

УДК 517.95 : 517.988

О.С. Кончаковская¹, М.В. Сидоров²¹ ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, oksana.konchakovska@nure.ua² ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, maxim.sidorov@nure.ua

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ МИКРОЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Проводится сравнительный анализ расчета микроэлектромеханической системы в двух областях (круговой и прямоугольной формы). Математической моделью такой системы является нелинейная краевая задача для эллиптического уравнения. Приближенное решение задачи предлагается искать с помощью двусторонних приближений, которые построены с использованием методов нелинейного анализа в полупорядоченных пространствах. Эффективность разработанного численного метода иллюстрируется серией вычислительных экспериментов.

МЕТОД ДВУСТОРОННИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ, КОНУСНЫЙ ОТРЕЗОК, ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ, НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ МИКРОЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Введение

Одним из наиболее бурно развивающихся научно-технических направлений, реализуемых на микро-уровне, является микросистемная техника (МСТ). В зависимости от сферы применения МСТ выделяют микрооптоэлектромеханические, микроакустоэлектромеханические, микроэлектромеханические (МЭМС) и другие системы. Создаваемые микроустройства находят широкое применение в различных областях науки и техники, в частности, в авиации, автомобилестроении, телекоммуникациях, робототехнике [1]. Для описания физических процессов в таких системах используют методы математического моделирования.

Для расчета наиболее точных и сложных моделей основными методами являются численные методы, требующие проведения большого объема вычислений на ЭВМ. Наиболее удачные численные методы дают возможность получить итерационную последовательность с двусторонней сходимостью. Такие методы позволяют апостериорно на каждой итерации оценить погрешность приближенного решения.

Таким образом, разработка и совершенствование средств математического моделирования и численного анализа задач, возникающих при проектировании МСТ, с использованием методов с указанными свойствами, является актуальной научной задачей.

В работе рассмотрена проблема математического моделирования и численного анализа первой краевой задачи для нелинейного эллиптического уравнения второго порядка. Эта задача служит математической моделью работы упрощенного электростатического микросистемного устройства. Для решения задачи предлагается применить метод последовательных приближений с двусторонним характером сходимости к приближенному решению задачи.

Целью данного исследования является разработка и программная реализация метода численного анализа задачи математического моделирования процессов в простейших микроэлектромеханических устройствах и сравнительный анализ полученных результатов для двух областей: круговой и прямоугольной формы.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- поставить задачу математического моделирования и численного анализа процессов в простейшем МЭМС устройстве;
- разработать метод решения задачи;
- провести вычислительные эксперименты в двух областях для различных параметров модели;
- провести анализ адекватности решения;
- сравнить полученные результаты между собой.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [2].

1. Постановка задачи

Важнейшей составной частью большинства МЭМС является микроактюатор, который преобразует энергию в движение тепловым, электростатическим, магнитным, пьезоэлектрическим или гидравлическим методами. Электростатическая активация как наиболее общий и хорошо разработанный метод применяется примерно в одной трети микроактюаторов, причем главные его достоинства – минимальные энерго- и массемкость [1]. Электростатический актюатор состоит из упругой диэлектрической мембраны, которая покрыта тонкой металлизированной пленкой (подвижный электрод) и проводящей электрический ток жесткой пластины (неподвижный электрод).

Принцип действия данных актюаторов основан на возникновении электростатической силы между двумя электродами (рис. 1). Под действием отклоняющего напряжения (pull-in voltage) подвижный электрод притягивается к неподвижному, вследствие чего может произойти слипание электродов.

Обратный процесс называется устойчивым состоянием системы. Таким образом, необходимо определить максимальный прогиб мембраны при заданных параметрах системы для функционирования ее в устойчивом состоянии.

Проблема математического моделирования МЭМС исследуется в работах [3–6], где авторы подбирают диэлектрические свойства для увеличения прогиба.

Мембраны квадратной формы распространены в производстве емкостных МЭМС датчиков: емкостных микромеханических ультразвуковых преобразователей (СМУТ), микрофонов и датчиков давления.



Рис. 1. Схема работы простейшей электростатической МЭМС

Математической моделью такой системы служит нелинейная краевая задача [7]

$$-\Delta u = \frac{\lambda}{(1-u)^2} \quad \text{в } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

$$0 < u < 1 \quad \text{в } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

где $\lambda > 0$ – переменная, прямо пропорциональная квадрату фиксированного электрического напряжения.

2. Метод численного анализа

Для решения задачи (1), (2) воспользуемся методом двусторонних приближений [8, 9].

На конусе K неотрицательных в $C(\bar{\Omega})$ функций введем в рассмотрение нелинейное операторное уравнение

$$u = Tu,$$

где

$$Tu = \lambda \int_{\Omega} \frac{G(x,s)}{(1-u(s))^2} ds,$$

$G(x,s)$ – функция Грина первой краевой задачи для оператора $-\Delta$.

Рассмотрим некоторые свойства оператора T .

Оператор T является непрерывным и монотонным на конусе K , поскольку для любых элементов u_1, u_2 конуса из того, что справедливо неравенство

$$u_1 \leq u_2 < 1,$$

следует, что

$$Tu_1 \leq Tu_2.$$

Ввиду монотонности оператора T , построим инвариантный конусный отрезок

$$\langle v_0, w_0 \rangle = \{u \mid v_0 \leq u \leq w_0\},$$

$$T \langle v_0, w_0 \rangle \subset \langle v_0, w_0 \rangle.$$

Для этого рассмотрим схему последовательных приближений

$$u_{n+1}(x) = \lambda \int_{\Omega} \frac{G(x,s)}{(1-u_n(s))^2} ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

В качестве начальных приближений положим $v_0 = 0, w_0 = \beta = \text{const} \in (0, 1)$. Тогда получим первые верхние и нижние приближения

$$w_1(x) = \frac{\lambda}{(1-\beta)^2} \int_{\Omega} G(x,s) ds = \frac{\lambda u_0(x)}{(1-\beta)^2},$$

$$v_1(x) = \lambda \int_{\Omega} G(x,s) ds = \lambda u_0(x),$$

где $u_0(x) = \int_{\Omega} G(x,s) ds$.

Необходимо выбором β достичь выполнения условия $w_1 \leq w_0$, то есть $\frac{\lambda u_0(x)}{(1-\beta)^2} \leq \beta$. Значит, β определяется системой неравенств

$$\lambda \max_{x \in \Omega} u_0(x) \leq \beta(1-\beta)^2, \quad 0 < \beta < 1. \quad (4)$$

Если Ω – единичный круг, то функция Грина имеет вид

$$G(x,s) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{xs}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho r_{xs}^1},$$

где $x = (x_1, x_2), s = (s_1, s_2), s, s^1$ – точки, симметричные относительно единичной окружности, r_{xs} , r_{xs}^1 – расстояние между точками x и s, x и s^1 , $\rho = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$.

Тогда $\max_{x \in \Omega} u_0(x) = \frac{1}{4}$. Значит, система неравенств (4) для определения β принимает вид

$$\lambda \leq 4\beta(1-\beta)^2, \quad 0 < \beta < 1. \quad (5)$$

В работе [4] было доказано, что задача (1), (2) в единичном круге в \mathbb{R}^2 имеет при $0 < \lambda < 0,59259$ единственное положительное решение u^* .

Аналогично, если Ω – квадрат со стороной $\sqrt{\pi}$, то функция Грина имеет вид

$$G(x_1, x_2, s_1, s_2) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\sqrt{\pi}x_1) \sin(k\sqrt{\pi}x_2) \sin(n\sqrt{\pi}s_1) \sin(k\sqrt{\pi}s_2)}{\pi(n^2 + k^2)}.$$

Тогда $\max_{x \in \Omega} u_0(x) = 0,23146$ и система неравенств (4) для определения β принимает вид

$$\lambda \cdot 0,23146 \leq \beta(1-\beta)^2, \quad 0 < \beta < 1. \quad (6)$$

В работе [5] показано, что задача (1), (2), где Ω – квадрат со стороной $\sqrt{\pi}$, имеет при $0 < \lambda \leq 0,640$ единственное положительное решение u^* .

Ввиду монотонности оператора T справедливы неравенства

$$0 = v_0 \leq v_1 \leq u^* \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$0 = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема. Оператор $Tu = \lambda \int_{\Omega} \frac{G(x,s)}{(1-u(s))^2} ds$ имеет при $\lambda \in (0, \lambda_c)$ единственную неподвижную точку на конусном отрезке $\langle v_0, w_0 \rangle$, $w_0 = \beta$, $v_0 = 0$, причем β определяется неравенствами (4). Последовательные приближения, формируемые по правилу (3), двусторонне сходятся к неподвижной точке оператора T .

3. Результаты численного анализа

Нелинейное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2), имеет вид

$$u(x) = \lambda \int_{\Omega} \frac{G(x,s)}{(1-u(s))^2} ds. \quad (7)$$

Для вычислительного эксперимента возьмем $\lambda = \frac{1}{2}$.

Тогда итерационный процесс решения уравнения (7) строим по схеме

$$u^{(k+1)}(x) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{G(x,s)}{(1-u^{(k)}(s))^2} ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть Ω – единичный круг. Тогда задача (1), (2) имеет при $\lambda \in (0; 0,59259)$ единственное решение.

Для определения β воспользуемся соотношениями (7). Получим

$$0,190983 \leq \beta \leq 0,5.$$

На рис. 2 представлены верхние приближения (сплошная линия) и нижние приближения (пунктирная линия) при n от 0 до 9 в сечении $x_2 = 0$.

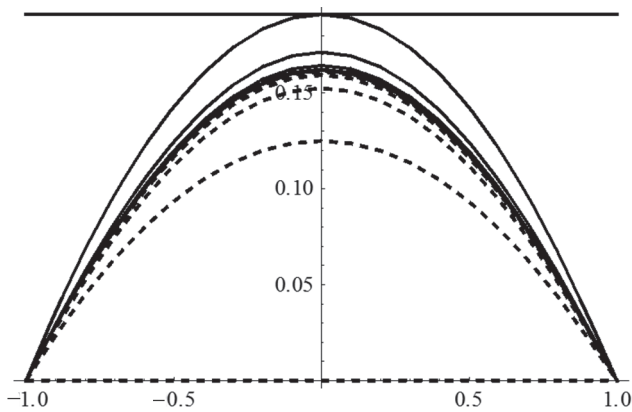


Рис. 2. Графики $w_n(x_1, 0)$ и $v_n(x_1, 0)$ при n от 0 до 9

Поскольку

$$v_9 \leq u^* \leq w_9,$$

$$\max_{x \in \Omega} (w_9(x) - v_9(x)) = 0,15 \cdot 10^{-5},$$

то с точностью $0,75 \cdot 10^{-6}$ имеем

$$u^* \approx u_9 = \frac{w_9 + v_9}{2}.$$

В табл. 1 приведены значения приближенного решения $u_9(x)$ с точностью $\varepsilon = 0,75 \cdot 10^{-6}$ в точках области $\bar{\Omega}$ с полярными координатами (ρ_i, φ_j) , где $\rho_i = 0,25i$, $i = \overline{0,2}$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $j = \overline{0,5}$. Поверхность приближенного решения $u_9(x)$ и его линии уровня представлены на рис. 3 и 4 соответственно.

Таблица 1

Значения приближенного решения $u_9(x)$ в точках области Ω

$\varphi \backslash \rho$	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	0,161804	0,161804	0,161804	0,161804	0,161804	0,161804
0,25	0,150309	0,150345	0,150381	0,150387	0,150394	0,150359
0,5	0,118363	0,118452	0,118541	0,118574	0,118607	0,118495

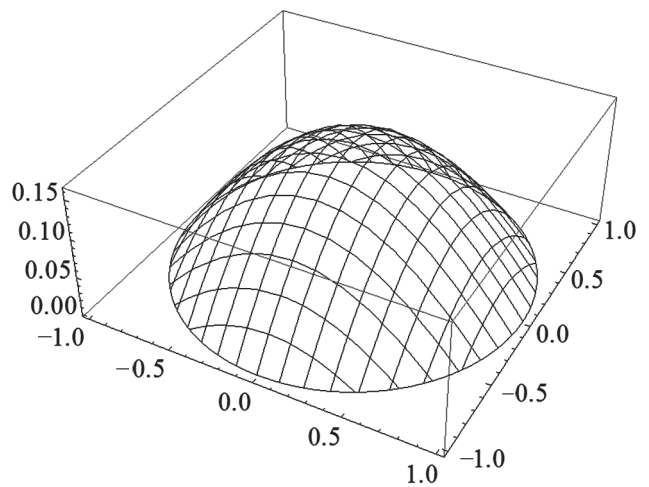


Рис. 3. Поверхность приближенного решения $u_9(x)$

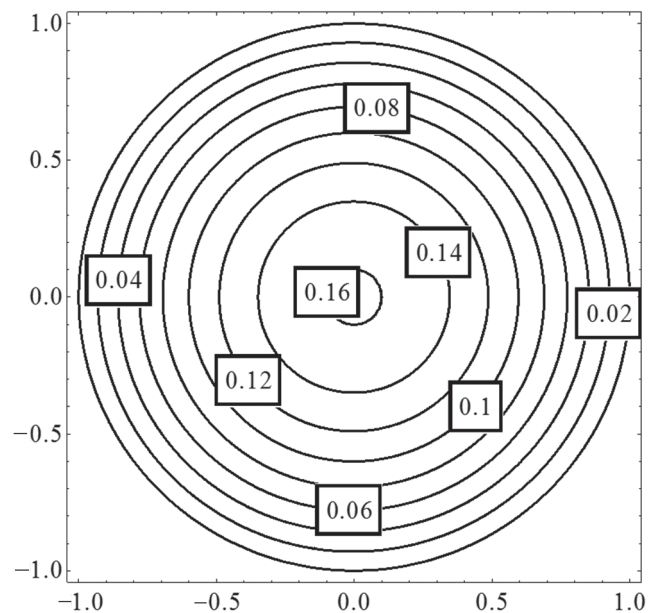


Рис. 4. Линии уровня приближенного решения $u_9(x)$

Значения нормы приближенного решения задачи (1), (2) с точностью $\varepsilon = 0,75 \cdot 10^{-6}$ в зависимости от параметра λ представлены в табл. 2.

Таблица 2

Значения нормы приближенного решения в зависимости от параметра λ

λ	$\ u\ _C$	λ	$\ u\ _C$	λ	$\ u\ _C$
0,02	0,005038	0,22	0,060318	0,42	0,128525
0,04	0,010153	0,24	0,066437	0,44	0,136425
0,06	0,015348	0,26	0,072687	0,46	0,144587
0,08	0,020631	0,28	0,079076	0,48	0,153037
0,10	0,026001	0,30	0,085611	0,50	0,161804
0,12	0,031462	0,32	0,092304	0,52	0,170920
0,14	0,037020	0,34	0,099164	0,54	0,180429
0,16	0,042678	0,36	0,106202	0,56	0,190377
0,18	0,048446	0,38	0,113431	0,58	0,200825
0,20	0,054323	0,40	0,120867	0,59	0,207367

Таблица 3

Значения приближенного решения $u_7(x)$ в точках области $\bar{\Omega}$

$\rho \backslash \varphi$	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	0	0	0	0	0	0
0,25	0	0,045115	0,065114	0,069694	0,060376	0,032424
0,5	0	0,071323	0,107320	0,115796	0,098565	0,050286

Аналогично пусть $\Omega = (0, \sqrt{\pi}) \times (0, \sqrt{\pi}) \subset \mathbb{R}^2$. Тогда рассматриваемая задача имеет при $\lambda \in (0; 0,640)$ единственное решение.

Определим β из соотношений (7). Тогда получим

$$0,166641 \leq \beta \leq 0,534823.$$

На рис. 5 представлены верхние приближения (сплошная линия) и нижние приближения (пунктирная линия) n от 0 до 7 в сечении $x_2 = \sqrt{\pi}/2$.

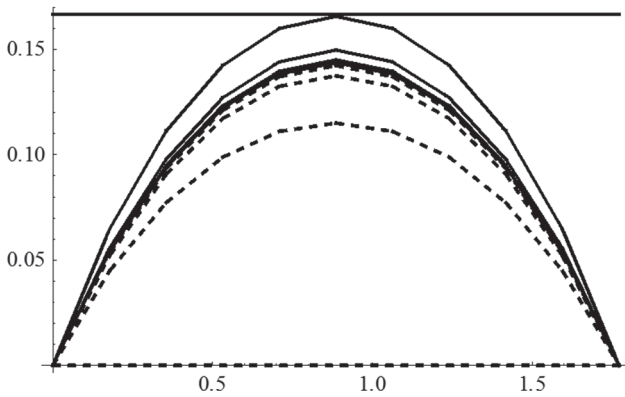


Рис. 5. Графики $w_n(x_1, \sqrt{\pi}/2)$ и $v_n(x_1, \sqrt{\pi}/2)$ при n от 0 до 7

Поскольку

$$v_7 \leq u^* \leq w_7,$$

$$\max_{x \in \Omega} (w_7(x) - v_7(x)) = 0,64 \cdot 10^{-5},$$

то с точностью $0,32 \cdot 10^{-5}$ имеем

$$u^* \approx u_7 = \frac{w_7 + v_7}{2}.$$

В табл. 3 приведены значения приближенного решения $u_7(x)$ с точностью $\varepsilon = 0,32 \cdot 10^{-5}$ в точках области $\bar{\Omega}$ с полярными координатами (ρ_i, φ_j) , где $\rho_i = 0,25i$, $i = \overline{0,2}$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $j = \overline{0,5}$. Поверхность приближенного решения $u_7(x)$ и его линии уровня представлены на рис. 6 и 7 соответственно.

Значения нормы приближенного решения задачи (1), (2) с точностью $\varepsilon = 0,32 \cdot 10^{-5}$ в зависимости от параметра λ представлены в табл. 4.

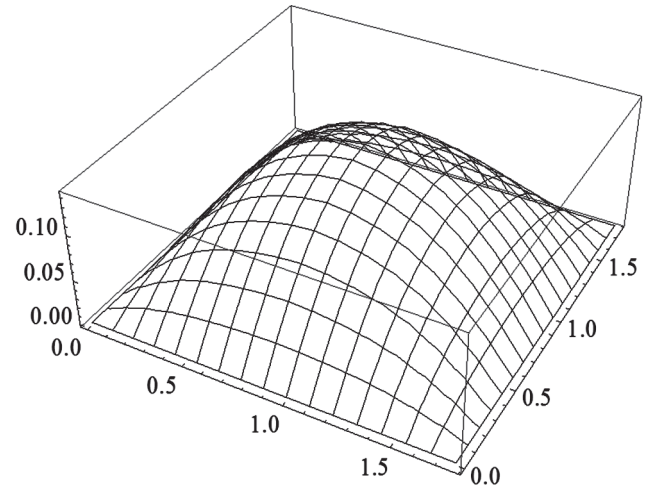


Рис. 6. Поверхность приближенного решения $u_7(x)$

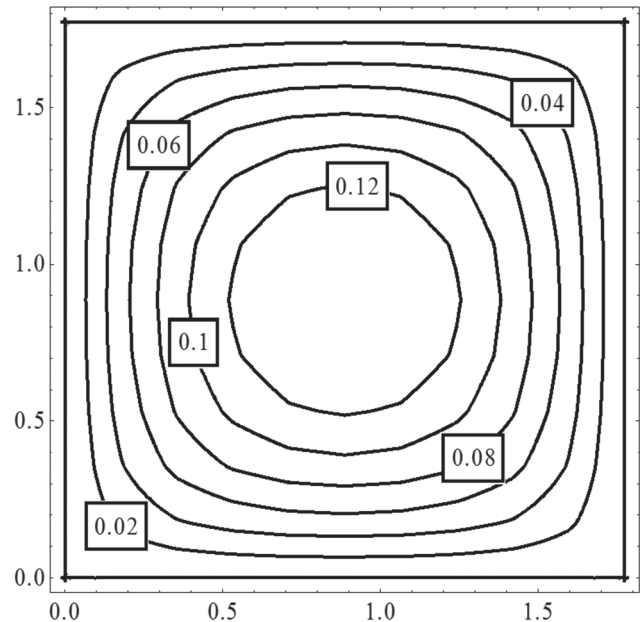


Рис. 7. Линии уровня приближенного решения $u_7(x)$

На рис. 8 показано сравнение зависимости нормы приближенного решения от параметра λ для квадрата со стороной $\sqrt{\pi}$ (сплошная линия) и единичного круга (пунктирная линия).

Таблица 4

Значения нормы приближенного решения в зависимости от параметра λ

λ	$\ u\ _C$	λ	$\ u\ _C$	λ	$\ u\ _C$
0	0	0,22	0,054932	0,44	0,122042
0,02	0,004632	0,24	0,060432	0,46	0,129037
0,04	0,009327	0,26	0,066034	0,48	0,136228
0,06	0,014090	0,28	0,071742	0,50	0,143630
0,08	0,018921	0,30	0,077563	0,52	0,151261
0,10	0,023825	0,32	0,083502	0,54	0,159144
0,12	0,028803	0,34	0,089566	0,56	0,167304
0,14	0,033859	0,36	0,095763	0,58	0,175774
0,16	0,038997	0,38	0,102099	0,60	0,184603
0,18	0,044219	0,40	0,108585	0,62	0,193871
0,20	0,049529	0,42	0,115229	0,64	0,204028

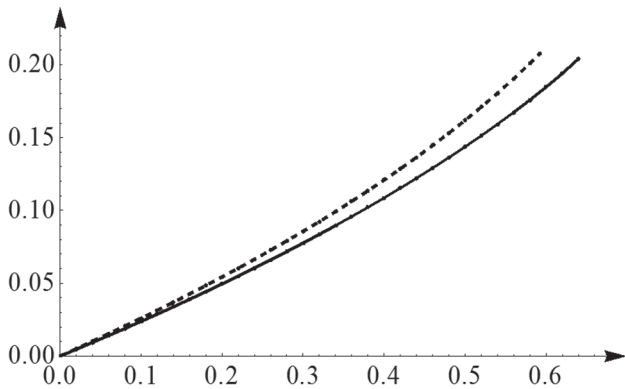


Рис. 8. Значения нормы приближенного решения в зависимости от параметра λ

Выводы

В работе впервые построены двусторонние приближения к решению первой краевой задачи для нелинейного эллиптического уравнения, которое моделирует электростатическую микро-электромеханическую систему. Для выполнения

исследований был разработан программный продукт в пакете Mathematica 10, с помощью которого проведен ряд вычислительных экспериментов. Сравнивая полученные результаты прогиба при $\lambda = 0,5$ для $\Omega = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ и $\Omega = (0, \sqrt{\pi}) \times (0, \sqrt{\pi})$ можно сделать вывод, что мембрана круглой формы для задачи (1), (2) позволяет увеличить величину прогиба. Результаты работы могут найти применение в прикладных научных исследованиях.

Список литературы:

1. Мухуров Н.И., Ефремов Г.И. Электромеханические микроустройства. Минск: Беларус. навука, 2012. 257 с.
2. Кончаковська О.С. Застосування методів нелінійного аналізу у напіввпорядкованих просторах до чисельного аналізу мікроелектромеханічних систем // Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті: Матеріали XXI Міжнародного молодіжного форуму, 25 – 27 квітня 2017, м. Харків: ХНУРЕ, 2017. Т. 7. С. 82 – 83.
3. Esposito P. Compactness of a nonlinear eigenvalue problem with a singular nonlinearity // Communications in Contemporary Mathematics. – 2008. – 10, № 01. – P.17-45.
4. Ghousoub N., Guo Y. On the partial differential equations of electrostatic MEMS devices: stationary case // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 2007. – 38, № 5. – P.1423-1449.
5. Guo Y., Pan Z., Ward M.J. Touchdown and pull-in voltage behavior of a MEMS device with varying dielectric properties // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 2005. – 66, № 1. – P.309-338.
6. Guo Z., Wei J. Infinitely many turning points for an elliptic problem with a singular non-linearity // Journal of the London Mathematical Society. – 2008. – 78, № 1. – P.21-35.
7. Lin F., Yang Y. Nonlinear non-local elliptic equation modelling electrostatic actuation // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – The Royal Society, 2007. – 463, №. 2081. – P.1323-1337.
8. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1962. 394 с.
9. Опоицев В.И., Хуродзе Т.А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.

Поступила в редколлегию 12.04.2017