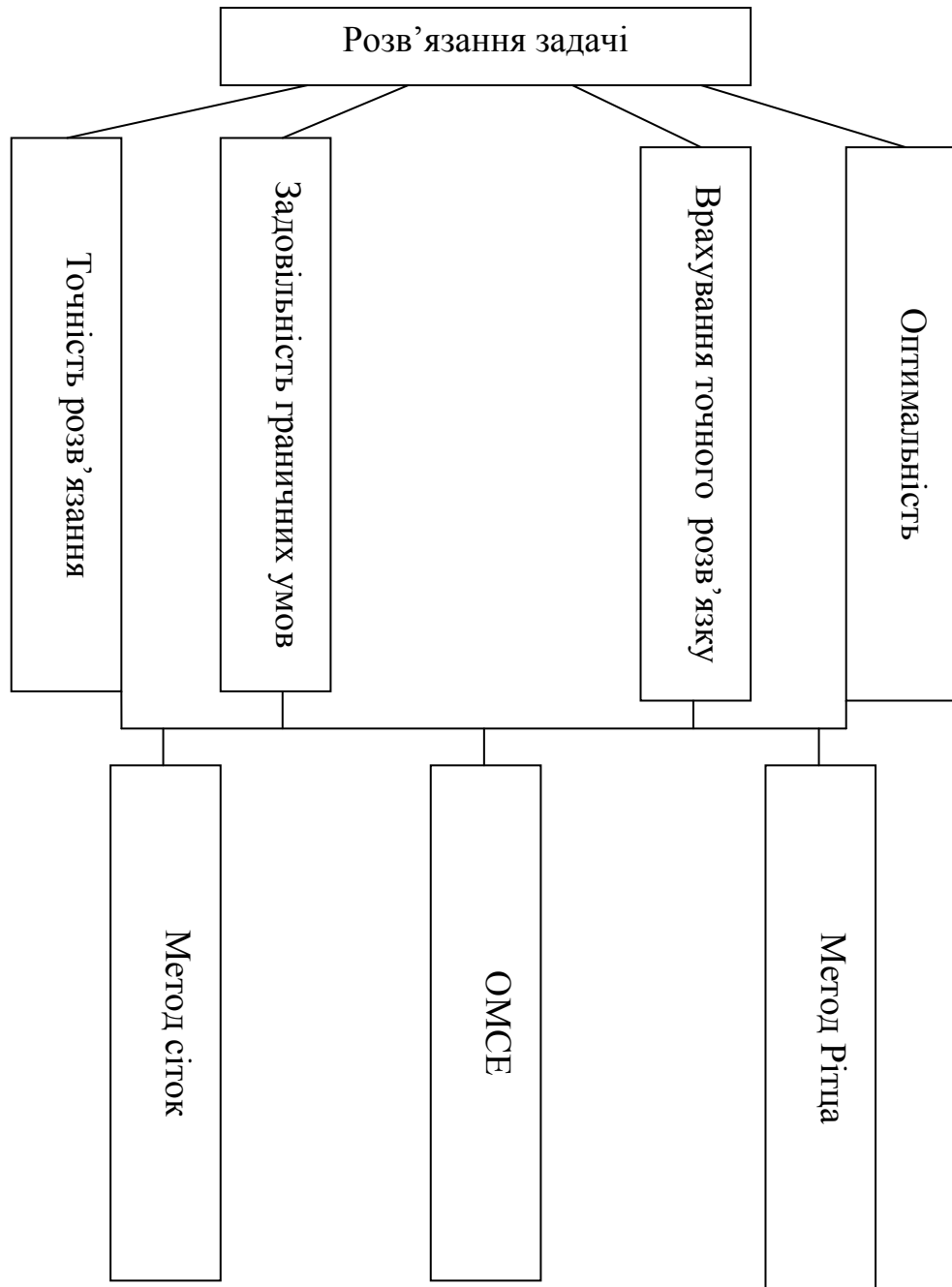


Рисунок 1.7 – Ієрархічна модель процесу аналізу розв'язання задачі

1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

Для продовження аналізу, та продовження порівняння, нам необхідно побудувати моделі, а саме, матриці попарних порівнянь, а також системи критеріїв.

За шкалою Т. Сааті побудована матриця критеріїв попарних порівнянь (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Матриця попарних порівнянь

	K1	K2	K3	K4	Середнє геометричне за рядками	Вектор пріоритетів
K1	1	4	7	8	$x_1 = \sqrt[4]{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} = 3,8686$	$p_1^K = \frac{x_1}{\sum} = 0,5821$
K2	$\frac{1}{4}$	1	8	9	$x_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 8 \cdot 9} = 2,0597$	$p_2^K = \frac{x_2}{\sum} = 0,3101$
K3	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{2}$	$x_3 = \sqrt[4]{\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}} = 0,3073$	$p_3^K = \frac{x_3}{\sum} = 0,0461$
K4	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	2	1	$x_4 = \sqrt[4]{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot 2 \cdot 1} = 0,4082$	$p_4^K = \frac{x_4}{\sum} = 0,0611$
					$\sum = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$ $= 6,644071$	

$$\text{Індекс узгодженості (ІУ)} = \frac{4,463 - 4}{4 - 1} = 0,1541.$$

Випадкова узгодженість = 0,131.

$$\text{Відносна узгодженість (ВУ)} = \frac{0,154}{0,19} = 0,15 = 15\%.$$

Для прийняття рішення про методу використання, необхідно провести розрахунки порівняльний аналіз альтернатив. В цій модифікації МАІ розглядається функціональним складом альтернатив і ієрархія з однаковими числом, цифрою. Для встановлення важливості відносної елементів ієрархії використовується Сааті – шкала відношень.

Скористувавшись шкалою, а саме шкалою Сааті, котра дозволяє експерту

ставити у відповідність ступеням переваги порівнюваного об'єкта одного над іншим деяке число та оцінивши їх щодо альтернатив кожної, отримаємо дані, які представлені в таблицях 1.2 – 1.6.

Таблиця 1.2 – Порівняння за першим критерієм

K1	A1	A2	A3
A1	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
A2	6	1	3
A3	7	$\frac{1}{3}$	1

Таблиця 1.3 – Порівняння за другим критерієм

K2	A1	A2	A3
A1	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$
A2	8	1	5
A3	6	$\frac{1}{5}$	1

Таблиця 1.4 – Порівняння за третім критерієм

K3	A1	A2	A3
A1	1	4	$\frac{1}{6}$
A2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{7}$
A3	6	7	1

Результати порівнянь альтернатив за четвертим критерієм наведені у таблиці 1.5.

Таблиця 1.5 – Порівняння за четвертим критерієм

К4	A1	A2	A3
A1	1	$\frac{1}{3}$	4
A2	3	1	5
A3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	1

Для кожної матриці розраховуємо так само вектор пріоритетів:

$$\vec{p}_1^A = \begin{pmatrix} 0,066 \\ 0,619 \\ 0,315 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2^A = \begin{pmatrix} 0,057 \\ 0,719 \\ 0,224 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3^A = \begin{pmatrix} 0,187 \\ 0,070 \\ 0,743 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_4^A = \begin{pmatrix} 0,280 \\ 0,627 \\ 0,094 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриці, які ми розглядаємо, є попарних порівнянь альтернатив – це матриці третього порядку, то $RI^A = 0,58$. Індеси відносини і узгоджені узгодженості для парних порівнянь матриць альтернатив за кожним критерієм рівні:

$$CI_{K1}^A = 0,078, \quad CI_{K2}^A = 0,095, \quad CI_{K3}^A = 0,087, \quad CI_{K4}^A = 0,044,$$

$$CR_{K1}^A = 0,137, \quad CR_{K2}^A = 0,163, \quad CR_{K3}^A = 0,146, \quad CR_{K4}^A = 0,075.$$

Всі відносини узгодженості близькі до 0,1, що свідчить про дуже добру узгодженість висловлювання експерта.

Ми будемо розраховувати глобальні вектори, які ми не розгляда-

ли раніше, пріоритетів альтернатив. Саме цьому ми вектори пріоритетів локальних альтернатив з критерієм яки кожний складає матрицю

$$P^A = \begin{pmatrix} 0,066 & 0,057 & 0,187 & 0,280 \\ 0,619 & 0,719 & 0,070 & 0,627 \\ 0,315 & 0,224 & 0,743 & 0,094 \end{pmatrix}$$

і скористаємося ось цією формулою:

$$\vec{p} = P^A \vec{p}^K.$$

Саме тому вектори глобального пріоритету

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0,066 & 0,057 & 0,187 & 0,280 \\ 0,619 & 0,719 & 0,070 & 0,627 \\ 0,315 & 0,224 & 0,743 & 0,094 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,582 \\ 0,310 \\ 0,046 \\ 0,061 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,082 \\ 0,625 \\ 0,292 \end{pmatrix}.$$

Розрахуємо індекс відношення узгодженості і узгодженості для всієї ієрархії:

$$CI = CI^K + \vec{p}^K, \overline{CI}^A = 0,155 + 0,583 \cdot 0,078 + 0,310 \cdot 0,095 + \\ + 0,047 \cdot 0,087 + 0,062 \cdot 0,044 = 0,23586,$$

$$RI = RI^K + RI^A = 0,90 + 0,59 = 1,49,$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = 0,159,$$

що також можна вважати хорошою узгодженістю.

Максимальна компонента відповідає тільки другий альтернативі, OMCE.

1.2.3 Модель вирішення проблеми

З усіх отриманих результатів, які ми отримали при розрахунках раніше, ми, як особа, що приймає рішення, можемо зробити кінцеві та остаточні підрахунки і підсумувати висновки. У таблиці 1.7 наведені результати, що дозволяють нам сказати, що кращою, на наш огляд, для нас буде друга альтернатива, а саме метод R-функцій, все наведено у таблиці.

Таблиця 1.7 – Кінцеві дані

Критерій /Альтернатива	K1	K2	K3	K4	Узагальнені пріоритети
A1	0,067	0,058	0,188	0,281	0,083
A2	0,618	0,718	0,071	0,628	0,626
A3	0,316	0,225	0,744	0,095	0,293

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

1.3.1 Змістова постановка задачі

Розглянуто завдання: при заданому способі розбиття області G на прямокутні елементи отримати найкращу апроксимацію точного розв'язку рівняння Пуассона для задачі Діріхле оптимальним методом скінченних елементів (ОМСЕ) шляхом відповідного вибору системи фінітних і довільних постійних координатних функцій (що належать класу $C(G) \cap W_2^{(1)}(G)$), фігурують в схемі МСЕ, з використанням узагальненої, а саме, кусочно-ермітової інтерполяції. Вибір систем фінітних і довільних постійних координатних функцій здійснюється з наступного критерію оптимальності: мінімум функціоналу енергії, відповідного, до нашої, вихідної крайової задачі. Отримано інтегральне представ-

лення залишкового члена наближення, самого близького, узагальненими кусочно-ермітовим інтерполяціями. Ефективність нашої методики ілюструється прикладами, що показують, що якщо координатні функції в ОМСЕ представляти у вигляді стиснень і зрушень однієї фінітної функції, то при збільшенні кількості елементів зменшується виграш в точності в порівнянні зі звичайними, неоптимальними схемами, методу який ми розглядаємо, а саме МСЕ. Розглядається задача на чисте крутіння стержня у формі кута, поперечний переріз якого представляє область G , обмежену відрізками прямих,

$$G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\} \setminus \{(x, y) : c \leq x \leq a, c \leq y \leq b\}.$$

1.3.2 Формальна постановка задачі

Формальна постановка задачі виникає при визначенні координатних функцій в оптимальному методі кінцевих елементів (ОМСЕ – прямокутні елементи [1 – 3]) для рівнянь диференціальних еліптичного типу з постійними коефіцієнтами.

Теорема. Розв'язання початкової задачі можна уявити у вигляді

$$y(t) = z_1\left(t - \frac{1}{2}\right) + z_2\left(t - \frac{1}{2}\right), t \in (0, 1), \quad (1.1)$$

де $z_1(\tau)$, $\tau \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\tau = t - \frac{1}{2}$ – розв'язок крайової задачі

$$L_1(z_1) := \sum_{s=0}^N (a_s + b_s) z_1^{(2s)}(\tau) = \frac{1}{2} \left[f\left(\tau + \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2} - \tau\right) \right], \quad (1.2)$$

$$z_1^{(s)}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[y_{0s} + (-1)^{(s)} y_{1s} \right], \quad (1.3)$$

$$z_1^{(s)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[y_{1s} + (-1)^{(s)} y_{0s} \right],$$

де $z_2(\tau)$, $\tau \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\tau = t - \frac{1}{2}$ – розв’язок крайової задачі

$$L_2(z_2) := \sum_{s=0}^N (a_s + b_s) z_2^{(2s)}(\tau) = \frac{1}{2} \left[f\left(\tau + \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2} - \tau\right) \right],$$

$$z_2^{(s)}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[y_{0s} + (-1)^{(s+1)} y_{1s} \right], \quad (1.6)$$

$$z_2^{(s)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[y_{1s} + (-1)^{(s+1)} y_{0s} \right], \quad (1.7)$$

Розв’язання $z_1(\tau), z_2(\tau), \tau \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ має структуру нижче

$$z_1(\tau) = \sum_{s=1}^N c_s z_{1s}(\tau) + \frac{1}{a_N + b_N} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G_1(\tau, \xi) \frac{\left[f\left(\xi + \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2} - \xi\right) \right]}{2} d\xi,$$

$$z_2(\tau) = \sum_{s=1}^N c_l z_{2l}(\tau) + \frac{1}{a_N + b_N} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G_2(\tau, \xi) \frac{\left[f\left(\xi + \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2} - \xi\right) \right]}{2} d\xi, \quad (1.9)$$

коли $a_N - b_N \neq 0$, якщо $a_N - b_N \equiv 0$, то розглядається рівняння $N-1$ порядку; $z_{1s}(\tau)$ – парні функції фундаментальної системи розв’язку (1.2), а $z_{2l}(\tau)$ – непарні функції фундаментальної системи рішень (1.5), $G_1(\tau, \xi), G_2(\tau, \xi)$ – функції Гріна задач (1.2) – (1.4), (1.5) – (1.7) відповідно до цього.

1.4 Постановка задач дослідження

Розглянемо нашу задачу:

$$\Delta u(x, y) = -2, \quad (x, y) \in G, \quad (1.10)$$

$$u|_{\partial G} = 0, \quad (1.11)$$

Розіб'ємо G на прямокутні елементи прямими ікс та їгрик

$$x = x_i, \quad i = \overline{1, M}; \quad y = y_j, \quad j = \overline{1, N}$$

Позначимо через $\bar{\pi}$ множину індексів (i, j) , б відповідала нашим умовам: $(x_i, y_j) \in \bar{G}$, а через π – множину індексів (i, j) таких, що $(x_i, y_j) \in \bar{G} \setminus \partial G$.

$$\Delta_{1i} = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta_{2j} = y_{j+1} - y_j.$$

Наближене розв'язку задачі (1.10) – (1.11) будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned} u_{\pi}(x, y) = & C_{ij} \varphi_{ij} \left(\frac{x - x_i}{\Delta_{1i}} \right) \psi_{ij} \left(\frac{y - y_j}{\Delta_{2j}} \right) + C_{i+1, j} \varphi_{i+1, j} \left(\frac{x_{i+1} - x}{\Delta_{1i}} \right) \psi_{i+1, j} \left(\frac{y - y_j}{\Delta_{2j}} \right) + \\ & + C_{i, j+1} \varphi_{i, j+1} \left(\frac{x - x_i}{\Delta_{1i}} \right) \psi_{i, j+1} \left(\frac{y_{j+1} - y}{\Delta_{2j}} \right) + C_{i+1, j+1} \varphi_{i+1, j+1} \left(\frac{x_{i+1} - x}{\Delta_{1i}} \right) \psi_{i+1, j+1} \left(\frac{y_{j+1} - y}{\Delta_{2j}} \right), \end{aligned}$$

на кожному з прямокутників $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] = \pi_{ij} \subset G$.

Тут $\varphi_{\mu\nu}(x)$, $\psi_{\mu\nu}(y)$ – невідомі функції, що задовольняють умовам:

$$\varphi_{\mu\nu}(0) = \psi_{\mu\nu}(0) = 1, \varphi_{\mu\nu}(1) = \psi_{\mu\nu}(1) = 0, (\mu, \nu) \in \bar{\pi},$$

$C_{\mu\nu}, (\mu, \nu) \in \bar{\pi}$ – шукані сталі. Легко бачити, що

$$u_{\pi}(x_{\mu}, y_{\nu}) = C_{\mu\nu}, (\mu, \nu) \in \bar{\pi}.$$

Вважаючи $C_{\mu\nu} = 0$, як що $(x_{\mu}, y_{\nu}) \in \partial G$, отримаємо, що розв'язання у вигляді буде задовольняти граничній умові наведеній вище (1.11). Розв'язання вихідної задачі (1.10) – (1.11) замінимо на завданням про мінімумі функціоналу

$$J(u) = \int_0^1 \int_0^{0.5} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 4u \right] dx dy + \int_0^{0.5} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 4u \right] dx dy - \int_0^{0.5} \int_0^{0.5} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 4u \right] dx dy.$$

Підставляючи, можемо результуючий функціонал записати у вигляді $(x_0 = x, x_1 = 1 - x, y_0 = y, y_1 = 1 - y)$:

$$J(u_{\pi}) = \int_0^1 \int_0^{0.5} \sum_{\pi ij < G} \sum_{\pi ij < G} \Delta_{1i} \Delta_{2j} \left\{ \left[\sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \varphi'_{\mu\nu}(x_{\mu-i}) \psi_{\mu\nu}(Y_{\nu-j}) \right]^2 \Delta_{1i}^{-2} + \left[\sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \times \varphi_{\mu,\nu}(x_{\mu-i}) \psi'_{\mu\nu}(y_{\nu-j}) \right]^2 \Delta_{2j}^{-2} - 4 \sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}(x_{\mu-i}) \psi_{\mu\nu}(y_{\nu-j}) \right\} dx dy + \int_0^{0.5} \int_0^1 \sum_{\pi ij < G} \sum_{\pi ij < G} \Delta_{1i} \Delta_{2j} \left\{ \left[\sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \varphi'_{\mu\nu}(x_{\mu-i}) \psi_{\mu\nu}(Y_{\nu-j}) \right]^2 \Delta_{1i}^{-2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \times \varphi_{\mu,\nu}(x_{\mu-i}) \psi'_{\mu\nu}(y_{\nu-j}) \right]^2 \Delta_{2j}^{-2} - 4 \sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}(x_{\mu-i}) \psi_{\mu\nu}(y_{\nu-i}) \Big\} dx dy - \\
& - \int_0^{0.5} \int_0^1 \sum_{\pi ij \in G} \sum_{\pi ij \in G} \Delta_{1i} \Delta_{2j} \left\{ \left[\sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \varphi'_{\mu\nu}(x_{\mu-i}) \psi_{\mu\nu}(y_{\nu-j}) \right]^2 \Delta_{1i}^{-2} + \right. \\
& \left. + \left[\sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \times \varphi_{\mu,\nu}(x_{\mu-i}) \psi'_{\mu\nu}(y_{\nu-j}) \right]^2 \Delta_{2j}^{-2} - 4 \sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}(x_{\mu-i}) \psi_{\mu\nu}(y_{\nu-i}) \right\} dx dy.
\end{aligned}$$

Вважаючи функції $\varphi_{\mu\nu}, \psi_{\mu\nu}$ відомими, для визначення коефіцієнтів $C_{ij}, (i, j) \in \pi$ запишемо систему Рітца $((p, q) \in \pi)$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=p-1}^p \sum_{j=q-1}^q \Delta_{1i} \Delta_{2j} \int_0^1 \int_0^{0.5} \left\{ \sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \left[\varphi'_{\mu\nu}(x_{\mu-i}) \psi_{\mu\nu}(y_{\nu-i}) \varphi'_{pq}(x_{p-i}) \psi_{pq}(y_{q-j}) \times \right. \right. \\
& \quad \times \Delta_{1i}^{-2} + \varphi_{\mu\nu}(x_{\mu-i}) \psi'_{\mu\nu}(y_{\nu-j}) \varphi_{pq}(x_{p-i}) \psi'_{pq}(y_{q-i}) \Delta_{2j}^{-2} \Big] - \\
& \quad \left. - 2 \varphi_{pq}(x_{p-i}) \psi_{pq}(y_{q-j}) \right\} dx dy + \\
& + \sum_{i=p-1}^p \sum_{j=q-1}^q \Delta_{1i} \Delta_{2j} \int_0^{0.5} \int_0^1 \left\{ \sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \left[\varphi'_{\mu\nu}(x_{\mu-i}) \psi_{\mu\nu}(y_{\nu-i}) \varphi'_{pq}(x_{p-i}) \psi_{pq}(y_{q-j}) \times \right. \right. \\
& \quad \times \Delta_{1i}^{-2} + \varphi_{\mu\nu}(x_{\mu-i}) \psi'_{\mu\nu}(y_{\nu-j}) \varphi_{pq}(x_{p-i}) \psi'_{pq}(y_{q-i}) \Delta_{2j}^{-2} \Big] - \\
& \quad \left. - 2 \varphi_{pq}(x_{p-i}) \psi_{pq}(y_{q-j}) \right\} dx dy - \\
& - \sum_{i=p-1}^p \sum_{j=q-1}^q \Delta_{1i} \Delta_{2j} \int_0^{0.5} \int_0^{0.5} \left\{ \sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \left[\varphi'_{\mu\nu}(x_{\mu-i}) \psi_{\mu\nu}(y_{\nu-i}) \varphi'_{pq}(x_{p-i}) \psi_{pq}(y_{q-j}) \times \right. \right. \\
& \quad \times \Delta_{1i}^{-2} + \varphi_{\mu\nu}(x_{\mu-i}) \psi'_{\mu\nu}(y_{\nu-j}) \varphi_{pq}(x_{p-i}) \psi'_{pq}(y_{q-i}) \Delta_{2j}^{-2} \Big] - \\
& \quad \left. - 2 \varphi_{pq}(x_{p-i}) \psi_{pq}(y_{q-j}) \right\} dx dy = 0.
\end{aligned}$$

Вважаючи коефіцієнти C_{pq} відомими, в результаті варіації функціоналу

(1.11) виконуваних функцій φ_{pq} та ψ_{pq} .

Запишемо, що саме, функціонал екстремуму досягається на класі функцій φ_{pq}, ψ_{pq} , задовольняють рівнянням $((p, q) \in \pi)$:

2 ВИБІР ТА ОБГРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Огляд відомих класичних схем методів

2.1.1 Класичний метод скінченних елементів

Метод скінченних елементів – це чисельний метод розв'язку диференціальних рівнянь із приватними похідними.

Суть методу випливає з саме його назви. Область, в якій шукається розв'язання і розв'язок диференціальних рівнянь, розбивається на кінцеве кількість елементів(під областей). У кожному з елементів довільно вибирається вид функції апроксимації. У найпростішому випадку і найчастішому – це поліном першого ступеня. Поза межами свого елемента функція апроксимації дорівнює нулю. Значення функцій на кордонах наших елементів, які знаходяться в вузлах, є розв'язком задачі і заздалегідь невідомі. Коефіцієнти апроксимуючих функцій зазвичай шукаються з умови рівності значення сусідніх функцій на кордонах між елементами які знаходяться у вузлах. Потім ці самі коефіцієнти виражаються через значення вузлах елементів у функціях. Складається система лінійних рівнянь а саме алгебраїчних. Кількість рівнянь точно дорівнює кількості невідомих значень у вузлах, на яких шукається розв'язок вихідної системи, прямо пропорційно кількості елементів і обмежується тільки можливостями МКЕ. Так як кожен з елементів, які ми розглянули, пов'язаний з обмеженою кількістю сусідніх, система лінійних алгебраїчних рівнянь має розріджений вид, що істотно спрощує її розв'язання.

Якщо говорити в матричних термінах, то збираються так звані матриці жорсткості або, як їх називають матриця Діріхле і мас. Далі на ці самі матриці накладаються умови – граничні (наприклад, за умов Неймана в матрицях не змінюється нічого, а за умов Діріхле з матриць викреслюються стовпці і рядки, що відповідають граничним вузлам, так як в силу крайових умов значення відповідних компонент розв'язку відомо). Потім збирається система лінійних рів-

нянь і вирішується одним з нам відомих методів які ми розглядали, та будуть розглядати.

Матриця жорсткості, або як ще її називають матриця Діріхле – матриця особливого виду, що використовується в методі кінцевих елементів для розв'язання диференціальних рівнянь в приватних похідних. Вона застосовується при розв'язанні завдань механіки і електродинаміки.

2.1.2 Метод сіток

Розв'язання задачі кручення стержня та кручення стержня у формі кута зводиться до означення функції напруги $\Phi(x_1, x_2)$ котра має відповідати рівнянню Пуасона та граничній умові яку ми розглядали.

Аналітичні методи або інші методи є так само класично наближеними методи які дозволяють знайти функцію $\Phi(x_1, x_2)$ лише для порівняно простих поперечних перерізів бруса.

Істотно більш універсальним, більш гнучким, зокрема щодо геометрії поперечного перерізу або кутового перерізу, є метод сіток (метод кінцевих різниць). Однак цей метод вимагає велику кількість однотипних арифметичних операцій які дуже часто займають великий час розрахунків. Ці труднощі долаються за допомогою вдосконаленням обчислювальних алгоритмів і ЕОМ.

При вирішенні задачі методом кінцевих різниць, функція яку ми шукаємо, визначається на деякому досить великій кінцевій множині точок області F , які називають розрахунковими струмами і саме вони є вузлами сітки. Вони бувають зазвичай прямокутні або квадратні і покривають усю область F .

Для ілюстрації розглянемо двохзв'язну область F обмежену зовнішнім контуром L_0 і внутрішнім контуром L_1 , вкриту прямокутною сіткою із кроком h_1 , із напрямком до осі x_1 із кроком h_2 за напрямком до осі x_2 .

Вузли сітки, а саме які близькі найбільш до контуру $L(L_0 + L_1)$, назива-

ються граничними. Всі інші вузли, які ми розглянули, потрапили до області F , називаються внутрішніми. Кожний вузол має 4 сусідніх вузла, серед яких можуть бути і є граничні. Множина внутрішніх (тобто граничних) вузлів позначаються L_h , треба зауважити, що все залежність від кроку сітки. Максимальне число розрахункових точок вздовж осі x_1 об означимо через KT , а вздовж осі x_2 – через MT . Відмітимо, що $h_i = A_i + N_i$, де A_i – розмір області F у напрямку $x_{1,2}$, $N_1 = KT - 1$, $N_2 = MT - 1$.

Розрахункова точка $x_{k;m}$ знаходиться на перетині $k = 1, \dots, KT$ стовбчика та строки $m = 1, \dots, MT$ і має координати $x_{1,r}$ та $x_{m,2}$.

2.1.3 Метод Рітца

Виділяють два основних типу розв'язку методів варіаційних завдань. До першого типу відносяться методи, що зводять вихідну задачу до вирішення рівнянь а саме диференціальних. Ці методи дуже сильно розвинені. Альтернативою для диференціальних рівнянь є так звані прямі методи. Ці методи тим або іншим способом вирішують вихідну задачу з пошуку в заданому класі функцію, яка доставляла б екстремальне значення функціоналу який заданий. Один з найпопулярніших методів цього класу - метод Рітца або як його ще називають Релея-Рітца).

В основі методу Рітца лежить побудова мінімізующої функції. Нехай, розглянемо такий приклад, необхідно знайти мінімум функціоналу $V[y]$ у класі функцій M . Щоб задача мала сенс, вимагатимемо, щоб існував кінцевий інфімум μ значень функціоналу і в класі допустимих функцій існували такі функції, на яких функціонал приймає значення, а саме, кінцеві. Тоді за визначенням інфімум існує то ми мінімізує функцію послідовності $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ така, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V[y_n] = \mu.$$

Якщо існує границя y^* цієї послідовності, то вона і буде тим самим розв'язком вихідного завдання, так як буде граничний перехід законним

$$V[y^*] = \lim_{n \rightarrow \infty} V[y_n].$$

Яким же чином будується саме ця мінімізує послідовність в методі Рітца або в методі Релея-Рітца? Спочатку ми розглянемо загальну ідею, а потім розглянемо її конкретну реалізацію лише для одного типу варіаційних задач. Отже, спочатку потрібно вибрати необхідну систему функцій, яку ми назвемо базисної:

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$$

До функцій φ_n висовуються вимоги їх існує лише дві. По-перше, самі ці функції належать класу M , а по-друге будь яка кінцева саме лінійна комбінація цих функцій виду

$$y_n = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n,$$

належить тому ж самому класу M . Вхідна задача змінюється на наступну:

$$\min_{c_1, \dots, c_n} V[c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n].$$

Вирішуючи цю задачу відомими (з курсу «Методів оптимізації», наприклад) методами, ми зможемо отримати деяке мінімальне значення μ_n . Оскільки при невеликому збільшенні доданків числа ми тільки розширюємо множину

функцій, на якій шукається мінімум, буде справедливим ланцюжок нерівностей

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \mu_n \geq \mu_{n+1} \geq \dots$$

Можна довести, що при яких деяких умовах ця значення послідовності сходиться до μ .

Теорема. Якщо функціонал $V[y]$ неперервний (у сенсі метрики і простору, в якому він розглядається) і система функцій φ_n повна, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu,$$

де μ – мінімум функціоналу.

Зауваження. Швидкість збіжності методу Рітца сильно залежить від вибору системи базисних функцій. Однак при вдалому виборі для досягнення прийнятної точності часто буває досить 3 – 4 доданків в лінійній комбінації.

Застосуємо викладену ідею, що досить часто зустрічається у задачі варіації.

2.2 Загальна теорія оптимальної схеми методу кінцевих елементів

2.2.1 Точне розв'язання симетрично-граничної крайової задачі

Розглянемо,

$$\sum_{s=0}^N (a_s y^{(2s)}(t) + b_s y^{(2s)}(1-t)) = f(t),$$

$$y^{(s)}(0) = y_{0s}, y^{(s)}(1) = y_{1s}, s = \overline{0, N-1}.$$

У даному пункті показано як за допомогою перенесення вихідного за-

вдання на симетричний інтервал і розкладання на непарну і парну складові шуканого розв'язку, вихідна задача зводиться до сукупності задач а саме двох крайових для рівняння з коефіцієнтами постійними.

Вже згадана вище крайова задача виникає при визначенні координатних функцій в методі кінцевих оптимальних елементів (ОМСЕ – прямокутні елементи або прямокутні елементи у формі кута [1 – 3]) для диференціальних рівнянь еліптичного типу з постійними коефіцієнтами.

Теорема. Розв'язання початкової задачі можна уявити у вигляді

$$y(t) = z_1\left(t - \frac{1}{2}\right) + z_2\left(t - \frac{1}{2}\right), t \in (0, 1), \quad (2.1)$$

де $z_1(\tau); \tau \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \tau = t - \frac{1}{2}$ – розв'язання крайової задачі.

$$L_1(z_1) := \sum_{s=0}^N (a_s + b_s) z_1^{(2s)}(\tau) = \frac{1}{2} \left[f\left(\tau + \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2} - \tau\right) \right], \quad (2.2)$$

$$z_1^{(s)}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[y_{0s} + (-1)^{(s)} y_{1s} \right], \quad (2.3)$$

$$z_1^{(s)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[y_{1s} + (-1)^{(s)} y_{0s} \right], \quad (2.4)$$

де $z_2(\tau); \tau \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \tau = t - \frac{1}{2}$ – розв'язання крайової задачі.

Тоді

$$L_2(z_2) := \sum_{s=0}^N (a_s + b_s) z_2^{(2s)}(\tau) = \frac{1}{2} \left[f\left(\tau + \frac{1}{2}\right) + f\left(\tau - \frac{1}{2}\right) \right], \quad (2.5)$$

$$z_2^{(s)}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[y_{0s} + (-1)^{(s+1)} y_{1s} \right], \quad (2.6)$$

$$z_2^{(s)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[y_{1s} + (-1)^{(s+1)} y_{0s} \right]. \quad (2.7)$$

Розв'язання $z_1(\tau), z_2(\tau), \tau \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ має структуру

$$z_1(\tau) = \sum_{s=1}^N c_s z_{1s}(\tau) + \frac{1}{a_N + b_N} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G_1(\tau, \xi) \frac{\left[f\left(\xi + \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2} - \xi\right) \right]}{2} d\xi, \quad (2.8)$$

$$z_2(\tau) = \sum_{s=1}^N c_l z_{2l}(\tau) + \frac{1}{a_N + b_N} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G_2(\tau, \xi) \frac{\left[f\left(\xi + \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2} - \xi\right) \right]}{2} d\xi, \quad (2.9)$$

коли $a_N - b_N \neq 0$, якщо $a_N - b_N \equiv 0$, то розглядається рівняння $N-1$ порядку; $z_{1s}(\tau)$ – парні функції фундаментальної системи розв'язку (2.2), а $z_{2l}(\tau)$ – непарні функції фундаментальної системи рішень (2.5), $G_1(\tau, \xi), G_2(\tau, \xi)$ – функції Гріна задач (2.2) – (2.4), (2.5) – (2.7) відповідно:

$$L_k(G_k(\tau, \xi)) = \delta(\tau - \xi), \quad (2.10)$$

$$G_k^{(s,0)}\left(\frac{1}{2}, \xi\right) = G_k^{(s,0)}\left(-\frac{1}{2}, \xi\right) = 0, \quad s = \overline{0, N-1}, k = \overline{1, 2}. \quad (2.11)$$

Доведено, що зробивши заміну цих змінних $\tau = t - \frac{1}{2}$ у вихідній крайовій задачі, ($\tau \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$) і після цього підстановку у крайову задачу виду

$$y\left(\tau + \frac{1}{2}\right) = z_1(\tau) + z_2(\tau), \quad (2.12)$$

$$y\left(\frac{1}{2} - \tau\right) = z_1(\tau) - z_2(\tau), \quad (2.13)$$

де

$$z_1(\tau) = \frac{y\left(\tau + \frac{1}{2}\right) + y\left(\frac{1}{2} - \tau\right)}{2}, \quad (2.14)$$

$$z_2(\tau) = \frac{y\left(\tau + \frac{1}{2}\right) - y\left(\frac{1}{2} - \tau\right)}{2}, \quad (2.15)$$

в вихідну задачу, $z_1(\tau)$ – парна, а $z_2(\tau)$ – непарна функції на $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, на інтегралі $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$f\left(\tau + \frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(\tau + \frac{1}{2}\right) + f\left(\tau - \frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{f\left(\tau + \frac{1}{2}\right) - f\left(\tau - \frac{1}{2}\right)}{2} = f_1 + f_2, \quad (2.16)$$

отримуємо, що вихідна задача, а вона є крайова, розпадається на дві незалежні неоднорідних крайових завдання (2.2) – (2.4), (2.5) – (2.7) з постійними коефіцієнтами щодо парної $z_1(\tau)$ і непарної $z_2(\tau)$ складових $y\left(\tau + \frac{1}{2}\right)$.

2.2.2 Рівняння Пуассона. Прямокутні елементи у формі кута

У цьому розділі ми будемо вирішувати наступне завдання: при заданому способі розбиття області G на прямокутні елементи отримати найкращу апроксимацію точного розв'язок рівняння Пуассона для задачі Діріхле методом

скінченних елементів (МСЕ) шляхом відповідного вибору довільних постійних і системи фінітних координатних функцій ми зробимо так, що вони належать класу $C(G) \cap W_2^{(1)}(G)$, фігурують в схемі МСЕ, з використанням узагальненої кусочноермітової інтерполяції. Вибір систем фінітних і довільних постійних координатних функцій здійснюється з наступного критерію оптимальності: мінімум функціоналу енергії, відповідного вихідної крайової задачі. Коли ми отримаємо інтегральне представлення залишкового члена, то для наближення узагальненим кусочноермітовим інтерполянтам. Ефективність методики ілюструється прикладами, що показують, що якщо координатні функції в МСЕ представляти у вигляді зрушень і стиснень однієї фінітної функції, то зменшується виграш при збільшенні кількості елементів в точності в порівнянні зі звичайними, а саме, неоптимальними схемами МСЕ. Розглядається задача на чисте крутіння стержня у формі кута, поперечний переріз якого представляє область G , обмежену відрізками прямих,

$$G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\} \setminus \{(x, y) : c \leq x \leq a, c \leq y \leq b\}.$$

Розглянемо задачу:

$$\Delta u(x, y) = -2, \quad (x, y) \in G, \quad (2.17)$$

$$u|_{\partial G} = 0, \quad (2.18)$$

Розіб'ємо G на прямокутні елементи прямими

$$x = x_i, \quad i = \overline{1, M}; \quad y = y_j, \quad j = \overline{1, N}.$$

Позначимо через $\overline{\pi}$ множину індексів (i, j) , б відповідає умовам:

$(x_i, y_j) \in \bar{G}$, а через π – множину індексів (i, j) таких, що $(x_i, y_j) \in \bar{G} \setminus \partial G$.

$$\Delta_{1i} = x_{i+1} - x_i, \Delta_{2j} = y_{j+1} - y_j.$$

Наближення розв'язку задачі (2.17) – (2.18) будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned} u_\pi(x, y) = & C_{ij} \varphi_{ij} \left(\frac{x - x_i}{\Delta_{1i}} \right) \psi_{ij} \left(\frac{y - y_j}{\Delta_{2j}} \right) + C_{i+1, j} \varphi_{i+1, j} \left(\frac{x_{i+1} - x}{\Delta_{1i}} \right) \psi_{i+1, j} \left(\frac{y - y_j}{\Delta_{2j}} \right) + \\ & + C_{i, j+1} \varphi_{i, j+1} \left(\frac{x - x_i}{\Delta_{1i}} \right) \psi_{i, j+1} \left(\frac{y_{j+1} - y}{\Delta_{2j}} \right) + C_{i+1, j+1} \varphi_{i+1, j+1} \left(\frac{x_{i+1} - x}{\Delta_{1i}} \right) \psi_{i+1, j+1} \left(\frac{y_{j+1} - y}{\Delta_{2j}} \right), \end{aligned}$$

на кожному з прямокутників $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] = \pi_{ij} \subset G$.

Тут $\varphi_{\mu\nu}(x)$, $\psi_{\mu\nu}(y)$ – невідомі функції, що задовольняють умовам:

$$\varphi_{\mu\nu}(0) = \psi_{\mu\nu}(0) = 1, \varphi_{\mu\nu}(1) = \psi_{\mu\nu}(1) = 0, (\mu, \nu) \in \bar{\pi},$$

$C_{\mu\nu}$, $(\mu, \nu) \in \bar{\pi}$ – шукані сталі. Легко бачити, що

$$u_\pi(x_\mu, y_\nu) = C_{\mu\nu}, (\mu, \nu) \in \bar{\pi}.$$

Вважаючи $C_{\mu\nu} = 0$, як що $(x_\mu, y_\nu) \in \partial G$, отримаємо, що розв'язання у вигляді буде задовольняти граничній умові (2.18). Розв'язання вихідної задачі (2.17) – (2.18) замінимо завданням про мінімумі функціоналу

$$J(u) = \int_0^1 \int_0^{0.5} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 4u \right] dx dy + \int_0^{0.5} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 4u \right] dx dy -$$

$$-\int_0^{0.5} \int_0^{0.5} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 4u \right] dx dy.$$

Підставляючи, можемо результуючий функціонал записати у вигляді $(x_0 = x, x_1 = 1 - x, y_0 = y, y_1 = 1 - y)$:

$$\begin{aligned} J(u_\pi) = & \int_0^1 \int_0^{0.5} \sum_{\pi ij \subset G} \sum_{\pi ij \subset G} \Delta_{1i} \Delta_{2j} \left\{ \left[\sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \varphi'_{\mu\nu}(x_{\mu-i}) \psi_{\mu\nu}(Y_{\nu-j}) \right]^2 \Delta_{1i}^{-2} + \right. \\ & \left. + \left[\sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \times \varphi_{\mu,\nu}(x_{\mu-i}) \psi'_{\mu\nu}(y_{\nu-j}) \right]^2 \Delta_{2j}^{-2} - 4 \sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}(x_{\mu-i}) \psi_{\mu\nu}(y_{\nu-i}) \right\} dx dy + \\ & - \int_0^{0.5} \int_0^1 \sum_{\pi ij \subset G} \sum_{\pi ij \subset G} \Delta_{1i} \Delta_{2j} \left\{ \left[\sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \varphi'_{\mu\nu}(x_{\mu-i}) \psi_{\mu\nu}(Y_{\nu-j}) \right]^2 \Delta_{1i}^{-2} + \right. \\ & \left. + \left[\sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \times \varphi_{\mu,\nu}(x_{\mu-i}) \psi'_{\mu\nu}(y_{\nu-j}) \right]^2 \Delta_{2j}^{-2} - 4 \sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}(x_{\mu-i}) \psi_{\mu\nu}(y_{\nu-i}) \right\} dx dy - \\ & - \int_0^{0.5} \int_0^1 \sum_{\pi ij \subset G} \sum_{\pi ij \subset G} \Delta_{1i} \Delta_{2j} \left\{ \left[\sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \varphi'_{\mu\nu}(x_{\mu-i}) \psi_{\mu\nu}(Y_{\nu-j}) \right]^2 \Delta_{1i}^{-2} + \right. \\ & \left. + \left[\sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \times \varphi_{\mu,\nu}(x_{\mu-i}) \psi'_{\mu\nu}(y_{\nu-j}) \right]^2 \Delta_{2j}^{-2} - 4 \sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}(x_{\mu-i}) \psi_{\mu\nu}(y_{\nu-i}) \right\} dx dy. \end{aligned}$$

Вважаючи функції $\varphi_{\mu\nu}, \psi_{\mu\nu}$ відомими, для визначення коефіцієнтів $C_{ij}, (i, j) \in \pi$ запишемо систем Рітца $((p, q) \in \pi)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=p-1}^p \sum_{j=q-1}^q \Delta_{1i} \Delta_{2j} \int_0^1 \int_0^{0.5} \left\{ \sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \left[\varphi'_{\mu\nu}(x_{\mu-i}) \psi_{\mu\nu}(y_{\nu-i}) \varphi'_{pq}(x_{p-i}) \psi_{pq}(y_{q-j}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \Delta_{1i}^{-2} + \varphi_{\mu\nu}(x_{\mu-i}) \psi'_{\mu\nu}(y_{\nu-j}) \varphi_{pq}(x_{p-i}) \psi'_{pq}(y_{q-i}) \Delta_{2j}^{-2} \right] - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\varphi_{pq}(x_{p-i})\psi_{pq}(y_{q-j})dxdy + \\
& + \sum_{i=p-1}^p \sum_{j=q-1}^q \Delta_{1i}\Delta_{2j} \int_0^{0.5} \int_0^1 \left\{ \sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \left[\varphi'_{\mu\nu}(x_{\mu-i})\psi_{\mu\nu}(y_{\nu-i})\varphi'_{pq}(x_{p-i})\psi_{pq}(y_{q-j}) \times \right. \right. \\
& \quad \times \Delta_{1i}^{-2} + \varphi_{\mu\nu}(x_{\mu-i})\psi'_{\mu\nu}(y_{\nu-j})\varphi_{pq}(x_{p-i})\psi'_{pq}(y_{q-i})\Delta_{2j}^{-2} \left. \right] - \\
& \quad - 2\varphi_{pq}(x_{p-i})\psi_{pq}(y_{q-j})dxdy - \\
& - \sum_{i=p-1}^p \sum_{j=q-1}^q \Delta_{1i}\Delta_{2j} \int_0^{0.5} \int_0^{0.5} \left\{ \sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \left[\varphi'_{\mu\nu}(x_{\mu-i})\psi_{\mu\nu}(y_{\nu-i})\varphi'_{pq}(x_{p-i})\psi_{pq}(y_{q-j}) \times \right. \right. \\
& \quad \times \Delta_{1i}^{-2} + \varphi_{\mu\nu}(x_{\mu-i})\psi'_{\mu\nu}(y_{\nu-j})\varphi_{pq}(x_{p-i})\psi'_{pq}(y_{q-i})\Delta_{2j}^{-2} \left. \right] - \\
& \quad - 2\varphi_{pq}(x_{p-i})\psi_{pq}(y_{q-j})dxdy = 0.
\end{aligned}$$

Вважаючи коефіцієнти C_{pq} відомими, в результаті варіації функціоналу (2.18) виконуваних функцій φ_{pq} та ψ_{pq} .

Запишемо, що екстремум функціоналу досягається на класі функцій φ_{pq}, ψ_{pq} , задовольняють рівнянням $((p, q) \in \pi)$.

Вважаючи коефіцієнти C_{pq} відомими, в результаті варіації функціоналу виконуваних функцій φ_{pq} та ψ_{pq} отримаємо, що екстремум функціоналу досягається на класі функцій φ_{pq}, ψ_{pq} , задовольняють рівнянням $((p, q) \in \pi)$:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial \varphi'_{pq}(x)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F(1-x, y)}{\partial \varphi'_{pq}(1-x)} \right) - \frac{\partial F(x, y)}{\partial \varphi_{pq}(x)} - \frac{\partial F(1-x, y)}{\partial \varphi_{pq}(1-x)} \right] dy = 0, \\
& \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial \psi'_{pq}(y)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F(x, 1-y)}{\partial \psi'_{pq}(1-y)} \right) - \frac{\partial F(x, y)}{\partial \psi_{pq}(y)} - \frac{\partial F(x, 1-y)}{\partial \psi_{pq}(1-y)} \right] dx = 0. \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Так само можна знайти на всій нашій області G розбиваючи наш інтеграл, так як ми робили раніше.

Тут запис $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F(\xi, y)}{\partial \varphi'_{pq}(1-x)} \right)$ і їй аналогічні слід розуміти так:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial F(\xi, y)}{\partial \varphi'_{pq}(1-\xi)} \right) \Bigg|_{\xi=1-x},$$

де $F(x, y)$ – підінтегральна функція в (2.16).

Система рівнянь (2.17) є системою такого вигляду

$$\begin{aligned} A_1 \vec{\varphi}''(x) + C_1 \vec{\varphi}''(1-x) - B_1 \vec{\varphi}(x) - D_1 \vec{\varphi}(1-x) &= \vec{f}_1, \\ A_2 \vec{\psi}''(y) + C_2 \vec{\psi}''(1-y) - B_2 \vec{\psi}(y) - D_2 \vec{\psi}(1-y) &= \vec{f}_2, \end{aligned}$$

де A_i, B_i, C_i, D_i – постійні матриці розмірності n , рівній кількості вузлів розбиття, $\vec{\varphi}, \vec{\psi}, \vec{f}_1, \vec{f}_2$ – вектори тієї ж розмірності. Система повинна вирішуватися на інтервалі $(0,1)$ при наступних граничних умовах:

$$\vec{\varphi}(0) = \vec{\psi}(0) = \vec{1}, \vec{\varphi}(1) = \vec{\psi}(1) = \vec{0}, \quad (2.20)$$

де $\vec{1}$ та $\vec{0}$ – вектори, компонентами яких є відповідно 1 і 0.

Наприклад, коли область G є прямокутником $|x| < a, |y| < b$, то в разі розбиття ($\Delta_1 = a/M, \Delta_2 = b/N$):

$$x_i = i\Delta_1, i = 0, \pm 1, \dots, \pm M; y_j = j\Delta_2, j = 0, \pm 1, \dots, \pm N,$$

система рівнянь для $\varphi_{\mu\nu}(x)$ матиме вигляд (в силу симетрії розглядаємо тільки чверть області G):

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=q-1}^q \left\{ \sum_{\mu=p-1}^p \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \left[\varphi''_{\mu\nu}(x_{p-\mu}) \int_0^1 \psi_{\mu\nu}(y_{\nu-j}) \psi_{pq}(y_{q-i}) dy \Delta_1^{-2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \Delta_2^{-2} \varphi_{\mu\nu}(x_{p-\mu}) \int_0^1 \psi'_{\mu\nu}(y_{\nu-j}) \psi'_{pq}(y_{q-j}) dy \right] + 2 \int_0^1 \psi_{pq}(y_{q-j}) dy \delta_{p-1,j} \right\} + \\
& \left. + \sum_{j=q-1}^q \left\{ \sum_{\mu=p}^{p+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu} \varphi''_{\mu\nu}(x_{\mu-p}) \int_0^1 \psi_{\mu\nu}(y_{\nu-j}) \psi_{pq}(y_{q-j}) dy \Delta_1^{-2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \varphi_{\mu\nu}(x_{\mu-p}) \int_0^1 \psi'_{\mu\nu}(y_{\nu-j}) \psi'_{pq}(y_{q-j}) dy \Delta_2^{-2} + 2 \int_0^1 \psi_{pq}(y_{q-j}) dy \delta_{p+1,j} \right\} = 0, \quad (2.21)
\end{aligned}$$

$(p, q) \in \pi; C_{\mu\nu} = 0, \text{ якщо } (\mu, \nu) \notin \pi;$
 $\delta_{ij} = 1, \forall (i, j) \in \pi; \sigma_{ij} = 0, \forall (i, j) \notin \pi.$

Аналогічна система рівнянь має місце і для функцій $\psi_{\mu\nu}$.

Насамперед ми будемо зазначати, що ці системи не є системами диференціальних рівнянь з відхиляється аргументом (див. Дерфель Г.А.), звісно ж ми можемо назвати таку систему симетрично-крайової диференціальною системою рівнянь.

Розглянемо питання про розв'язок симетрично-крайових за умови, що праві частини і всі коефіцієнти яки ми розглядали є відомими. Для визначеності розглянемо першу з систем симетрично крайових задач. Будемо її розв'язок та будемо шукати її у вигляді суми розв'язку приватної неоднорідної системи і загального однорідної системи розв'язку. Легко побачити, що приватний розв'язок, в силу сталості коефіцієнтів, буде мати вигляд:

$$\vec{\varphi}_r = -(B_1 + D_1)^{-1} \vec{f}_1. \quad (2.22)$$

Загальне розв'язок однорідної системи ми будемо шукати та розв'язувати у вигляді

$$\vec{\varphi}_0(x) = \sum_{i=1}^n \left(p_i \gamma_i \operatorname{sh} \lambda_i \left(x - \frac{1}{2} \right) + q_i \delta_i \operatorname{ch} \mu_i \left(x - \frac{1}{2} \right) \right), \quad (2.23)$$

де, γ_i, δ_i – скалярні коефіцієнти, що підлягають визначенню з граничних умов; λ_i, μ_i – власні числа, які є коренями рівнянь

$$\det \left[(A_1 - C_1) \lambda^2 - (B_1 - D_1) \right] = 0,$$

$$\det \left[(A_1 + C_1) \mu^2 - (B_1 + D_1) \right] = 0,$$

відповідно; \vec{p}_i, \vec{q}_i – власні вектори

$$\left[(A_1 - C_1) \lambda_i^2 - (B_1 - D_1) \right] \vec{p}_i = \vec{0}, i = \overline{1, n},$$

$$\left[(A_1 + C_1) \mu_i^2 - (B_1 + D_1) \right] \vec{q}_i = \vec{0}, i = \overline{1, n}. \quad (2.25)$$

Тут використано та розглянуто припущення про те, що коріння λ_i, μ_i – дійсні (див. напр. Іванов Б.О.). Легко переконатися, що отримане таким чином рішення у вигляді рівняння $\vec{\varphi}(x) = \vec{\varphi}_0(x) + \vec{\varphi}_r$.

Перепишемо розв'язок в наступній формі

$$\vec{\varphi}(x) = p \left[\operatorname{sh} \lambda_i \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] \vec{\gamma} + Q \left[\operatorname{ch} \mu_i \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] \vec{\delta} + \vec{\varphi}_r$$

Тут p, Q – квадратні матриці, стовпцями яких є вектори \vec{p}_i, \vec{q}_i ; $[d_i] = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$; $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ – вектори. Задовольняючи граничним умовам (2.25), отримаємо:

$$\vec{\gamma} = -\frac{1}{2} \left[sh \frac{\lambda_i}{2} \right]^{-1} p^{-1} \vec{1}, \quad \vec{\delta} = \frac{1}{2} \left[ch \frac{\mu_i}{2} \right]^{-1} Q^{-1} (\vec{1} - 2\vec{\varphi}_r).$$

У наслідок розв'язок системи симетрично-крайових рівнянь (5), яке задовольняє граничним умовам (6), може бути представлено у вигляді

$$\vec{\varphi}(x) = \frac{1}{2} Q \left[\frac{ch \mu_i (x - \frac{1}{2})}{ch \frac{\mu_i}{2}} \right] Q^{-1} (\vec{1} - 2\vec{\varphi}_r) - \frac{1}{2} P \left[\frac{sh \lambda_i (x - \frac{1}{2})}{sh \frac{\lambda_i}{2}} \right] P^{-1} \vec{1} + \vec{\varphi}_r. \quad (2.26)$$

В отриманій нами системі рівнянь (2.25) невідомі коефіцієнти. В системі (2.25) для $\vec{\varphi}(x)$ праві частини і коефіцієнти залежать від C_{pq} і функцій $\vec{\psi}(y)$. У системі (2.25) для $\vec{\psi}(y)$ коефіцієнти залежать від C_{pq} і $\vec{\varphi}(x)$. Тому спільний розв'язок систем (2.25) будемо проводити методом «шльопанці», викладеному в роботах Гердін Г.К. і Грімм Т.Р., Керр А.Д. і Александер Х., Льовенталь С.Х. Задаємося вектором $\vec{\psi}(y)$ у вектора вигляді, компоненти якого рівні функції $1-y$ і початковим наближенням C_{pq} а саме воно може бути отримано, наприклад, із системи Рітца (2.18) при лінійних функціях φ_{pq} і ψ_{pq} . Обчислимо коефіцієнти системи $\vec{\varphi}$ і потім знаходимо $\vec{\varphi}^{(1)}(x)$ у виді (2.26) за описаним вище нами алгоритмом. Отримані результати використовуємо для розв'язку та обчислення коефіцієнтів системи $\vec{\psi}$ і її розв'язку у вигляді (2.12). Знаходженням коефіцієнтів C_{pq} з лінійної системи (2.14) з підстановкою в неї знайдених функцій $\vec{\varphi}^{(1)}(x)$ і $\vec{\psi}^{(1)}(y)$ розв'язок закінчується отриманням першого наближення.

Подальші наближення отримуємо за вказаною вище алгоритмом. Розв'язком вважаємо закінченим, якщо

$$\left| C_{ij}^{(k+1)} - C_{ij}^{(R)} \right| \leq E, \quad (i, j) \in \pi, \quad (2.27)$$

де E – задана точність обчислень, $C_{ij}^{(R)}$ – значення C_{ij} , отримані після ітерації.

Розглянемо, далі одну з найбільш часто використовуваних схем МСЕ:

$$\varphi_{ij}(x) \equiv h_1(x), \quad \psi_{ij}(y) \equiv h_2(y), \quad (i, j) \in \bar{\pi}, \quad (2.28)$$

де $h_1(x)$ и $h_2(y)$ – деякі функції, що володіють зазначеними вище властивостями (2.17):

$$h_1(0) = h_2(0) = 1, \quad h_1(1) = h_2(1) = 0. \quad (2.29)$$

В результаті варіації функціоналу (2.8) виконуваних функцій, отримаємо, що мінімум функціоналу досягається на функціях, що задовольняють рівнянням

$$R_{1i} h''_i(x) + R_{2i} h''_i(1-x) - R_{1i}^* h_i(x) - R_{2i}^* h_i(1-x) = -2f \int_0^1 h_{3-i}(x) dx, \quad i = 1, 2;$$

$$R_{11} = \sum_{\pi_{ij} \subset G} \Delta_{1i}^{-1} \Delta_{2j} \sum_{p=j}^{j+1} \sum_{q=j}^{j+1} (C_{ip} C_{iq} + C_{i+1,p} C_{i+1,q}) \int_0^1 h_2(y_{p-j}) h_2(y_{q-j}) dy, \quad (2.30)$$

$$R_{11}^* = \sum_{\pi_{ij} \subset G} \Delta_{1i} \Delta_{2j}^{-1} \sum_{p=j}^{j+1} \sum_{q=j}^{j+1} (C_{ip} C_{iq} + C_{i+1,p} C_{i+1,q}) \int_0^1 h_2^1(y_{p-j}) h_2^1(y_{q-j}) dy,$$

$$R_{21} = \sum_{\pi_{ij} \subset G} \Delta_{1i}^{-1} \Delta_{2j} \sum_{p=j}^{j+1} \sum_{q=j}^{j+1} (C_{ip} C_{i+1,q} + C_{i+1,p} C_{iq}) \int_0^1 h_2(y_{p-j}) h_2(y_{q-j}) dy,$$

$$R_{21}^* = \sum_{\pi_{ij} \subset G} \Delta_{1i} \Delta_{2j}^{-1} \sum_{p=j}^{j+1} \sum_{q=j}^{j+1} (C_{ip} C_{i+1,q} + C_{i+1,p} C_{iq}) \int_0^1 h_2^1(y_{p-j}) h_2^1(y_{q-j}) dy,$$

$$f = \sum_{\pi_{ij} \subset G} \Delta_{1i} \Delta_{2j} \sum_{\mu=i}^{i+1} \sum_{\nu=j}^{j+1} C_{\mu\nu}.$$

Аналогічно визначаються коефіцієнти $R_{j_2}, R_{j_2}^*$ ($j=1,2$).

Вирішення цих симетрично-крайових рівнянь має вигляд:

$$h_i(x) = \frac{1 - 2\gamma_i \operatorname{ch}\mu_i(x - \frac{1}{2})}{2 \operatorname{ch}\frac{\mu_i}{2}} - \frac{\operatorname{sh}\lambda_i(x - \frac{1}{2})}{2\operatorname{sh}\frac{\lambda_i}{2}} + \gamma_i \quad (i=1,2), \quad (2.31)$$

де $\lambda_i, \mu_i, \gamma_i$ ($i=1,2$) знаходяться з наступної системи рівнянь:

$$(R_{1i} + R_{2i})\mu_i^2 - (R_{1i}^* + R_{2i}^*) = 0, \quad (i=1,2), \quad (2.32)$$

$$(R_{1i} - R_{2i})\lambda_i^2 - (R_{1i}^* - R_{2i}^*) = 0, \quad (i=1,2). \quad (2.33)$$

$$\gamma_i = 2f \int_0^1 h_{3-i}(x) dx / (R_{1i}^* + R_{2i}^*) \quad (i=1,2). \quad (2.34)$$

Підставляючи вираз (2.15) в рівняння (2.4), (2.16), (2.17), (2.18), отримаємо систему $(n+6)$ рівнянь для відшукування $(n+6)$ ти невідомих,

$$C_{pq}, (p, q) \in \pi, \lambda_i, \mu_i, \gamma_i \quad (i=1,2).$$

Зауважимо, що і в даному випадку на практиці зручно використовувати метод «фліп-флоп».

Приклад 1. Нехай область G є рівнобічним куточком $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_1 \leq b; x_2 \leq b; x_1 < \frac{b}{2}$, якщо $x_2 \in [\frac{b}{2}, b]$; $x_2 < \frac{b}{2}$, якщо $x_1 \in [\frac{b}{2}, b]$. Розіб'ємо її на 12 квадратних елементів прямими $x_{1i} = i\frac{b}{4}, x_{2j} = j\frac{b}{4}, i, j = 1, 2, 3$. У цьому випадку розв'язку задачі (2.1) – (2.2) зводиться до відшукування C_{11}, C_{12}, C_{13} (в силу

симетрії $C_{21} = C_{12}$, $C_{31} = C_{13}$) λ , μ , γ , функція $h_i(t)$, $i = 1, 2$ в цьому випадку збігаються, тобто до вирішення шести рівнянь (2.4), (2.16), (2.17), (2.18); їх розв'язку при $b=1$ приведено у практичній частині. Система рівнянь вирішувалася на ЕВМ М-220 із допомогою СП-0651 із точністю 1.10^{-6} .

При інших значеннях b маємо

$$C_{ij} = C_{ij}^* b^2, C/G = C^*/G \left(\frac{b}{2}\right)^4, \tau_m = \tau_m^* b,$$

де C_{ij}^* , C^* , τ_m^* – значення, отримані при $b=1$.

Її розв'язку при деяких значеннях b и $a=1$ отримано узагальненим методом Стеффенса.

2.2.3 Оцінка швидкості збіжності методу OMCE

Розглянемо цей розділ для нашої роботи та нашого прикладу.

Нехай G – багатокутна область, межа якої ∂G складається з відрізків прямих, паралельних осях координат. Розіб'ємо G вона складається з відрізків паралельних прямих на осях координат. Розіб'ємо

$$x_k = x_{k,i_k} \quad (i_k = \overline{0, T_k - 1}, k = 1, 2).$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \bar{\pi} &= \{i = (i_1, i_2) : x_i = (x_{1,i_1}, x_{2,i_2}) \in \bar{G}\}, \\ \pi &= \{i = (i_1, i_2) : x_i \in \bar{G} \setminus \partial G\}, \partial \pi = \bar{\pi} \setminus \pi, \end{aligned}$$

$$R_i = [x_{1,i_1}, x_{1,i_1+1}] \times [x_{2,i_2}, x_{2,i_2+1}],$$

$$\Delta_{k,i_k} = x_{k,i_k+1} - x_{k,i_k}, \quad (i_k = \overline{0, T_k - 2}; k = 1, 2).$$

Розіб'ємо кожен з елементів $R_i \subset G$ прямими

$$x_k = x_{k,i_k,j_k} \quad (j_k = \overline{0, M_k - 1}; k = 1, 2),$$

$$x_{k,i_k} = x_{k,i_k,0} < x_{k,i_k,1} < \dots < x_{k,i_k,M_k-1} = x_{k,i_k+1},$$

на під елементи таким чином, що

$$\left(x_{k,i_k,j_k} - x_{k,i_k} \right) / \Delta_{k,i_k} = t_{k,j_k} \quad \left(j_k = \overline{0, M_k - 1}, \forall i_k \in \{0, 1, \dots, T_k - 2\} \right),$$

$$0 = t_{k,0} < t_{k,1} < \dots < t_{k,M_k-1} = 1; \quad t_{k,j_k} - \text{фіксовані числа}$$

Згідно першої схеми ОМСЕ, наближене розв'язку $u_\pi(x)$ задачу будемо шукати

на множину функцій $S_M^m(G)$ вигляду:

$$S_{M,\pi}^m(G) = \{v(x) : v(x) = v_i(x), x \in R_i \subset G\}, \quad M = (M_1, M_2);$$

$$v_i(x) = \sum_{j_1=0}^{M_1-1} \sum_{j_2=0}^{M_2-1} \sum_{S_1=0}^{m-1} \sum_{S_2=0}^{m-1} C_{i,j,S} \prod_{k=1}^2 h_{k,j_k,S_k} \left(\frac{x_k - x_{k,j_k}}{\Delta_{k,i_k}} \right) \Delta_{k,i_k}^{S_k}, \quad (2.35)$$

де $j = (j_1, j_2)$, $S = (S_1, S_2)$; $C_{i,j,S}$ – шукані постійні; $h_{k,j_k,S_k}(t_k) \in C^{2m}[0,1]$ – шукані функції з властивостями:

$$h_{k,j_k,S_k}(t_k) \in H^{N_k}(\mathfrak{M}_k), \quad N_k = M_k m \quad (k = 1, 2);$$

$$h_{k,j_k,S_k}^{(S'_k)}(t_{k,j'_k}) = \delta_{S_k,S'_k} \delta_{j_k,j'_k} (S_k, S'_k \in \{0,1,\dots,m-1\}; j_k, j'_k \in \{0,1,\dots,M_k-1\})$$

Шукані функції з властивостями $C_{i,j,S}$, відповідні всім вузлам граничним області G , покладемо рівними нулю:

$$C_{i,j,S} = 0 \left(i \in \partial\pi, (x_{1,i,j_1}, x_{2,i_2,j_2}) = x_{i,j} \in \partial G, S_k = \overline{0, m-1}, k = 1, 2 \right). \quad (2.36)$$

Зазначимо

$$S_{M,\pi}^{0m}(G) = \left\{ \nu(x) \in S_{M,\pi}^m(G) : \partial^\mu \nu(x) / \partial v^\mu = 0, x \in \partial G, \mu = \overline{0, m-1} \right\}.$$

Очевидно, для того, щоб $\nu(x) \in S_{M,\pi}^{0m}(G)$ досить зачекати виконання рівностей. Навіть після цього,

$$\nu(x) \in S_{M,\pi}^{0m}(G) \Rightarrow \nu(x) \in C^{m-1, m-1}(\overline{G}), \quad (2.37)$$

$$D^S \nu(x) \Big|_{x=x_{i,j}} = C_{i,j,S} \left((i, j, S) \in \mathfrak{N} \right),$$

$$\mathfrak{N} = \left\{ (i, j, S) : i \in \pi : j_k = \overline{0, M_k - 1}; S_k = \overline{0, m-1}; k = 1, 2 \right\}.$$

Постійні $C_{i,j,S}(i, j, S) \in \mathfrak{N}$ і функції

$$h_{k,j_k,S_k}(t_k) \left(j_k = \overline{0, M_k - 1}, S_k = \overline{0, m-1}, k = 1, 2 \right),$$

знаходимо з умови досягнення мінімуму функціоналу енергії $J_{m,G}(\nu)$, відповідного завдання

$$J_{m,G}(\nu) \rightarrow \inf_{C_{ijS}, h_{k,j_k}, S_k}^{0^m}, \nu \in S_{M,\pi}^{0^m}(G).$$

Задача є вихідною в методі кінцевих елементів з оптимальним вибором базисних функцій $h_{k,j_k,S_k}(t_k), (j_k = \overline{0, M_k - 1}; S_k = \overline{0, m - 1})$ одних і тих же для всіх елементів $R_i \subset G$, на які розбивається область інтегрування G . Це завдання рівносильна системам:

$$\partial J_{m,G}(\nu) / \partial C_{i,j,S} = 0 \quad (i, j, S) \in \mathfrak{N}, \nu \in S_{M,\pi}^{0^m}(G), \quad (2.38)$$

$$\delta_{h_1, j_1, S_1}(x_1) J_{m,G}(\nu) = 0, \quad (j_1 = \overline{0, M_1 - 1}; S_1 = \overline{0, m - 1}), \quad (2.39)$$

$$\delta_{h_2, j_2, S_2}(x_2) J_{m,G}(\nu) = 0, \quad (j_2 = \overline{0, M_2 - 1}; S_2 = \overline{0, m - 1}), \quad (2.40)$$

які мають розв'язуватись з урахуванням умов.

Число нам не зрозумілим функціям в такій схемі не залежить від кількості елементів і одно $m(M_1 + M_2)$. В практиці МСЕ найбільше частіше використовують випадки $M_1 = M_2 = 2$.

Припустимо, що виконані такі нерівності а саме наступні:

$$\exists \sigma_1, \sigma_2 > 0: |a_{m,G}(u, \nu)| \leq \sigma_2 \|u\|_{W_2^m(G)} \|\nu\|_{W_2^m(G)}, \quad \forall u, \nu \in W_2^m(G), \quad (2.41)$$

$$\sigma_1 \|u\|_{W_2^m(G)} \leq |a_{n,G}(u, u)|, \quad (2.42)$$

де $a_{n,G}(u, \nu)$ – білінійная форма запису

$$a_{m,G}(u, \nu) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G a_\alpha(x) D^\alpha u(x) D^\alpha \nu(x) dx. \quad (2.43)$$

Згідно з теоремою 1 роботи С'ярле Ф., стор. 109, $\exists C = \sigma_2 / \sigma_1$:

$$\|u - u^*\|_{W_2^n(G)} \leq C \inf_{v \in S_{M,\pi}^{0^m}(G)} \|u - v\|_{W_2^n(G)}, \quad (2.44)$$

де $u(x)$ – розв'язок нашої задачі

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in W_2^{0^m}(G), \quad (2.45)$$

де $u^*(x)$ – розв'язок нашої задачі (2.36).

Замінюючи в правій частині функцію $v(x)$ відповідним інтерполянтном

$e_{M,m,\pi} u(x)$ розв'язком $u \left(e_{M,m,\pi} u(x) \in S_{M,\pi}^{0^m}(G) \right)$:

$$D^S \left[e_{M,m,\pi} u(x) \right] \Big|_{x=x_{i,j}} = C_{i,j,S} = D^S u(x) \Big|_{x=x_{i,j}} \quad ((i,j,S) \in \mathfrak{N}), \quad (2.46)$$

можна нерівність замінити (2,46) нерівністю наступним

$$\|u - u^*\|_{W_2^n(G)} \leq C \|u - e_{M,m,\pi} u\|_{W_2^n(G)} \quad (2.47)$$

тут $C = const$.

Теорема 1. Нехай

$$u(x) \in L_2^{p_1, p_2}(G) \cap W_2^m(G) (m \leq p_k \leq mM_k, k = 1, 2).$$

Тоді

$$\|u - u^*\|_{W_2^n(G)} \leq Ch^{e-h} \quad (h \rightarrow 0) \quad (2.48)$$

$$h = \max_k \max_{i_k} \Delta_{k,i_k},$$

де $e = \min\{p_1, p_2\}$, стала C не залежить от h .

Доведення. використовуючи нерівність при $\alpha = n$

$$\|u - e_{M,m}u\|_{W_2^n(G)} \leq h^{e-n}C \quad (e = \min_k p_k, h \rightarrow 0), \quad (2.49)$$

отримуємо доказ теореми після підстановки (2.49) в (2.48).

Слідство. Отримана оцінка (2.48) швидкості прагнення залишку до нуля при $h \rightarrow 0$ показує, що якщо функції базису і передбачають один і такий самий для всіх елементів, на які розбивається область інтегрування G , то порядок щодо параметра h швидкості залишку прагнення до нуля буде таким же, як і при виборі $h_{k,j_k,s_k}(t_k) - (j_k = \overline{0, M_k - 1}; S_k = \overline{0, m - 1})$ у вигляді відповідного ступеня многочленів. Відмінність полягає лише в тому, що зменшиться значення постійної C . Це твердження, очевидне, в силу того, що це ми підтверджуємо розглянутим прикладом.

Розглянемо тепер наступну та іншу схему ОМСЕ. Будемо шукати розв'язок наближеної задачі на множині

$${}^0_m B_{M,\pi}(G):$$

$${}^0_m B_{M,\pi}(G) = \left\{ v(x) \in B_{M,\pi}^m(G) : \partial^\mu v(x) / \partial v^\mu = 0, x \in \partial G, \mu = \overline{0, m-1} \right\};$$

$$B_{M,\pi}^m(G) = \left\{ v(x) : v(x) = v_{M,m,i}(x), x \in R_i \subset G \right\},$$

$$v_{M,m,i}(x) = \sum_{j_1=0}^{M_1-1} \sum_{j_2=0}^{M_2-1} \sum_{S_1=0}^{m-1} \sum_{S_2=0}^{m-1} C_{i,j,S} \varphi_{i,j,S_1}(x_1) \psi_{i,j,S_2}(x_2),$$

$$\begin{aligned}\varphi_{i,j,S_1}^{(S'_1)}(x_{1,i'_1,j'_1}) &= \delta_{j_1,j'_1} \delta_{i_1,i'_1} \delta_{S_1,S'_1}; \\ \psi_{i,j,S_2}^{(S'_2)}(x_2,i'_2,j'_2) &= \delta_{i_2,i'_2} \delta_{j_2,j'_2} \delta_{S_2,S'_2},\end{aligned}\tag{2.50}$$

де введено припущення: що в кожній із доданка в невідомій є постійне $C_{i,j,S} \in \mathfrak{N}$ та одна з наступного: $\varphi_{i,j,S_1}(x_1)$ або $\varphi_{i,j,S_2}(x_2)$. При цьому, від наш вузол до іншого вузол передбачає чергування відомих і невідомих функцій: коли $\varphi_{i,j,S_1}(x_1)$ – відома:

$$\begin{aligned}\psi_{i,j,S_2}(x_2) C_{i,j,S} &\text{ – шукані,} \\ \text{то } \varphi_{i,j_1} \pm 1, j_2, S_1(x_1), \varphi_{i,j_1,j_2} \pm 1, S_1(x_1) &\text{ – шукані,} \\ \psi_{i,j_1} \pm 1, j_2, S_2(x_2), \psi_{i,j_1,j_2} \pm 1, S_2(x_2) &\text{ – задані.}\end{aligned}$$

Саме він же принцип зберігає і при переході від елемента $R_i \subset G$ до будь-якого сусіднього елемента. Необхідним є лише врахування, що якщо в елементі $R_i \subset G$ визначене розбиття а саме порядок функцій на відомій і шуканій, то тим самим відповідний визначений порядок в сусідніх з R_i елементах, який забезпечував би включення:

$$v(x) \in C^{m-1,m-1}(G).$$

Можна показувати, що вибір відповідних невідомих функцій $\varphi_{i,j,S_1}(x_1)$ и $\psi_{i,j,S_2}(x_2)$ з формули можна отримати відповідний інтерліант для задачі, для її розв'язку $u(x)$. Проілюструючи це твердження більше докладно для випадку $M_1 = M_2 = 2$, $m_1 = m_2 = 1$. Формула у цьому випадку набуде вигляду:

$$v_{M,m,i}(x) = v_i(x), x \in R_i \subset G.$$

$$\begin{aligned} v_i(x) = & h_{10} \left(\frac{x_1 - x_{1,i_1}}{\Delta_{1,i_1}} \right) \psi_{i_1,i_2}(x_2) + \varphi_{i_1+1,i_2}(x_1) h_{20} \left(\frac{x_2 - x_{2,i_2}}{\Delta_{2,i_2}} \right) + \\ & + \varphi_{i_1,i_2+1}(x_1) h_{2,1} \left(\frac{x_2 - x_{2,i_2}}{\Delta_{2,i_2}} \right) + h_{1,1} \left(\frac{x_1 - x_{1,i_1}}{\Delta_{1,i_1}} \right) \psi_{i_1+1,i_2+1}(x_2). \end{aligned}$$

Тут $h_{k,\mu}(t_k)$ ($k=1,2; \mu=0,1$) – відомі, $\varphi_{i'}(x_1), \psi_{i'}(x_2)$ – шукані функції, що відповідають таким умовам:

$$\begin{aligned} h_{k,\mu}(\mu') &= \delta_{\mu,\mu'} (\mu, \mu' \in \{0,1\}; k=1,2) \\ \varphi_{i_1+1,i_2}(x_{1,i_1}) &= 0, \varphi_{i_1+1,i_2}(x_{1,i_1+1}) = C_{i_1+1,i_2}; \varphi_{i_1,i_2+1}(x_{1,i_1}) = C_{i_1,i_2+1} \\ \varphi_{i_1,i_2+1}(x_{1,i_1+1}) &= 0; \psi_i(x_{2,i_2}) = C_i; \psi_i(x_{2,i_2+1}) = 0; \\ \psi_{i_1+1,i_2+1}(x_{2,i_2}) &= 0; \psi_{i_1+1,i_2+1}(x_{2,i_2+1}) = C_{i_1+1,i_2+1}; \end{aligned}$$

C_i – шукані постійні.

Нехай $u(x)$ – деяка функція, безперервна в даній області G . Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \psi_{i'_1}(x_2) &= u(x_{1,i'_1}, x_2); \\ \varphi_{i'_2}(x_1) &= u(x_1, x_{2,i'_2}); \\ C_{i'_1,i'_2} &= u(x_{1,i'_1}, x_{2,i'_2}) (i'_1 = i_1, i_1 + 1; i'_2 = i_2, i_2 + 1). \end{aligned}$$

Вважаючи

$$\varphi_{i_1+1,i_2}(x_1) = \varphi_{i_2}(x_1) - C_i h_{1,0} \left(\frac{x_1 - x_{1,i_1}}{\Delta_{1,i_1}} \right);$$

$$\begin{aligned}\varphi_{i,i_2+1}(x_1) &= \varphi_{i_2+1}(x_1) - C_{i+1,i_2+1} h_{1,1} \left(\frac{x_1 - x_{1,i_1}}{\Delta_{1,i_1}} \right); \\ \psi_i(x_2) &= \psi_{i_1}(x_2) - C_{i,i_2+1} h_{2,1} \left(\frac{x_2 - x_{2,i_2}}{\Delta_{2,i_2}} \right); \\ \psi_{i+1,i_2+1}(x_2) &= \psi_{i_2+1}(x_2) - C_{i+1,i_2} h_{2,0} \left(\frac{x_2 - x_{2,i_2}}{\Delta_{2,i_2}} \right)\end{aligned}$$

і підставляючи ці формули в формулу отримаємо наступну формулу:

$$\begin{aligned}v_i(x) &= h_{10} \left(\frac{x_1 - x_{1,i_1}}{\Delta_{1,i_1}} \right) \psi_{i_1}(x_2) + h_{11} \left(\frac{x_1 - x_{1,i_1}}{\Delta_{1,i_1}} \right) \psi_{i_2+1}(x_2) + \\ &+ \varphi_{i_2}(x_1) h_{20} \left(\frac{x_2 - x_{2,i_2}}{\Delta_{2,i_2}} \right) + \varphi_{i_2+1}(x_1) h_{2,1} \left(\frac{x_2 - x_{2,i_2}}{\Delta_{2,i_2}} \right) - \\ &- \sum_{i'_1=i_1}^{i_1+1} \sum_{i'_2=i_2}^{i_2+1} C_{i'_1,i'_2} h_{1,i'_1-i_1} \left(\frac{x_1 - x_{1,i_1}}{\Delta_{1,i_1}} \right) h_{2,i'_2-i_2} \left(\frac{x_2 - x_{2,i_2}}{\Delta_{2,i_2}} \right),\end{aligned}$$

тобто, отримали Блендінг, інтерлінуючий функцію $u(x)$ на границе ∂R_i :

$$\begin{aligned}v_i(x_{1,i'_1}, x_2) &= u(x_{1,i'_1}, x_2) = \psi_{i'_1}(x_2) \quad (i'_1 = i_1, i_1 + 1); \\ v_i(x_1, x_{2,i'_2}) &= u(x_1, x_{2,i'_2}) = \varphi_{i'_2}(x_1) \quad (i'_2 = i_2, i_2 + 1).\end{aligned}$$

Той факт, що множина $B_{M,\pi}^0(G)$ містить відповідний інтерліант розв'язок вихідної задачі, є відправним при доказі наступної теореми.

Теорема 2. Нехай $u(x) \in L_2^{p_1, p_2}(G)$ ($m \leq p_k \leq mM_k$, $k=1,2$) – розв'язок задачі (13), $u^*(x) \in B_{M,\pi}^0(G)$ – розв'язок задачі

$$J_{m,G}(v) \rightarrow \inf, v \in B_{M,\pi}^{0^m}(G).$$

Тогда $\exists C > 0$:

$$\|u - u^*\|_{W_2^n(G)} \leq Ch^{p_2+p_2-h} \quad (h \rightarrow 0)$$

Доведення. Позначимо через $u_{M,m,\pi}(x)$ інтерліант розв'язку $u(x)$. Тоді, з нерівності отримуємо

$$\|u - u^*\|_{W_2^n(G)} \leq C_1 \inf_{v \in B_{M,\pi}^{0^m}(G)} \|u - v\|_{W_2^n(G)} \leq C_2 \|u - u_{M,m,\pi}\|_{W_2^n(G)} \leq Ch^{p_1+p_2-n} \quad (h \rightarrow 0).$$

Теорема доведена.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Mathcad як система для розрахунків символічної математики

Mathcad – це дуже популярна система комп'ютерної математики, призначена для автоматизованого розв'язку та вирішення дуже великих математичних задач в дуже різних областях техніки, науки та освіти.

Mathcad має простий, навіть дуже простий для використання інтерфейс користувача. Для введення даних і формул можна використати як клавіатуру, так і спеціальні інструменти які знаходяться на панелі зверху. Працюємо в межах робочого листа – робочий лист, це біле поле на екрані, на якому вирази і рівняння відображають себе графічно, це суперечить текстовому запису в таких мовах програмування або в декількох аналогічних систем комп'ютерної алгебри, наприклад Wolfram Mathematica. Коли створюємо документи використовують принципи WYSIWYG (What You See Is What You Get – «що бачиш, те й отримуєш»).

Mathcad містить більше сотень вбудованих і операторів у функції для розв'язку різноманітних завдань а саме технічних. Програми дозволяють нам виконувати символічних і чисельних обчислень, для проведення операцій із величинами, а саме векторами, скалярним і матрицям, на автоматі переводить одну одиницю вимірювання в іншу.

Серед можливостей Mathcad можна виділити самі важливі наступні:

- виконання операцій з матрицею і вектором;
- використання грецького алфавіту як в текстах, так і в рівнянні;
- побудова тривимірні і двовимірні графіки функції (в різних системах координат, контури, вектори і так далі);
- виконує обчислення в символічному режимі;
- розв'язок диференціального рівняння, в тому числі і з чисельним методами;

- апроксимація кривої;
- символічне розв'язання системи рівнянь;
- проведення статистичного розрахунку і робота з розподілами ймовірностей;
- пошуки кореня многочлена і функції;
- виконання будь яких підпрограм і програм;
- пошук власних векторів і чисел;
- розв'язання з різними або однаковим одиницями вимірювань.

Коли переглянули та врахувати усе вище записане, то можна сказати і потрібно сказати, що Mathcad повністю задовольняє всі потреби для програмної реалізації метода, який був описаний нами у розділі 2. Тому як дана робота стосується теми моделювання математичних томографічних конструкції, то найважливішою вимогою є можливість відображення графічних даних у різноманітних проекціях.

В даній дипломній роботі серед усіх програмних версій, була обрана версія Mathcad 15.

1.2 Опис програми

Програма для розробки та представлення оптимального методу скінчених елементів була виконана у математичному пакеті Mathcad 15. Структура програми була створена у Notebook середовища Mathcad 15 і в ній же проведені розрахунки на різну кількість вузлів та перетинів. За збільшенням вузлів та перетинів ($n = 4$ або $n = 8$ та для прямокутної області $n = 6$) час розрахунків збільшувався у n разів. Із чого було уроблено висновок, що треба використати допоміжний метод (класичний метод) для знаходження більш приблизних оптимальних $c_{k,l}$.

Для розрахунків для $n = 6$ ми брали простір у формі кутка та знаходили початкові значення для оптимального методу скінчених елементів завдяки

класичному методу, це дуже зменшило часу у наших розрахунках.

Для більш найкращої швидкості розрахунків нашу програму було розбито на 4 окремих блоків, в яких окремо проводились розрахунки.

Перший файл програми «Clasik_N4» відповідає за завдання знаходження більш оптимальних для нашої задачі $c_{k,l}$ завдяки класичному методу для $n = 4$.

Другий файл програми «OFME_N4» реалізує оптимальний метод скінченних елементів, використовуючи початкові значення $c_{k,l}$ узятих із класичного методу, котрий на виході нам розраховує оптимальні значення для $n = 4$. Завдяки використанню класичного методу, для тримання початкових значень, наш час розрахунків зменшився з чотири годин до десять хвилин.

Третій файл програми «Clasik_N8» відповідає за завдання знаходження більш оптимальних, початкових, для нашої задачі $c_{k,l}$ завдяки класичному методу для $n = 8$.

Четвертий файл програми «OFME_N8» реалізує оптимальний метод скінченних елементів, використовуючи початкові значення $c_{k,l}$ узятих із класичного методу, котрий на виході нам розраховує оптимальні значення для $n = 8$. Завдяки використанню класичного методу, для тримання початкових значень, наш час розрахунків зменшився з тридцять сім годин до двадцять сім хвилин.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

4.1 Результати обчислень для $n = 6$

Ми будемо проводити експеримент для прямокутної області із однаковими сторонами. Область G представляє собою, область яка зверху і з низу обмежена прямими, а саме відрізками

$$G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\},$$

$$\Delta u(x, y) = -2, \quad (x, y) \in G, \quad (4.1)$$

$$u|_{\partial G} = 0. \quad (4.2)$$

Спочатку ми розглянемо класичний метод завдяки якому знайдемо наближені значення коефіцієнтів $c_{k,l}$ для $n = 6$. Розраховуючи цим методом на буде потрібне приблизне значення $c_{k,l}$, котре буде співпадати зі значенням які були отримані при попередніх розв'язках. Таким же чином візьмемо за початкові значення $a = 1,0, b = 1,0, c = 0,5$.

Будемо вводити нове значення $X_k = \frac{k \cdot a}{n}, Y_l = \frac{l \cdot b}{n}$ які модуть позначати перетинок прямих які ми розглядаємо, тобто де в нас формуються вузлові точки та вузли.

Так саме побудуємо і запишемо графіки для симетричної крайової задачі. Розв'язок розглянуто тут рис. 4.2, а також для його диференціалу рис. 4.3.

$$hcl(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq -1 \vee t \geq 1 \\ 1-t & \text{if } 0 \leq t \wedge t < 1 \\ t+1 & \text{if } -1 < t \wedge t < 0 \end{cases}$$

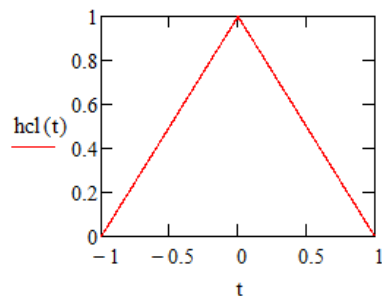


Рисунок 4.2 – Крайове рішення

$$DHcl(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq -1 \\ 1 & \text{if } -1 < t < 0 \\ 0 & \text{if } t = 0 \\ (-1) & \text{if } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{if } t \geq 1 \end{cases}$$

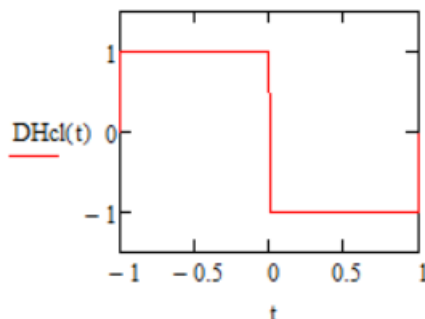


Рисунок 4.3 – Диференціал крайового рішення

Саме тому, ми знайшли приблизне розв'язання та його диференціали для розрахунку функціоналу енергії.

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{n-1} [c_{k,1} \cdot h(n \cdot x - k) \cdot h(n \cdot y - 1)] + \sum_{l=1}^{n-1} [c_{1,l} \cdot h(n \cdot x - 1) \cdot h(n \cdot y - l)].$$

Завдяки диференціюванню ми отримаємо:

$$\frac{du}{dx} = n \cdot \sum_{k=1}^{n-1} [c_{k,1} \cdot Dh(n \cdot x - k) \cdot h(n \cdot y - 1)] + n \cdot \sum_{l=1}^{n-1} [c_{1,l} \cdot Dh(n \cdot x - 1) \cdot h(n \cdot y - l)],$$

$$\frac{du}{dy} = n \cdot \sum_{k=1}^{n-1} [c_{k,1} \cdot h(n \cdot x - k) \cdot Dh(n \cdot y - 1)] + n \cdot \sum_{l=1}^{n-1} [c_{1,l} \cdot h(n \cdot x - 1) \cdot Dh(n \cdot y - l)].$$

Після цього, коли маємо всі потрібні значення, ми можемо знайти матрицю $c_{k,l} = A^{-1} \cdot F$:

$$c = \begin{pmatrix} -0,0557 \\ -0,0882 \\ -0,0889 \\ -0,0882 \\ -0,0557 \\ -0,0882 \\ -0,1224 \\ -0,1336 \\ -0,1224 \\ -0,0882 \\ -0,0889 \\ -0,1336 \\ -0,1551 \end{pmatrix}.$$

Як ми можемо подивитись із відповіді в матриці можна побачити симетричність це може казати лише про те, що ми правильно обрали область визначення. Тому ми бачимо, що отримане наближення значень $c_{k,l}$ можна підставити до розрахунку у метод ОМСЕ. Початкові умови залишаються не змінними.

Розглянемо початкову матрицю $c_{k,l}$ коли ми підставимо у нульовий рядок значення $\lambda = 2,275$, $\gamma = -0,81$, $\mu = 0,435$, то ми отримаємо.

$$c = \begin{pmatrix} 0,0000 & 2,27500 & -0,81000 & 0,43500 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,0000 & -0,0570 & -0,0820 & -0,0890 & -0,0820 & -0,0570 \\ 0,0000 & -0,0820 & -0,1240 & -0,1360 & -0,1240 & -0,0820 \\ 0,0000 & -0,0890 & -0,1360 & -0,1510 & -0,1360 & -0,0890 \\ 0,0000 & -0,0820 & -0,1240 & -0,1360 & -0,1240 & -0,0820 \\ 0,0000 & -0,0570 & -0,0820 & -0,0890 & -0,0820 & -0,0570 \end{pmatrix}.$$

Після цього ми можемо знайти крайове симетричне рівняння завдяки цьому методу,

$$h_i(x) = \frac{1 - 2\gamma_i}{2} \frac{ch\mu_i(x - \frac{1}{2})}{ch\frac{\mu_i}{2}} - \frac{sh\lambda_i(x - \frac{1}{2})}{2sh\frac{\lambda_i}{2}} + \gamma_i.$$

Використовуючи (3), (4), (5) – запишемо формулу для $J(c)$.

$$J(c) = \int_0^1 \int_0^{0.5} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 4u \right] dx dy = -0,1322.$$

Коли ми отримали $J(c)$ розробляємо мінімізацію по саме тій функції із значення $c_{k,l}$, так названою її матрицею B і запишемо у матричному вигляді.

$$B = \begin{pmatrix} 1,896 \\ -0,73 \\ 0,356 \end{pmatrix}.$$

$$J(B) = -0,1322.$$

Як ми можемо бачити значення зменшилось після мінімізації, отже ми можемо зробити висновок, що метод працює, та дає більш точний результат.

4.2 Результати обчислень для $n = 4$

Наше обчислення для експерименту буде проведено для прямокутної області у формі кутка із однаковою стороною зверху і знизу. G це область яка буде представляти собою фігуру яка обмежується прямими відрізками.

$$G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\} \setminus \{(x, y) : c \leq x \leq a, c \leq y \leq b\},$$

$$\Delta u(x, y) = -2, \quad (x, y) \in G, \quad (4.1)$$

$$u|_{\partial G} = 0. \quad (4.2)$$

Щоб пришвидшити роботу скористаємось класичним методом завдяки йому зможемо відшукати наближене значення коефіцієнту $c_{k,l}$ для $n=4$. Щоб розрахувати за допомогою метода нам потрібно значення $c_{k,l}$ хоча б приблизне, де воно буде дорівнювати 0,15. Таким же чином будемо задавати початкові значення $a=1, b=1, c=0,5$.

Будемо водити значення $X_k = \frac{k \cdot a}{n}, Y_l = \frac{l \cdot b}{n}$ які мають позначать перетини прямих які ми використовуємо, тобто де в нас формуються вузлові точки та вузли, значення представлені на рис. 4.1.

$$X_k = \frac{k \cdot a}{N} \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 0.5 \\ 0.75 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Y_l = \frac{l \cdot b}{N} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 0.5 \\ 0.75 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рисунок 4.1 – Лінії перетину прямих

Так само побудуємо і запишемо саме намалюємо графік для симетричного крайового розв'язку рис 4.2, так само для саме його диференціалу рис. 4.3.

$$Hcl(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq -1 \\ (1+t) & \text{if } -1 < t \leq 0 \\ (1-t) & \text{if } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{if } t \geq 1 \end{cases}$$

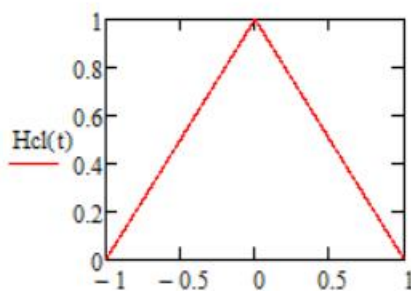


Рисунок 4.2 – Крайовий розв'язок задачі

$$DHcl(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq -1 \\ 1 & \text{if } -1 < t < 0 \\ 0 & \text{if } t = 0 \\ (-1) & \text{if } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{if } t \geq 1 \end{cases}$$

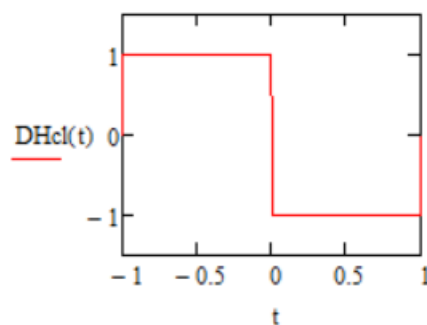


Рисунок 4.3 – Диференціал крайового розв'язка задачі

Завдяки цьому, ми можемо знайти приблизний розв'язок та його диференціал для розрахунку функціонала енергії.

$$u(x, y) = \sum_{t=1}^{n-1} [c_{k,1} \cdot h(n \cdot x - t) \cdot h(n \cdot y - 1)] + \sum_{l=1}^{n-1} [c_{1,l} \cdot h(n \cdot x - t) \cdot h(n \cdot y - l)] - \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} [c_{k,l} \cdot h(n \cdot x - t) \cdot h(n \cdot y - l)]. \quad (4.3)$$

Після диференціювання (3) отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} = n \cdot \sum_{t=1}^{n-1} [c_{t,1} \cdot Dh(n \cdot x - t) \cdot h(n \cdot y - 1)] + n \cdot \sum_{l=1}^{n-1} [c_{1,l} \cdot Dh(n \cdot x - 1) \cdot h(n \cdot y - l)] \\ - n \cdot \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} [c_{t,l} \cdot Dh(n \cdot x - t) \cdot h(n \cdot y - l)]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dy} = n \cdot \sum_{t=1}^{n-1} [c_{t,1} \cdot h(n \cdot x - t) \cdot Dh(n \cdot y - 1)] + n \cdot \sum_{l=1}^{n-1} [c_{1,l} \cdot h(n \cdot x - 1) \cdot Dh(n \cdot y - l)] \\ - n \cdot \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} [c_{t,l} \cdot h(n \cdot x - t) \cdot Dh(n \cdot y - l)]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Будемо оглядати матрицю А завдяки наших рівнянь та симетричних крайових рівнянь. Тим самим, ми зможемо прибрати нульовий стовпчик та рядок для зручності розрахунків.

$$A = \begin{pmatrix} 2,66701 & -0,3333 & 0,00000 & -0,3333 & 0,00000 \\ -0,3333 & 2,6667 & -0,3333 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,00000 & -0,3333 & 2,66701 & 0,00000 & 0,00000 \\ -0,3333 & 0,00000 & 0,00000 & 2,66701 & -0,3333 \\ 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & -0,3333 & 2,66701 \end{pmatrix}.$$

У зв'язку з цим ми можемо знайти підінтегральну функцію, саме тому, що у нас область має форму кута («черевика») то саме таку функцію нам повинно записати 33, що б захопити усю область, і не залишилось точок яких ми не торкались.

$$F_1 = \int_0^{10,5} \int_0^{10,5} f(x, y) \cdot v(n \cdot x - 1) \cdot v(n \cdot y - 1) dy dx,$$

$$F_2 = \int_0^{10,5} \int_0^{10,5} f(x, y) \cdot v(n \cdot x - 2) \cdot v(n \cdot y - 1) dy dx,$$

$$F_3 = \int_0^{10,5} \int_0^{10,5} f(x, y) \cdot v(n \cdot x - 3) \cdot v(n \cdot y - 1) dy dx,$$

$$F_4 = \int_0^{0,51} \int_0^{0,51} f(x, y) \cdot v(n \cdot x - 1) \cdot v(n \cdot y - 2) dy dx,$$

$$F_4 = \int_0^{0,51} \int_0^{0,51} f(x, y) \cdot v(n \cdot x - 1) \cdot v(n \cdot y - 3) dy dx.$$

Відповіді будемо записувати у матричному вигляді:

$$F = \begin{pmatrix} -0,1250 \\ -0,1250 \\ -0,1250 \\ -0,1250 \\ -0,1250 \end{pmatrix}.$$

Коли ми знаємо всі необхідні значення, знайдемо матрицю $c = A^{-1} \cdot F$.

$$c = \begin{pmatrix} -0,0622 & -0,0611 & -0,0555 \\ -0,0611 & 0,00000 & 0,00000 \\ -0,0555 & 0,00000 & 0,00000 \end{pmatrix}.$$

Коли дивимось на матрицю, ми можемо побачити із відповіді, в матриці є симетричність і є у нижньому кутку шістьнадцять нулів, це може сказати лише про те, що ми вірно виділили області визначення і що саме дійсно ми можемо побачити що областю нашого розрахунку є «чобіт». Тільки зараз, коли ми отримали наближене значення $c_{k,l}$ ми можемо підставити їх для розрахунку у метод ОМСЕ. Умови які були спочатку залишаються незмінними..

Для початку будемо записувати початкову матрицю $c_{k,l}$, коли підставимо до нульового рядка такі значення $\lambda = 1,284$, $\gamma = 0,532$, $\mu = 0,409$,

$$c = \begin{pmatrix} 0,00000 & 1,28440 & 0,53220 & 0,40990 \\ 0,00000 & -0,0622 & -0,0611 & -0,0555 \\ 0,00000 & -0,0611 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,00000 & -0,0555 & 0,00000 & 0,00000 \end{pmatrix}.$$

Тепер будемо знаходити симетричне для крайового рівнянню саме із те-перішнього методу,

$$h_i(t) = \frac{1 - 2\gamma_i}{2} \frac{ch\mu_i(t - \frac{1}{2})}{ch\frac{\mu_i}{2}} - \frac{sh\lambda_i(t - \frac{1}{2})}{2sh\frac{\lambda_i}{2}} + \gamma_i. \quad (4.6)$$

Із допомогою (4.3), (4.4), (4.5) – можемо записати формулу для $J(c)$.

$$J(c) = \int_0^1 \int_0^{0,5} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 4u \right] dt dy + \int_0^{0,5} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 4u \right] dt dy - \\ - \int_0^{0,5} \int_0^{0,5} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 4u \right] dt dy = -0,0377.$$

Тільки тоді, коли ми отримуємо $J(c)$ можливо зробити мінімізацію по нашій функції із значенням $c_{k,l}$, і будемо називати її матриця B і запишемо її у матричну форму:

$$B = \begin{pmatrix} 0,00000 & -0,8944 & 4,14110 & 0,54770 \\ 0,00000 & -0,0511 & -0,0511 & -0,0449 \\ 0,00000 & -0,0511 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,00000 & -0,0449 & 0,00000 & 0,00000 \end{pmatrix},$$

$$J(B) = -0,044.$$

Як ми можемо побачити число стало меншим ніж було раніше, саме тому ми бачимо працюючий метод, який дає результат котрий більш точний. Отримані значення при $n=4$, будуть використані як початкові значення, а для саме $\lambda = -0,894$, $\gamma = 4,141$, $\mu = 0,547$.

4.3 Результати обчислень для $n=8$

Для скорочення роботи розрахунків завдяки класичному методу будемо знаходити наближені значення коефіцієнтів $c_{k,l}$ для $n=8$. Саме тому розрахунки цими методами нам все одно знадобиться близьке значення $c_{k,l}$, ти самим воно буде дорівнюватись значенню які я отримав під час розрахунку для $n=4$. Також візьмемо початкові значення $a=1, b=1, c=0,5$ із попереднього завдання.

Будемо водити значення $X_k = \frac{k \cdot a}{n}, Y_l = \frac{l \cdot b}{n}$ які мають позначать перетини прямих які ми використовуємо, тобто де в нас формуються вузлові точки та вузли, значення представлені на рис. 4.4.

$$X_k = \frac{k \cdot a}{N} \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.125 \\ 0.25 \\ 0.375 \\ 0.5 \\ 0.625 \\ 0.75 \\ 0.875 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Y_l = \frac{l \cdot b}{N} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.125 \\ 0.25 \\ 0.375 \\ 0.5 \\ 0.625 \\ 0.75 \\ 0.875 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рисунок 4.4 – Лінія перетину прямих

Так само побудуємо і запишемо саме намалюємо графік для симетричного крайового розв'язку рис 4.5, так само для саме його диференціалу рис. 4.6.

$$Hcl(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq -1 \\ (1+t) & \text{if } -1 < t \leq 0 \\ (1-t) & \text{if } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{if } t \geq 1 \end{cases}$$

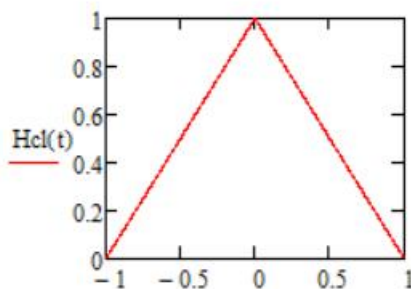


Рисунок. 4.5 – Крайовий розв’язок задачі

$$DHcl(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq -1 \\ 1 & \text{if } -1 < t < 0 \\ 0 & \text{if } t = 0 \\ (-1) & \text{if } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{if } t \geq 1 \end{cases}$$

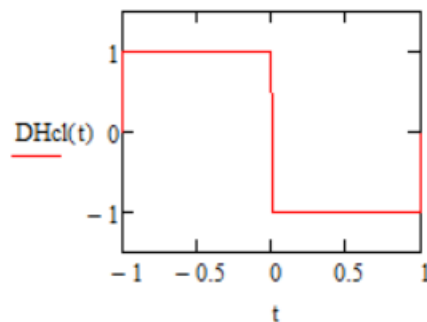


Рисунок 4.6 – Диференціал крайового розв’язка задачі

Завдяки цьому, ми знайти можемо приблизне розв’язання та його диференціали для розрахунку функціоналу енергії:

$$u(x, y) = \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} [c_{t,l} \cdot h(n \cdot x - t) \cdot h(n \cdot y - l)] + \sum_{t=1}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{l=1}^{n-1} [c_{t,l} \cdot h(n \cdot x - t) \cdot h(n \cdot y - l)] - \sum_{t=1}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} [c_{t,l} \cdot h(n \cdot x - t) \cdot h(n \cdot y - l)]. \quad (4.7)$$

Після диференціювання (4.7) ми отримаємо:

$$\frac{du}{dx} = n \cdot \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} [c_{t,l} \cdot Dh(n \cdot x - t) \cdot h(n \cdot y - l)] + n \cdot \sum_{t=1}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{l=1}^{n-1} [c_{t,l} \cdot Dh(n \cdot x - t) \cdot h(n \cdot y - l)] - n \cdot \sum_{t=1}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} [c_{k,l} \cdot Dh(n \cdot x - t) \cdot h(n \cdot y - l)], \quad (4.8)$$

$$\frac{du}{dy} = n \cdot \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} [c_{t,l} \cdot h(n \cdot x - t) \cdot Dh(n \cdot y - l)] + n \cdot \sum_{t=1}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{l=1}^{n-1} [c_{t,l} \cdot h(n \cdot x - t) \cdot Dh(n \cdot y - l)] - n \cdot \sum_{t=1}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} [c_{t,l} \cdot h(n \cdot x - t) \cdot Dh(n \cdot y - l)]. \quad (4.9)$$

Будемо оглядати матрицю А завдяки наших рівнянь та симетричних крайових рівнянь. Тим самим, ми зможемо прибрати нульовий стовпчик та рядок для зручності розрахунків. Тому як є велика розмірність матриць ми можемо записати її значення у вигляді таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Матриця А

0,4444	-0,111	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,111	0,0288	0,000
-0,111	0,4444	-0,111	0,000	0,000	0,000	0,000	0,0288	-0,111	0,0288
0,000	-0,111	0,4444	-0,111	0,000	0,000	0,000	0,000	0,0288	-0,111
0,000	0,000	-0,111	0,4444	-0,111	0,000	0,000	0,000	0,000	0,0288
0,000	0,000	0,000	-0,111	0,4444	-0,111	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	-0,111	0,4444	-0,111	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,111	0,4444	0,000	0,000	0,000
-0,111	0,0288	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,4444	-0,111	0,000

Продовження таблиці наведено у Додатку Б.

У зв'язку з цим ми можемо знайти підінтегральну функцію, саме тому,

що у нас область має форму кута («черевика») то саме таку функцію нам повинно записати 33, що б захопити усю область, і не залишилось точок яких ми не торкались. Щоб побачити формулу для $F_{i,j}$ її можливо подивитись у Додатку Б.

Відповіді запишемо у матричному вигляді

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0311 \\ 0 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0311 \\ 0 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0311 \\ 0 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0233 & -0,0166 & -0,0166 & -0,0166 \\ 0 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0166 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0166 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0311 & -0,0166 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \end{pmatrix}.$$

Коли, ми маємо усі потрібні значення, знайдемо матрицю $c = A^{-1} \cdot F$.

$$c = \begin{pmatrix} 0,0 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,0 & -0,0311 & -0,0444 & -0,0499 & -0,0499 & -0,0455 & -0,0399 & -0,0288 \\ 0,0 & -0,0444 & -0,0655 & -0,0711 & -0,0688 & -0,0611 & -0,0522 & -0,0355 \\ 0,0 & -0,0499 & -0,0711 & -0,0699 & -0,0599 & -0,0477 & -0,0400 & -0,0288 \\ 0,0 & -0,0499 & -0,0688 & -0,0599 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,0 & -0,0455 & -0,0611 & -0,0477 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,0 & -0,0399 & -0,0522 & -0,0400 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,0 & -0,0288 & -0,0355 & -0,0288 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \end{pmatrix}.$$

Коли дивимось на матрицю, ми можемо побачити із відповіді, в матриці є симетричність і є у нижньому кутку шістнадцять нулів, це може сказати лише про те, що ми вірно виділили області визначення і що саме дійсно ми можемо побачити що областю нашого розрахунку є «чобіт». Тільки зараз, коли ми отримали наближене значення $c_{k,l}$ ми можемо підставити їх для розрахунку у

метод ОМСЕ. Умови які були спочатку залишаються незмінними.

Для початку будемо записувати початкову матрицю $c_{k,l}$, коли підставимо до нульового рядка такі значення $\lambda = -0,894, \gamma = 4,141, \mu = 0,547$ їх ми отримали із розрахунку який робили раніше:

$$c = \begin{pmatrix} 0,0 & -0,8944 & 4,14101 & 0,54707 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,0 & -0,0311 & -0,0444 & -0,0499 & -0,0499 & -0,0455 & -0,0399 & -0,0288 \\ 0,0 & -0,0444 & -0,0655 & -0,0711 & -0,0688 & -0,0611 & -0,0522 & -0,0355 \\ 0,0 & -0,0499 & -0,0711 & -0,0699 & -0,0599 & -0,0477 & -0,0400 & -0,0288 \\ 0,0 & -0,0499 & -0,0688 & -0,0599 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,0 & -0,0455 & -0,0611 & -0,0477 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,0 & -0,0399 & -0,0522 & -0,0400 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,0 & -0,0288 & -0,0355 & -0,0288 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \end{pmatrix}$$

Тепер будемо знаходити симетричне для крайового рівнянню саме із те-перішнього методу,

$$h_i(t) = \frac{1 - 2\gamma_i}{2} \frac{ch\mu_i(t - \frac{1}{2})}{ch\frac{\mu_i}{2}} - \frac{sh\lambda_i(t - \frac{1}{2})}{2sh\frac{\lambda_i}{2}} + \gamma_i. \quad (4.6)$$

Із допомогою (7), (8), (9) – можемо записати формулу для $J(c)$.

$$J(c) = \int_0^1 \int_0^{0,5} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 4u \right] dt dy + \int_0^{0,5} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 4u \right] dt dy - \\ - \int_0^{0,5} \int_0^{0,5} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 4u \right] dt dy = 8,554 \cdot 10^{-4}.$$

Тільки тоді, коли ми отримуємо $J(c)$ можливо зробити мінімізацію по нашій функції із значенням $c_{k,l}$, і будемо називати її матриця B і запишемо її у

матричну форму:

$$B = \begin{pmatrix} 0,0 & -0,8944 & 2,88777 & 0,28888 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,0 & -0,0300 & -0,0422 & -0,0466 & -0,0466 & -0,0433 & -0,0388 & -0,0277 \\ 0,0 & -0,0422 & -0,0611 & -0,0655 & -0,0633 & -0,0577 & -0,0500 & -0,0344 \\ 0,0 & -0,0466 & -0,0655 & -0,0622 & -0,0477 & -0,0433 & -0,0388 & -0,0277 \\ 0,0 & -0,0466 & -0,0633 & -0,0477 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,0 & -0,0433 & -0,0577 & -0,0433 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,0 & -0,0388 & -0,0500 & -0,0388 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,0 & -0,0277 & -0,0344 & -0,0277 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \end{pmatrix}$$

$$J(B) = -0,049.$$

Як ми можемо побачити число стало меншим ніж було раніше, саме тому ми бачимо працюючий метод, який дає результат котрий більш точний.

5 АНАЛІЗ МОЖЛИВИХ ЗАСТОСУВАНЬ

Завдяки результатам дипломної роботи, отриманні дані можуть широко застосовуватись галузі науки та техніки у сучасному світі. Такі терміни як нтерлінації та інтерфлетація функції з дуже великою інтенсивность розвиваються у розділах математичного аналізу. Велика зацікавленість до цих термініав викликає широке застосуваннями як у самій математиці, а саме теорія наближення функцій та побудування функції, що задовольняє неоднорідні крайові умови, та також навіть за її межами, а саме обробки результату експерименту, в проектуванні літаків , судів, автомобілів та також у відновленні поверхоні по відомим їх перетинах цих даних гідролокації або радіолокації.

Тому, задачі інтерфлетації без збереженого класу C^r може бути розв'язані лише за допомогою методу R-функцій, розробленого В.Л. Рвачева [2-4]. Хоча, отримана на зараз конструкція, має при собі свої громіздкість і спільності, як ми розуміємо, містить в собі особливість у точці перетинів різних поверхонь Γ_k та $\Gamma_{k'}$, $(k, k' = \overline{1, M}; k \neq k')$, що тільки може ускладнювати їх користування та отримування ефективної оцінки наближення. Саме тому, актуальність цієї задачі побудова раціональних інтерлінантов, інтерлінірующих на довільну множину M прямих $(M \in \mathbb{N}, M < \infty)$, а саме для їх дослідження.

Коли ми переглянемо, все що в нас вийшло, ми побачимо очевидну актуальність побудування оператору продовження даних Коші для допомоги розв'язку диференціального рівняння з приватною похідною і постійним коефіцієнтом, узагальнених операторів для продовження Даламбера.

ВИСНОВКИ

При написанні дипломної роботи ми розглянули та дослідили оптимальний метод скінченних елементів при розв'язанні крайової задачі кручення стержня. Математична модель яку ми розглядали для процесу – це задача Діріхле для рівняння Пуасона. Щоб отримати чисельне розв'язання ми використовували класичний метод щоб здобути початкові приблизні значення, та теж оптимальний метод скінченних елементів, для розв'язку нашої задачі та щоб отримати найбільшу кількість точних значень, відповідей, котрі ми змогли отримати у теперішньому часі із усіх методів котрі зараз існують.

Ми провели аналізи операторів крайової задачі на симетричність та додатну означеність. Ще ми описали і обґрунтували схему обчислювань розв'язку задачі де брали за основу оптимальний метод скінчених елементів.

Експеримент котрий ми обчислювали був проведений для трьох задач, котрі відрізнялись між собою, кількістю вільних елементів та кількістю вузлів. Саме тому для кожної задачі ми навели програмну реалізацію. Данні які ми отримали, а саме відповіді ми навели у вигляді інтегральних функцій та матриць.

Всі данні котрі ми отримали та результат є узгодженим із результатами числового експерименту та з фізичним результатом, які нам є відомі з літератури.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. INTEGRATION DEFINITION FOR FUNCTION MODELING (IDEF0). Draft Federal Information Processing Standards Publication 183, 1993. 325 с.
2. John Azzolini (2000). Introduction to Systems Engineering Practices. July 2001. 250 с.
3. Калашян А. Н., Калянов Г. Н. Структурные модели бизнеса: DFD-технологии. Москва : Финансы и статистика, 2003. 363 с.
4. Fiodorov I. G. Overcoming expressiveness deficit of business process modeling languages // Business Informatics. 2016. № 3 (37). P. 62-71.
5. Литвин О. М. Інтерлинація функцій. Дис. на здобуття наукового ступеня д.ф.-м.н. Київ..КДУ ім. Т.Шевченка.1989. – 300с.
6. Литвин О. М., Методи обчислень. Додаткові розділи: Київ : Наук. думка, 2005. 344 с.
7. Литвин О. М., Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харків : Основа, 2002. 544с..
8. Шура – Бура М. Р. Аппроксимация функций многих переменных функциями, каждая из которых зависит от одного переменного. В. сб.: Вчислительная математика, Москва : АН СССР. 1957, №2, С. 3–19.
9. Chen, Z. Finite Elements Methods and Their Applications. Leipzig : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. 410 p.
10. Badea C., Badea I. Bivariate approximation by algebraic and trigonometric blending functions. Itinerant seminar on functional equations, approximation and convexity. Cluj-Napoca, Preprint №7. 1986, P. 33–40.
11. Семикіна А. А ., Кобозєв В. К. Дослідження параметрів базисної функції в оптимальному методі скінченних елементів в залежності від максимального кроку розбиття // 23-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка та молодь у ХХІ столітті» : зб. матеріалів форуму (м. Харків, 16-18 квітня 2019 р.). Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2019. С. 70–71.