

УДК 519.688



В.В. Лаврик

Бердянский государственный педагогический университет, Бердянск, Украина

ПРИМЕНЕНИЕ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ЭЛАСТОМЕРОВ

В данной статье представлен вывод формулы потенциальной энергии системы для кубического конечного элемента на основании моментной схемы КЭ (МСКЭ). Произведён расчёт напряжённо-деформированного состояния виброизолятора ВР-201. По результатам расчёта сделан сравнительный анализ исходящих данных в различных системах автоматизированного проектирования (САПР).

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, МОМЕНТНАЯ СХЕМА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, САПР

Введение

Постановка проблемы. Анализ публикаций по теме исследования. На практике, используя традиционные схемы методов конечных элементов (МКЭ) построенных на основе вариационного метода Лагранжа для решения задач с особенностями (учёт слабой сжимаемости материалов), возникают определённые трудности, для преодоления которых используют вариационные методы разного вида. Это методы Ху-Вашицу (смешанный метод), Кастильяно (метод сил) и др. [1, 2]. Однако «метод сил» не нашёл широкого применения в расчётах конструкций в силу сложности аппроксимации напряжённо-деформированного состояния объекта.

«Смешанные методы», в отличие от «метода сил», повсеместно используются при создании машино-строительных конструкций. В частности, для исследования напряжённого состояния эластомеров используют вариационные принципы Л.П. Германа, С. Кея, Й. Нагтегала [3, 4].

Помимо положительных моментов, смешанные модели МКЭ обладают рядом недостатков: большой порядок разрешающей системы уравнений по сравнению с МКЭ в форме метода перемещений. Поэтому для задач с указанной особенностью предпочтительнее МКЭ в форме метода перемещений на базе вариационного принципа Лагранжа [5–7].

Формулирование целей статьи. В последние годы встаёт вопрос о разработке инструментальных систем автоматизированного проектирования (САПР), в которых использовались бы приведённые выше вариационные принципы. Современные расчётно-вычислительные комплексы, предназначенные для изучения свойств материалов, находящиеся в напряжённо-деформированном состоянии, содержат целый ряд методов приближённых вычислений: решение больших систем алгебраических и трансцендентных уравнений, численное интегрирование и дифференцирование и т.д., а так же большое количество вспомогательных нестандартных расчётов [8, 9]. В данной статье будет рассмотрен вывод формулы потенциальной энергии системы для кубического конечного элемента на основании моментной схемы КЭ, с последующим

её использованием для расчёта в системе FORTU-FEM [10].

1. Основная часть

Выведем формулу потенциальной энергии для кубического конечного элемента с единичными рёбрами. Рассмотрим линейную аппроксимацию перемещения.

Энергии упругой деформации такого КЭ можно найти из формулы:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mu \iiint_V \left(\epsilon_{11}^2 + \epsilon_{22}^2 + \epsilon_{33}^2 + \frac{\epsilon_{12}^2}{2} + \frac{\epsilon_{13}^2}{2} + \frac{\epsilon_{23}^2}{2} \right) dV + \frac{1}{4} \lambda \iiint_V (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33})^2 dV, \quad (1)$$

при этом её вариация, исходя из принципа Лагранжа, равна нулю $\delta\Pi = 0$. В формуле (1) σ_{ij} — напряжения, ϵ_{ij} — деформации, возникающие при внешних нагрузках на тело. Между собой они связаны соотношениями закона Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (2\mu + \lambda)\epsilon_{11} + \lambda\epsilon_{22} + \lambda\epsilon_{33}, \\ \sigma_{22} &= \lambda\epsilon_{11} + (2\mu + \lambda)\epsilon_{22} + \lambda\epsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= \lambda\epsilon_{11} + \lambda\epsilon_{22} + (2\mu + \lambda)\epsilon_{33}, \\ \sigma_{12} &= \mu\epsilon_{12}, \sigma_{13} = \mu\epsilon_{13}, \sigma_{23} = \mu\epsilon_{23}, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь μ, λ — параметры Ляме, которые находятся по формулам:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (3)$$

где E — модуль Юнга и ν — коэффициент Пуассона являются физическими постоянными.

Элементарный объём можно найти из соотношения:

$$dV = \sqrt{g} dx dy dz. \quad (4)$$

Основной принцип моментной схемы лежит в разложении аппроксимирующей функции в ряд Тейлора с последующим отбрасыванием n -ых членов ряда. Для пространственного шестигранного конечного элемента эта функция, представленная в виде ряда, будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{k'} &= w_{k'}^{000} + w_{k'}^{100} \psi^{100} + w_{k'}^{010} \psi^{010} + \\ &+ w_{k'}^{001} \psi^{001} + w_{k'}^{110} \psi^{110} + w_{k'}^{101} \psi^{101} + \\ &+ w_{k'}^{011} \psi^{011} + w_{k'}^{111} \psi^{111}, \end{aligned} \quad (5)$$

где w_k^{pqr} – коэффициенты разложения, ψ^{pqr} – набор степенных координатных функций, определяемых по формуле:

$$\psi^{pqr} = \frac{x^p}{p!} \frac{y^q}{q!} \frac{z^r}{r!} \quad (p=0, 1; q=0, 1; r=0, 1). \quad (6)$$

Деформации ε внутри КЭ определяются через перемещения внутренних точек по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \varepsilon_{13} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (7)$$

Компоненты тензора деформации разложим в ряд Макларена в окрестности начала координат:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{stg} e^{(stg)} \psi^{(stg)}. \quad (8)$$

В разложении компонент деформаций наряду с коэффициентами разложения деформаций присутствуют коэффициенты разложения жёстких поворотов. Это обстоятельство обуславливает причину замедленной сходимости МКЭ. Что бы её устранить отбросим эти члены ряда.

Для кубического КЭ, который имеет единичные метрики измерения, представленного в естественной системе координат, можно определить коэффициенты $b_{\mu\nu\eta}^{k'}$. Так, $b_{100}^{k'} = b_{010}^{k'} = b_{001}^{k'} = \frac{1}{2}$, а

$$b_{110}^{k'} = b_{101}^{k'} = b_{011}^{k'} = b_{111}^{k'} = 0. \quad (9)$$

После подстановки и соответствующих преобразований получим формулу для нахождения потенциальной энергии системы, выраженную только через узловые сдвиги и переменные x, y, z :

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{8} \mu \iiint_V (a + a_x + a_y + a_z + a_{xy} + a_{xz} + a_{yz} + a_{x^2y} + \\ &+ a_{x^2z} + a_{y^2x} + a_{y^2z} + a_{z^2x} + a_{z^2y} + a_{x^2y^2} + a_{x^2z^2} + a_{y^2z^2}) dV + \\ &+ \frac{1}{4} \lambda \iiint_V (b + b_x + b_y + b_z + b_{xy} + b_{xz} + b_{yz})^2 dV, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a &= 4(w_{k'}^{100})^2 + 4(w_{k'}^{010})^2 + 4(w_{k'}^{001})^2 + 2w_{k'}^{100} w_{k'}^{010} + \\ &+ 2w_{k'}^{100} w_{k'}^{001} + 2w_{k'}^{010} w_{k'}^{001}, \\ a_x &= (6w_{k'}^{001} w_{k'}^{101} + 2w_{k'}^{001} w_{k'}^{110} + 2w_{k'}^{010} w_{k'}^{101} + \\ &+ 6w_{k'}^{010} w_{k'}^{110}) x; \\ a_y &= (6w_{k'}^{001} w_{k'}^{011} + 2w_{k'}^{001} w_{k'}^{110} + 2w_{k'}^{100} w_{k'}^{011} + \\ &+ 6w_{k'}^{100} w_{k'}^{110}) y; \\ a_z &= (6w_{k'}^{010} w_{k'}^{011} + 2w_{k'}^{010} w_{k'}^{101} + 2w_{k'}^{100} w_{k'}^{011} + \\ &+ 6w_{k'}^{100} w_{k'}^{101}) z; \\ a_{xy} &= (4w_{k'}^{001} w_{k'}^{111} + 4w_{k'}^{011} w_{k'}^{101}) xy; \\ a_{xz} &= (4w_{k'}^{010} w_{k'}^{111} + 4w_{k'}^{011} w_{k'}^{110}) xz; \\ a_{yz} &= (4w_{k'}^{100} w_{k'}^{111} + 4w_{k'}^{101} w_{k'}^{110}) yz; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{x^2} &= (2w_{k'}^{101} w_{k'}^{110} + 3(w_{k'}^{110})^2 + 3(w_{k'}^{101})^2) x^2; \\ a_{y^2} &= (2w_{k'}^{011} w_{k'}^{110} + 3(w_{k'}^{011})^2 + 3(w_{k'}^{110})^2) y^2; \\ a_{z^2} &= (2w_{k'}^{011} w_{k'}^{101} + 3(w_{k'}^{011})^2 + 3(w_{k'}^{101})^2) z^2; \\ a_{x^2y} &= 4w_{k'}^{101} w_{k'}^{111} x^2 y, \quad a_{x^2z} = 4w_{k'}^{110} w_{k'}^{111} x^2 z; \\ a_{y^2x} &= 4w_{k'}^{011} w_{k'}^{111} y^2 x, \quad a_{y^2z} = 4w_{k'}^{110} w_{k'}^{111} y^2 z; \\ a_{z^2x} &= 4w_{k'}^{011} w_{k'}^{111} z^2 x, \quad a_{z^2y} = 4w_{k'}^{101} w_{k'}^{111} z^2 y; \\ a_{x^2y^2} &= (2w_{k'}^{111})^2 x^2 y^2, \quad a_{x^2z^2} = (2w_{k'}^{111})^2 x^2 z^2; \\ a_{y^2z^2} &= (2w_{k'}^{111})^2 y^2 z^2; \quad b = w_{k'}^{100} + w_{k'}^{010} + w_{k'}^{001}; \\ b_x &= (w_{k'}^{100} + w_{k'}^{101}) x, \quad b_y = (w_{k'}^{110} + w_{k'}^{011}) y; \\ b_z &= (w_{k'}^{101} + w_{k'}^{011}) z, \quad b_{xy} = w_{k'}^{111} xy, \quad b_{xz} = w_{k'}^{111} xz; \\ b_{yz} &= w_{k'}^{111} yz. \end{aligned}$$

2. Исследование осадки резинового виброизолятора ВР-201

Рассмотрим объект сложной формы, такой как виброизолятор ВР-201.

Виброизоляторы ВР служат для работы в качестве основных упругих и виброизоляционных элементов, связывающих между собой колеблющиеся и неподвижные части машин, а также для снижения влияния вибрационного воздействия от вентиляторов на различные конструкционные элементы.

Материал, который используется для их производства, резиновая смесь 51-1562 ТУ 105 1325-79.

Расчёт объекта будет производиться с жёстко закреплённым основанием и распределённой нагрузкой на его верхнюю часть.

Согласно техническим характеристикам, приведённым в [11], рабочая нагрузка на виброизолятор составляет $P_{\text{раб}} = 250 \text{ Н}$, предельная – $P_{\text{пред}} = 400 \text{ Н}$. При этом осадка при рабочей нагрузке равна $w_{\text{раб}} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, а при предельной – $w_{\text{пред}} = 12 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

В работе [12] приведены результаты испытания резины марки 51-1562 на протяжении $t = 31350$ часов. При $t = 0$ коэффициент Пуассона материала был равен $\nu = 0,499$. Но в процессе эксплуатации происходит износ материала и в конце срока коэффициент равен $\nu = 0,467$.

Размеры исследуемой конструкции представлены на рис. 1, а и 1, б.

Данная задача решалась при $E = 2.1 \text{ МПа}$.

С помощью препроцессора системы FORTU-FEM была построена регулярная конечно-элементная модель виброизолятора, состоящая из 12575 узлов и 6830 в форме параллелепипеда (рис. 2). Так как изучаемый объект является телом вращения, то для простоты и удобства расчёта будем рассматривать его четвёртую часть.

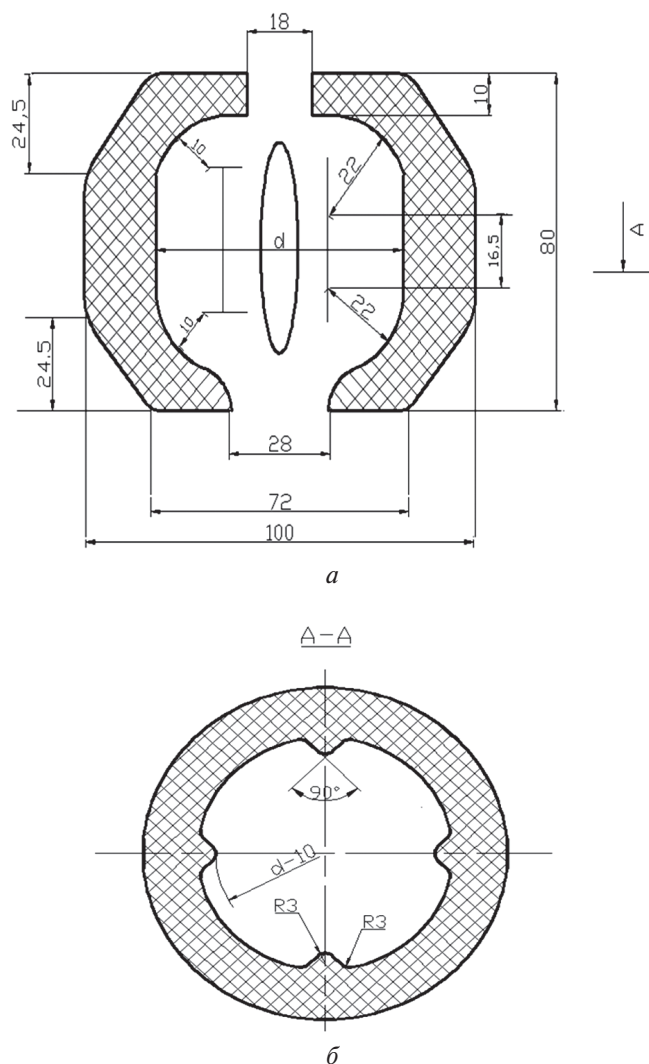


Рис. 1. Схема виброизолятора ВР–201

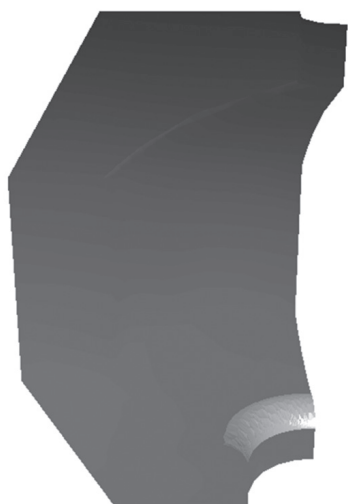


Рис. 2. Модель виброизолятора ВР–201

Экспериментально доказано, что при $\nu = 0,49$ прогиб виброизолятора ВР-201 соответствует характеристикам, которые заявлены в технической документации.

На рис. 3 показаны графики зависимости разных видов прогибов от коэффициента Пуассона.

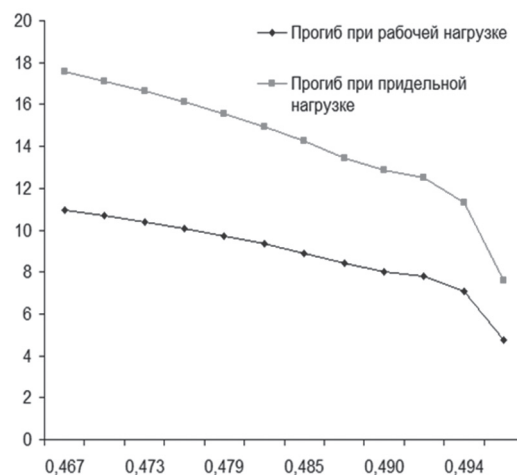


Рис. 3. Графики зависимостей разных видов осадок от коэффициента Пуассона

Из представленных графиков можно заключить, что за время эксплуатации виброизолятора ВР-201, из-за износа материала осадка увеличивается более чем в два раза.

Для проверки эффективности работы рассматриваемой расчётной схемы сопоставили численные результаты расчётов нормальных напряжений в системе FORTU-FEM и MIRELA+ [12] при различных вертикальных нагрузках (рис. 4).

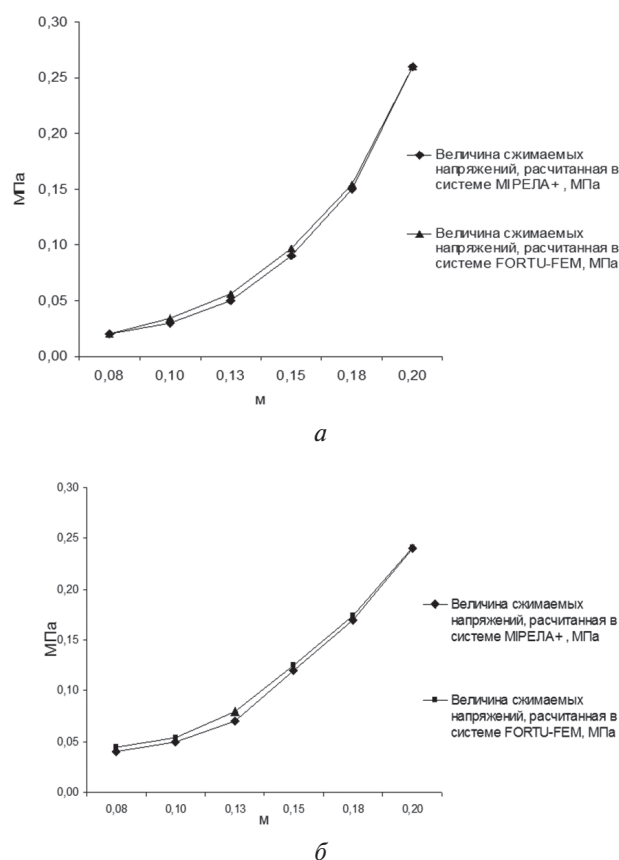


Рис. 4. Графики сравнения распределения нормальных напряжений в виброизоляторе ВР-201: а – при нагрузке 1,3 МПа, б – при нагрузке 0,79 МПа

Была выявлена хорошая согласованность данных.

Выводы

Классические методы конечных элементов требуют, чтобы поле перемещения точек внутри КЭ аппроксимировалось полиномиальными функциями [2–4]. Такие варианты МКЭ обладает медленной сходимостью в силу того, что эти функции, аппроксимирующие поля перемещений, включают слагаемые, описывающие жёсткие смещения КЭ и не учитывают «эффекты ложного сдвига».

Эти недостатки можно устранить, используя МСКЭ.

Для решения проблемы была проанализирована и охарактеризована МСКЭ для пространственного КЭ. Это позволило внедрить разработанную модель в универсальную автоматизированную систему FORTU-FEM.

Точность используемой схемы проверенно на конкретном примере.

Список литературы: 1. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров / В. В. Киричевский. — К.: Наукова думка, 2002. — 655 с. 2. Лаврик В. В. Инструментальная система FORTU-FEM: структура организации и перспективы дальнейшего развития / В. В. Лаврик // Весник Херсонского национального технического университета. Вып. 3(39). — Херсон: ХНТУ. — 2010. — С. 244–251. 3. Трелоар Л. Физика упругости каучука / Л. Трелоар. — М.: Иностран. литер., 1953. — 240 с. 4. Bazhenov V. A., Sakharov A. S., Tsykhanovskii V. K., The Moment Finite-Element Scheme in Problems of Nonlinear Continuum Mechanics // International Applied Mechanics, Vol. 38, Issue 6, June 2002, P. 658–692. 5. Lavrik V. et al. Development of the CAD system for designing non-standard constructions from elastomers / V. Lavrik et al // International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology. — Vol. 3, Issue 3, March 2014. — P. 10717–10726. 6. Michael N., A Unified analysis of three finite element methods for the Monge-Ampère equation // Electronic Transactions on Numerical Analysis, Vol. 41, 2014, P. 262–288. 7. Miedzi-alski C., Kretowska J., Finite Element Analysis for the Modeling of Building Structures in Three Dimensional Schemes // American Journal of Civil Engineering and Architecture, Vol. 2, Issue 4, 2014, P. 143–148. 8. Барабаш М. С., Артамонова А. Е. Методы организации обмена информацией между участниками процесса проектирования на основе ПК САПФИР / М. С. Барабаш, А. Е. Артамонова // Сборник научных трудов «Перспективы развития программных комплексов для расчёта несущих зданий и сооружений». Курск: ЮЗГУ. — 2013. — С. 83–90. 9. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. — К.: Наукова думка, 1972. — С. 79–83. 10. Гоменюк С. И. Объектно-ориентированные модели и методы анализа механических процессов / С. И. Гоменюк. — Николаполь: Николапольская коммунальная типография, 2004. — 316 с. 11. Сенченков И. К. Метод амплитудно-дифференциальной аппроксимации для расчёта динамических задач вязкоупругости / И. К. Сенченков // Прикладная механика. — 1982. — № 9. — С. 57–62. 12. Киричевский В. В. Чисельне моделювання напружено-деформованого стану еластомерних елементів сит грохотів у САПР «Мірела+» / В. В. Киричевський, С. М. Гребенюк, С. І. Гоменюк, Р. В. Киричевський // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. — 2005. — № 2. — С. 53–57. — Бібліогр.: 4 назв. — укр.

Поступила в редколлегию 18.03.2015

УДК 519.688

Застосування моментної схеми скінчених елементів для розв'язання задач механіки еластомерів / В. В. Лаврик // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. — 2015. — № 1 (84). — С. 96–99.

У статті були представлені формули моментної схеми скінчених елементів які реалізовані у системі автоматизованого проектування FORTU-FEM. За допомогою даної схеми було досліджено напружено-деформований стан віброізолятора ВР-201. Були одержані дані, які добре узгоджувалися з раніше розрахованими результатами.

Іл. 4. Бібліогр. 12 найм.

UDC 519.688

Application moment scheme finite elements solutions for problems of mechanics elastomer / V. V. Lavrik // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. — 2015. — №1 (84). — P. 96–99.

The article presents formulas moment finite element schemes are implemented in computer-aided design FORTU-FEM. With this scheme was investigated of stressed deformed state vibroinsulator BP-201. There were findings that are well consistent with the previously calculated results.

Fig. 4. Ref.: 12 items.