УДК 537.87:621.371

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ С НЕСТАЦИОНАРНЫМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СЛОЕМ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

*ФЕДОТОВ Ф.В., НЕРУХ А.Г.*

Рассматривается численное исследование взаимодействия электромагнитного поля с нестационарным диэлектрическим слоем при помощи метода интегральных уравнений Вольтерра (МИУВ). Разрабатывается специальное программное обеспечение для автоматизации моделирования таких взаимодействий на основе рассмотренного метода.

## 1. Введение

Параметрические явления в активных средах вызывают интерес в связи с возможностью генерации, усиления и преобразования электромагнитных волн и имеют важное значение в современной радиотехнике и оптоэлектронике [1,2]. Использование методов, основанных на преобразованиях Фурье, малоэффективно и затруднительно для данного класса задач вследствие широкого спектра исследуемых сигналов и зависимости параметров среды от времени [3].

В настоящее время наиболее популярным численным методом для исследования электродинамических задач во временной области является метод конечных разностей (FDTD)[4]. Однако при решении задач с переменными во времени параметрами среды данным методом возникают проблемы со стабильностью решения [5,6].

В данной статье предлагается метод, основанный на интегральных уравнениях Вольтерра во временной области (МИУВ) [3,5], которые эквивалентны электродинамическим уравнениям Максвелла. Отличительной особенностью МИУВ является то, что начальные и граничные условия неявно учитываются в интегральном уравнении задачи [5]. Данный подход для ряда задач превосходит по точности метод FDTD [6] и обладает высокой стабильностью при моделировании нестационарных сред.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим однородную неограниченную среду с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$, в которой в определенный начальный момент времени $t_0 = 0$ образуется нестационарный слой в области $0 < x < L$. В момент создания слоя в фоновой среде, перпендикулярно к возникающему слою, распространяется электромагнитный сигнал, заданный функцией $E_0(t,x)$. В общем случае среда в слое описывается функцией поляризации $P(t,x)$, параметры которой, под воздействием сторонних факторов, изменяются во времени со скоростью, соизмеримой со скоростью изменения электрического поля. Электрическое поле для данной задачи внутри и вне слоя описывается следующим уравнением Вольтерра II рода [5]:

$$E(t,x) = E_0(t,x) - \frac{1}{2v}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t dt'\int_0^L dx',$$

$$\delta\left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v}\right)\left[\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}P(t',x') - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}E(t',x')\right],$$

где $v = c/\sqrt{\varepsilon}$, $c$ — скорость света в вакууме; $\delta(t)$ — дельта — функция Дирака; $L$ — глубина слоя; $\varepsilon_0$ — диэлектрическая постоянная. Для реализации численного счета перейдем к безразмерным координатам, нормированным на глубину слоя: $\tau = vt/L$, $\xi = x/L$. Тогда после вычисления внутреннего интеграла по пространственной координате $\xi$ уравнение сводится к виду:

$$E(\tau,\xi) = E_0(\tau,\xi) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}(H + L),$$

здесь $H = \int\limits_{\substack{0<\tau'<\tau \\ 0\le\xi+\tau-\tau'\le 1}} \tilde{P}(\tau',\xi+(\tau-\tau'))d\tau'$,

$$L = \int\limits_{\substack{0<\tau'<\tau \\ 0\le\xi+\tau-\tau'\le 1}} \tilde{P}(\tau',\xi-(\tau-\tau'))d\tau'.$$

Два интеграла L и H в уравнении на пространственно-временной плоскости $(\xi,\tau)$ соответствуют двум, сходящимся к вычисляемой точке диагональным линиям.

Для диэлектрической среды функция $\tilde{P}$ в интегралах задаётся следующим соотношением:

$$\tilde{P}(\tau,\xi) = \left(\frac{\varepsilon_1(\tau,\xi)}{\varepsilon} - 1\right)E(\tau,\xi).$$

## 3. Реализация алгоритма численного счета

Для численного построения решения уравнения целесообразно использовать прямоугольную пространственно-временную сетку, в которой шаг по времени в безразмерных величинах вдвое меньше шага по пространству [6]. Решение, построенное на такой сетке, обладает лучшей стабильностью и более высокой точностью, по сравнению с аналогичной квадратной сеткой [6].

Для совмещения линий интегрирования с узлами сетки узлы на нечетных временных слоях смещены на полшага по пространственной координате. Структура такой сетки изображена на рис. 1. Для решения уравнения выполнена дискретизация производной конечной разностью, а интеграл рассчитан по формуле трапеций. Вычисление криволинейных интегралов, необходимое для всех пространственных точек, должно быть выполнено на каждом временном шаге. Учитывая, что пути интегрирования на разных временных итерациях накладываются друг на друга, можно избежать повторных операций суммирования для вычисления интегралов и оптимизировать численный расчет. Для этого достаточно запоминать вычисленную интегральную сумму на текущей итерации и использовать её позже для вычисления соответствующего интеграла на следующем временном шаге.

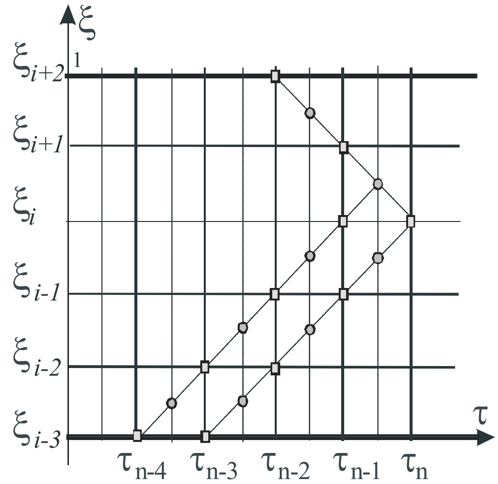


Рис.1. Прямоугольная пространственно-временная сетка. Шаг по времени вдвое меньше пространственного шага. Узлы сетки на нечетных временных слоях смещены на полшага по пространственной координате для совмещения с линиями интегрирования

## 4. Тестирование алгоритма

Для проверки точности и стабильности предложенного метода произведем численный расчет специальной тестовой задачи и сравним результат с известным точным аналитическим решением. Рассмотрим случай, когда возникающий слой, после создания, имеет стационарные параметры среды, значительно отличающиеся от фоновой среды, в частности, диэлектрическая проницаемость среды в области слоя резко изменяется в момент времени $t = 0$ от $\varepsilon$ до $\varepsilon_1$. Существующее в фоновой среде поле является плоской волной и описывается соотношением $E_0 = \cos\left(2\pi L\left(\tau - \xi\right)/\lambda\right)$, где $\lambda$ – длина волны в фоновой среде. Точное решение для данной задачи известно [5]. Следующие значения параметров использованы для тестирования алгоритма: $\varepsilon = 9$, $\varepsilon_1 = 11$, нормированная частота исходной волны $\eta = 1$.

Сравнение точного решения данной задачи с численными решениями, полученными методами МИУВ и FDTD, представлено на рис.2. Результирующее электрическое поле в слое содержит скачок амплитуд, появившийся вследствие образования слоя. На рис.3 приведены результаты аппроксимации решения методом МИУВ при различных величинах шага дискретизации.

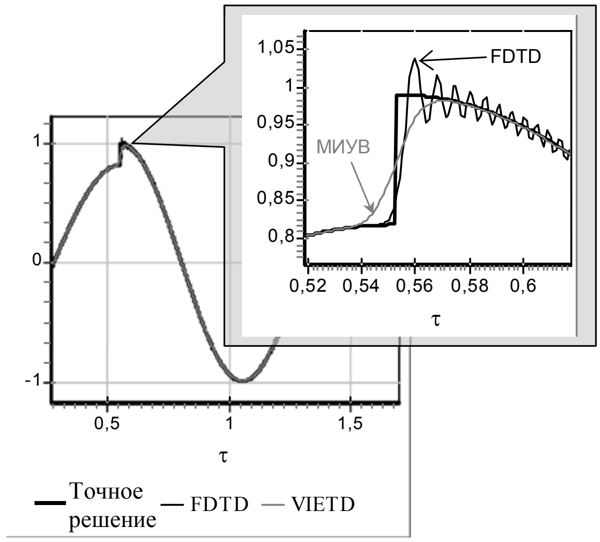


Рис.2. Сравнение численных результатов, рассчитанных методами FDTD и МИУВ, с точным аналитическим решением тестовой задачи. Разрыв поля вызван резким изменением проницаемости среды в нулевой момент времени

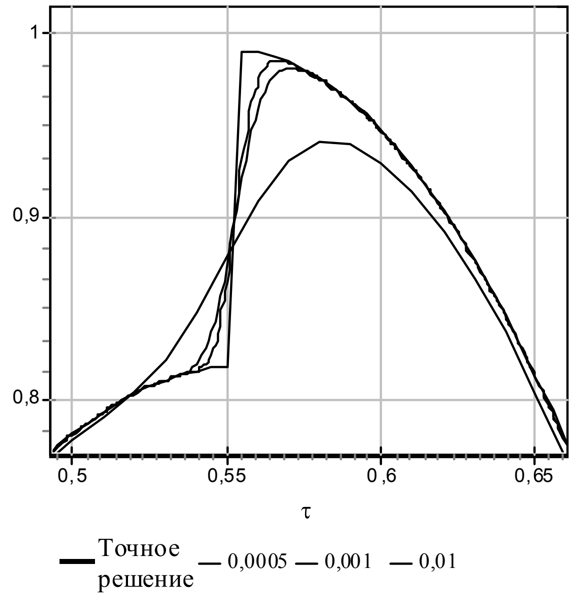


Рис. 3. Сравнение численных результатов метода МИУВ, рассчитанных с разным шагом дискретизации h, с точным решением задачи вблизи точки разрыва. Качество аппроксимации зависит от величины шага h

Как видно из приведенных графиков, МИУВ превосходит по точности метод FDTD, а также обладает более высокой стабильностью. Даже при выборе довольно грубого шага моделирования, как показано на рис. 3, численное решение, полученное методом МИУВ, всё равно сходится к точному решению, но содержит меньше деталей в области скачка поля. Метод же FDTD производит результат, содержащий угасающий нефизический численный шум (см. рис. 2), возникающий вследствие численного дифференцирования поля в резко меняющейся функции среды.

## 5. Распространение плоской электромагнитной волны в слое с модулируемой во времени диэлектрической проницаемостью

Рассмотрим преобразование плоской электромагнитной волны с нормированной амплитудой в диэлектрическом слое, диэлектрическая проницаемость которого меняется во времени под воздействием сторонних сил по гармоническому закону: $\varepsilon_1 / \varepsilon = 11/9 + m\sin(2\pi\Theta\tau)$, где $\Theta = L/\Lambda$ – нормированная частота модуляции, $\Lambda$ – длина волны управляющего поля и m–глубина модуляции. Изменение спектра сигнала после прохождения слоя представлено на рис. 4 и 5.

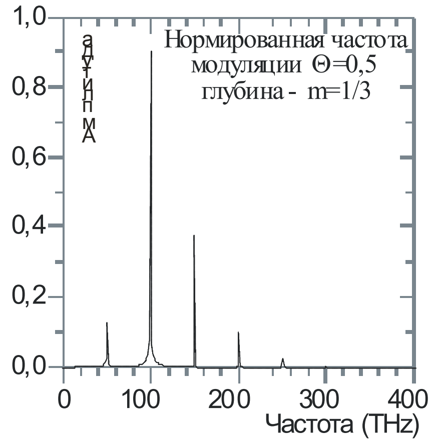



Рис. 4. Изменение спектра сигнала после взаимодействия со слоем с гармонически изменяющимися во времени параметрами: Q=0,5

Дополнительные кратные гармоники появляются в сигнале и растут с увеличением глубины модуляции. Частота дополнительных гармоник зависит от частоты модуляции среды.

Длительность интервала моделирования $\tau_{max}$ процесса равна 100,0 (в безразмерных величинах, что соответствует 1 ps), шаг интегрирования $h = 0.01$. Для NX=100 и NT=10 000 минимально необходимый объём оперативной памяти равен 6 Кб, и общий объём памяти для хранения результатов – 8 Мб. Время моделирования равно ~ 2,8 с на ПК с процессором Intel Celeron с тактовой частотой 700 МГц.

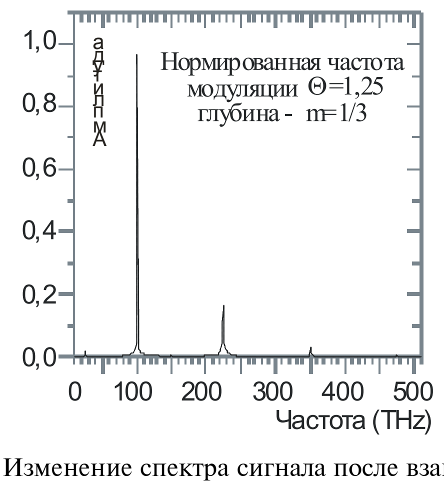
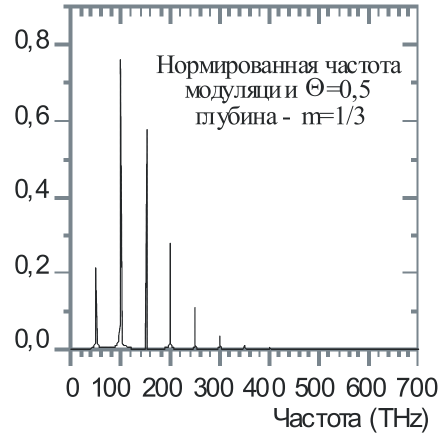
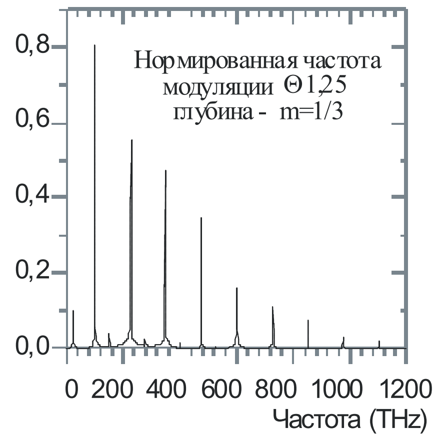



Рис. 5. Изменение спектра сигнала после взаимодействия со слоем с гармонически изменяющимися во времени параметрами: Q=1,25

Рассмотрим подобную задачу, но со средой, проницаемость которой гармонически меняется в пространстве и во времени в соответствии с $\varepsilon_1 / \varepsilon = 11/9 + m\sin(2\pi\Theta(\tau - \xi))$. Результаты влияния среды в данном случае представлены на рис.6 (а, б):




а




б

Рис. 7. Изменение спектра сигнала после взаимодействия со слоем с гармонически модулируемыми во времени и в пространстве параметрами

В сравнении с представленным ранее случаем для модулируемой только во времени среды в данном случае количество дополнительных гармоник и их амплитуды значительно выше. Это может быть объяснено дополнительной фазовой модуляцией поля в каждой точке слоя.

## 6. Заключение

Представлен численно-аналитический подход для моделирования взаимодействия электромагнитного сигнала произвольной формы с плоским диэлектрическим слоем, параметры которого меняются во времени и/или в пространстве. Разработано программное обеспечение для автоматизации проведения численных экспериментов рассматриваемым методом интегральных уравнений Вольтерра и методом FDTD. Выполнено тестирование и сравнение предложенного метода с распространенным в настоящее время методом FDTD на примере тестовой задачи, точное аналитическое решение для которой известно. Приведены результаты численного моделирования для случая с гармонически моделируемой во времени средой, а также со средой, моделируемой во времени и пространстве.

**Литература**: 1 *Hagness S.C., Joseph R.M. and Taflove A.*, Subpicosecond electrodynamics of distributed Bragg reflector microlasera: Results from finite difference time domain simulations, Radio Science. 1996. Vol. 31, No 4, P. 931-941. 2 *F.R.Morgenthaler,* Velocity Modulation of Electromagnetic Waves // IRE Trans. on Microwave Theory and Techniques. 1958. MTT-6. P. 167-172. 3 *Нерух А.Г., Хижняк Н.А.* Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики. Тест-Радио: Харьков, 1991. 4 *Taflove A.*: Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method, Boston, Artech House, 1995. 5 *Nerukh A.G., Scherbatko I.V., Marciniak M.*, Electromagnetics of Modulated Media with Applications to Photonics, Nat. Institute of Telecommunic. Publishing House, Warsaw, 2001. 6 *Fedotov F.V., Nerukh A.G., Benson T.M., Sewell Ph.* Solution of non-stationary electrodynamics boundary value problem by FDTD and Volterra Integral Equation methods. Proc. Of 4th International Conference on Transparent Optical Networks. April 24-25, 2002, Warsaw, Poland. Vol. 1. P. 180-183.

Поступила в редколлегию 24.02.2003

**Рецензент**: д-р физ.-мат. наук, проф. Сухоиванов И.А.

**Федотов Фёдор Владимирович**, аспирант кафедры высшей математики ХНУРЭ. Научные интересы: разработка численных алгоритмов и специализированных программ для моделирования задач нестационарной электродинамики. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. +38 0572 409372. E-mail: ffedor@ukr.net

**Нерух Александр Георгиевич**, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическая физика, нестационарная электродинамика сред с меняющимися во времени свойствами и движущимися границами, новые аналитические и численные методы решения электродинамических задач. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. +38 0572 409372. E-mail: Nerukh@ddan.kharkov.ua

---

УДК 621.372

# О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ ФОРМИРОВАНИЯ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ В ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРАХ СТОЯЧИХ ВОЛН

*БОНДАРЕНКО И.Н.*

На основании представления процесса формирования амплитудно-частотных характеристик объемных резонаторов стоячих волн как суперпозиции большого числа колебаний возбуждающей электромагнитной волны предлагается воздействовать на него с помощью профилирования рабочих поверхностей резонатора.

Основными факторами, определяющими частотную избирательность различных устройств, являются амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) их элементов. Предполагается, что АЧХ одиночного колебательного контура полностью определяется его добротностью, а АЧХ связанных контуров – добротностями, частотами настройки и коэффициентами связи между контурами и внешними цепями.

Для формирования АЧХ заданной формы необходимо, как правило, использование нескольких связанных контуров, что ведет к усложнению конструкции устройства в целом, необходимости введения дополнительных регулировок и настроек, а также к снижению добротности резонансных элементов и, соответственно, к уменьшению крутизны скатов АЧХ.

В этой связи представляется актуальной разработка методов формирования АЧХ заданной формы путем воздействия на резонансную кривую одиночного колебательного контура.

**Целью** работы является обоснование метода воздействия на АЧХ одиночного объемного колебательного контура с помощью профилирования его рабочих поверхностей.

Сущность предлагаемого метода заключается в том, что процесс формирования АЧХ в объемном резонаторе рассматривается как суперпозиция большого числа колебаний возбуждающей электромагнитной волны, условия сложения которых существенно (в пределах полосы частот, занимаемой АЧХ) зависят от характеристик отражающих поверхностей.

Известно, что собственную добротность объемного резонатора с воздушным или вакуумным заполнением и стенками из хорошо проводящего материала можно найти с помощью следующего соотношения [1,2]:

$$Q_0 = \frac{\sqrt{\omega_p}\,\mu_0 \int\limits_V |\dot{H}|^2\,dv}{\sqrt{\dfrac{\mu_0}{2\sigma}} \oint\limits_S |\dot{H}_\tau|^2\,ds} = \frac{\omega_p\mu_0}{R_п}\,\frac{\int\limits_V |\dot{H}|^2\,dv}{\oint\limits_S |\dot{H}_\tau|^2\,ds} = \frac{G}{R_п}\,, \quad (1)$$

где $\omega_p$ – резонансная частота; $\mu_0$ – магнитная проницаемость вакуума; $\sigma$ – проводимость материала стенок резонатора; $R_п = \sqrt{\omega_p\mu_0/2\sigma}$ – поверхностное сопротивление материала стенок резонатора; $G = \omega_p\mu_0 \int\limits_V |\dot{H}|^2\,dv \big/ \oint\limits_S |\dot{H}_\tau|^2\,ds$ – геометрический фактор, зависящий от геометрии и размеров резонатора, а также от структуры электромагнитных полей (вида колебаний).

Анализируя (1) при $\omega = \omega_p \pm \Delta\omega$, $0 < \Delta\omega < \Delta\omega_p$ и $\Delta\omega << \omega_p$ ($\Delta\omega_p$ – полуширина полосы пропускания резонатора), можно прийти к выводу, что значения добротности объемного резонатора на частотах, лежащих в полосе пропускания, не отличаются от его добротности на резонансной частоте.