

Л. А. ТИТАРЕНКО, канд. техн. наук, Б. Ю. БОРДЮГОВ

СРАВНЕНИЕ СТЕПЕНЕЙ ПРИБЛИЖЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Случайный процесс $x(t)$, определенный во временной области $(0, T)$, может быть представлен линейной комбинацией базисных функций:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \varphi_i(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

где базисные функции $\varphi_i(t)$ являются детерминированными функциями времени, а коэффициенты $y_i(t)$ – случайными величинами. Чтобы образовать полную систему функций, требуется бесконечное число базисных функций $\varphi_i(t)$. Условие ортонормированности базисных функций $\varphi_i(t)$ имеет вид

$$\int_0^T \varphi_i(\tau) \varphi_j^*(\tau) d\tau = \delta_{ij}, \quad (2)$$

где $\varphi_i(t)$ и $\varphi_i^*(t)$ – комплексно-сопряженные функции.

Пусть математическое ожидание $m(t) = E\{x(t)\} = 0$, $0 \leq t \leq T$, и, если базисные функции $\varphi_i(t)$ являются собственными функциями корреляционной функции $R(t, \tau)$, то они должны удовлетворять следующему интегральному уравнению:

$$\int_0^T R(t, \tau) \varphi_i(\tau) d\tau = \lambda_i \varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где λ_i – собственные значения корреляционной функции $R(t, \tau)$.

Для простоты возьмем n значений рассматриваемых функций в дискретные моменты времени и представим их в виде векторов следующим образом:

$$X = [x(t_1) \quad x(t_2) \quad \dots \quad x(t_n)]^T, \quad (4)$$

$$\Phi_i = [\varphi_i(t_1) \quad \varphi_i(t_2) \quad \dots \quad \varphi_i(t_n)]^T, \quad (5)$$

где T – знак транспонирования, а каждое выборочное значение $x(t_i)$ случайного процесса $x(t)$ является случайной величиной. В таком случае выражения (2) и (3) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^n \varphi_i(t_k) \varphi_j^*(t_k) = \Phi_i^T \Phi_j = \delta_{ij} \quad (6)$$

и

$$\sum_{k=1}^n R(t_l, t_k) \varphi_i(t_k) = \lambda_i \varphi_i(t_l), \quad i, l = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Для определения собственных значений и собственных векторов уравнение (7) можно переписать в матричной форме:

$$S\Phi_i = \lambda_i \Phi_i, \quad i, l = \overline{1, n}, \quad (8)$$

где

$$S = \begin{bmatrix} R(t_1, t_1) & \dots & R(t_1, t_n) \\ \vdots & & \vdots \\ R(t_n, t_1) & & R(t_n, t_n) \end{bmatrix} \quad (9)$$

Так как матрица S имеет размерность $n \times n$, получим не бесконечное число, а только n собственных значений и собственных векторов. Для ортонормированных базисных функций $\varphi_i(t)$ получим среднеквадратичную ошибку:

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2} &= E \left[\int_0^T \left\{ x(t) - \sum_{i=1}^m y_i \varphi_i(t) \right\} \left\{ x(t) - \sum_{i=1}^m y_i \varphi_i(t) \right\}^* dt \right] = E \left[\int_0^T \left\{ \sum_{i=m+1}^{\infty} y_i \varphi_i(t) \right\} \left\{ \sum_{i=m+1}^{\infty} y_i \varphi_i(t) \right\}^* dt \right] = \\ &= \sum_{i=m+1}^{\infty} E \{ y_i y_i^* \}. \end{aligned} \quad (10)$$

Если $\varphi_i(t)$ – собственные функции корреляционной матрицы $R(t, \tau)$, то

$$E \{ y_i y_i^* \} = \int_0^T \lambda_i \varphi_i(t) \varphi_i^*(t) dt = \lambda_i. \quad (11)$$

Следовательно,

$$\overline{\varepsilon^2} = \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i, \quad (12)$$

совпадает с аналогичным результатом для дискретного варианта разложения Карунена-Лоева.

Трудность использования разложения Карунена-Лоева для непрерывного случая состоит в том, что для получения собственных значений и собственных векторов необходимо решить интегральное уравнение (3). За исключением очень частных случаев, решение этого интегрального уравнения не удастся получить в явном виде [1].

Решим аналогичную задачу для случая одного распределения, что чаще встречается в системах связи. Пусть X – n -мерный случайный вектор. Тогда X можно точно представить разложением

$$X = \sum_{i=1}^n y_i \Phi_i = \Phi Y, \quad (13)$$

где

$$\Phi = [\Phi_1 \quad \dots \quad \Phi_n], \quad (14)$$

а

$$Y = [y_1 \quad \dots \quad y_n]^T. \quad (15)$$

Матрица Φ является детерминированной и состоит из n линейно независимых векторов-столбцов. Следовательно, линейная комбинация столбцов матрицы Φ образует n -мерное пространство, содержащее X . Столбцы матрицы – базисные векторы и, если эти столбцы ортонормированные, то компоненты вектора Y определяются следующим образом:

$$y_i = \Phi_i^T X, \quad i = \overline{1, n}. \quad (16)$$

Следовательно, Y представляет собой ортогональное преобразование случайного вектора X и тоже является случайным вектором.

Ошибка приближения можно найти аналогично (10), которая будет соответствовать (12), где λ_i – собственные значения оптимальных базисных векторов – собственных векторов ковариационной матрицы случайного вектора X .

Аналогичным образом, случайный процесс, а точнее, его распределение, можно представить посредством вейвлет. Идея вейвлет-преобразования состоит в общепринятом представлении случайного процесса $x(t)$ в виде взвешенной суммы (1) простых составляющих – базисных функций $\varphi_i(t)$, помноженных на коэффициенты $y_i(t)$. Поскольку базисные функции предполагаются заданными как функции вполне определенного вида, то коэффициенты $y_i(t)$ содержат информацию о конкретном процессе [2]. Таким образом, можно говорить о возможности представления произвольных процессов на основе рядов (1) с различными базисными функциями – вейвлетами. Поскольку вейвлеты существуют различные, то и спектр их применения достаточно широк. Выбор конкретного вейвлета зависит от анализируемого сигнала и от решаемой проблемы [3].

Для изучения степени приближения реализации случайного сигнала посредством разложения Карунена-Лоева и вейвлет-преобразования использовалась среднеквадратическая ошибка исходного и полученного сигналов. При моделировании вейвлет-преобразования были построены банки фильтров ортогонального вейвлет-преобразования, проведен расчет шести элементарных ВЧ и НЧ фильтров. На рис. 1 приведены частотные характеристики фильтров ВЧ $H(\omega)$ и НЧ $G(\omega)$ каналов.

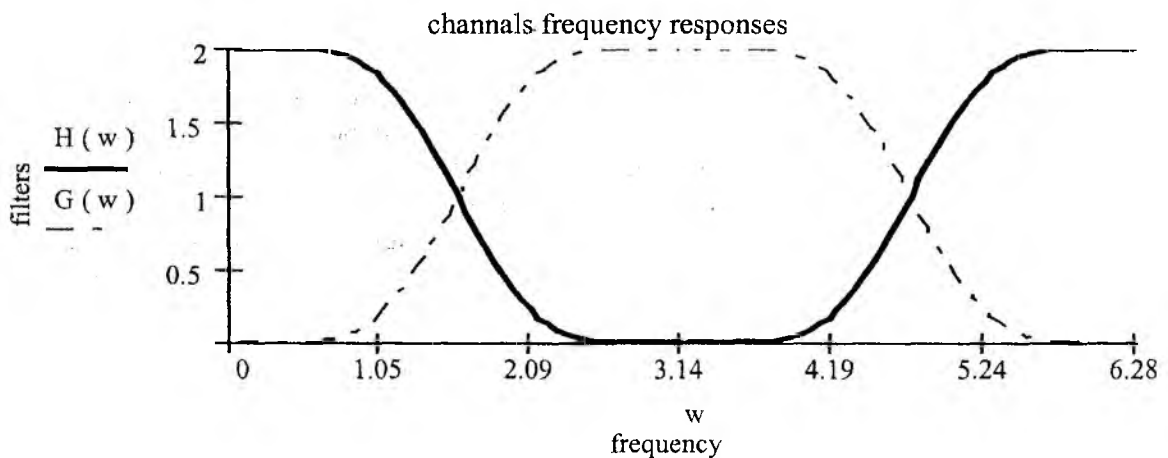


Рис. 1

Сигнал проходит через семь блоков анализа и семь блоков синтеза. В эксперименте сигнал был восстановлен по наибольшим коэффициентам, полагая остальные равными нулю. Базисные функции вейвлет-преобразования представлены на рис. 2.

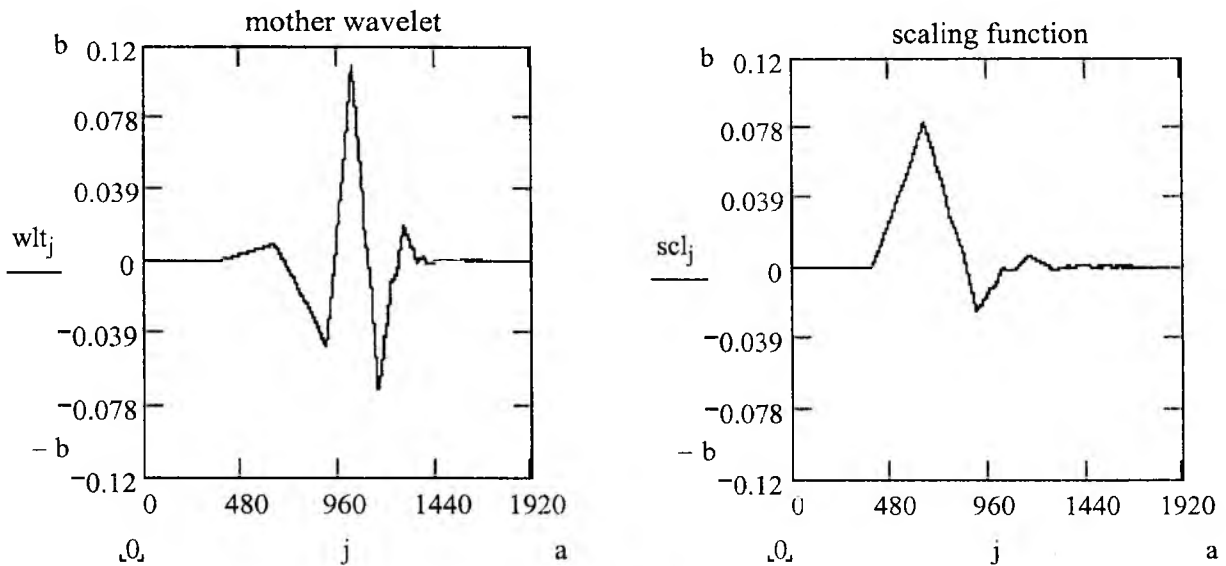


Рис. 2

Для дискретного вейвлет-преобразования использовался вейвлет Добеши 1-го порядка. При проведении исследований использовался гармонический сигнал, представленный на рис. 3.

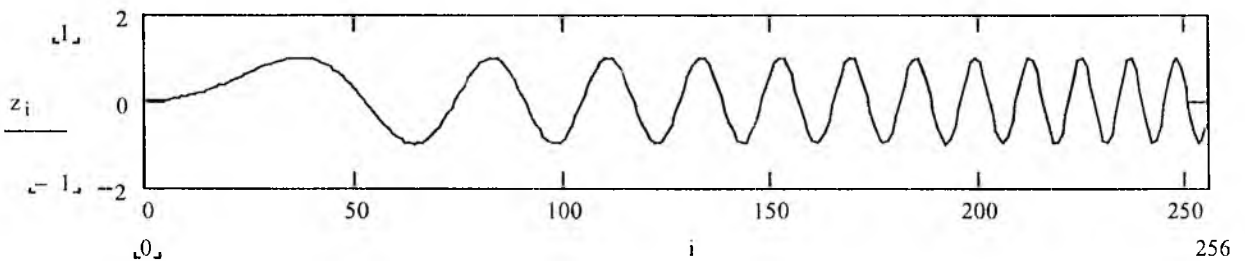


Рис. 3

Результаты исследования величины ошибки в зависимости от размера выборки представлены на рис. 4. Кривые на графике обозначены следующим образом: штриховая линия – для разложения Карунена-Лоева, сплошная – для вейвлет-преобразования и, для полноты сравнения, пунктирная линия – для разложения Фурье. Из графиков можно сделать вывод, что характер кривых одинаков для всех распределений. Разложение Карунена-Лоева, как и следовало ожидать, имеет минимальное значение ошибки. Но такие особенности разложения Карунена-Лоева, как: однозначная зависимость собственных векторов и чисел от длины выборки, потребность значительных машинных ресурсов для получения собственных структур и, как следствие, трудности в использовании в реальном масштабе времени, снижают возможности использования данного разложения на практике, в том числе и в современных телекоммуникационных системах. В то же время, использование вейвлет-базиса позволяет приблизиться к оптимальному разложению посредством меньшего объема выборки, по сравнению с разложением Фурье, что позволяет снизить машинные ресурсы и, как следствие, время обработки. Данное наблюдение позволяет в дальнейшем совершенствовать методы вейвлет-анализа в направлении выбора базисных вейвлет-функций на основе приближения их к базису Карунена-Лоева.

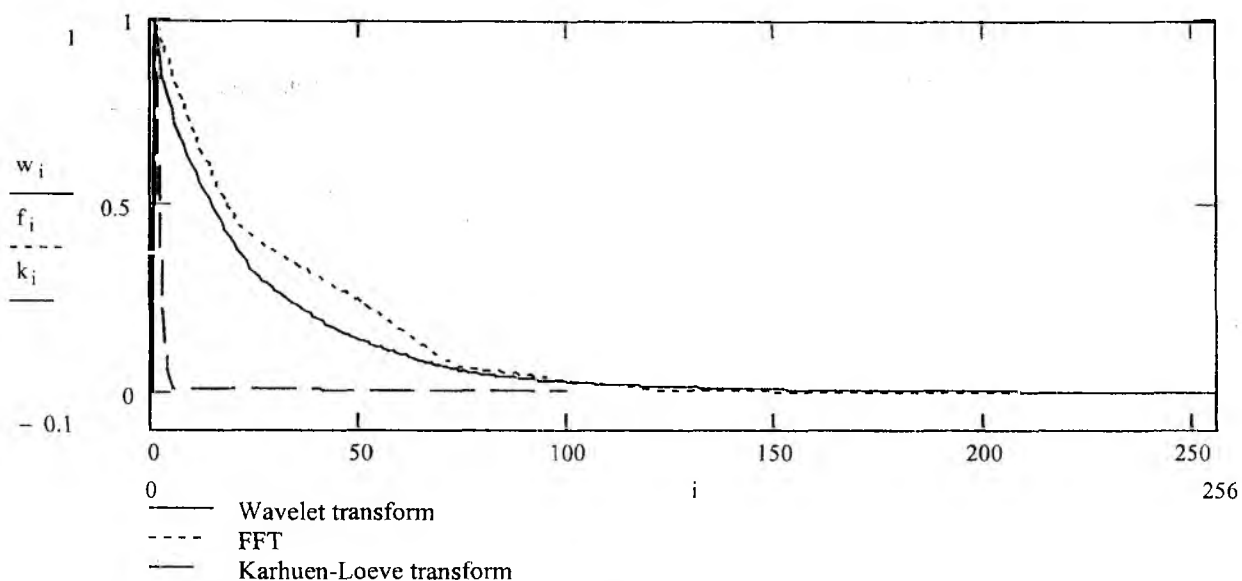


Рис. 4

Список литературы: Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов / Пер. с англ. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1979. 368 с. 2. Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук. 2001. Т. 171. № 5. С. 465 - 501. 3. Титаренко Л.А. Методологические основы использования вейвлетов в телекоммуникациях // Прикладная радиоэлектроника. 2002. Т. 1. № 1.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 03.04.2003