ПРОСТРАНСТВА КООРДИНАТ И ИХ БАЗИСЫ В ТЕНЗОРНОМ АНАЛИЗЕ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЕЙ

Евсеева О.Ю.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
61166, Харьков, пр. Ленина, каф. телекоммуникационных систем, тел. (057) 702-13-20,
E-mail: evseeva.o.yu@gmail.com

The essential advantage of the application of mathematical apparatus tensor analysis for telecommunications networks is more complete, versatile description of the system without increasing the dimension of the mathematical model. With the framework of the tensor analysis telecommunication system is considered as a geometric object in some space coordinates. Each coordinate space allows to elucidating a certain aspect of the system and getting any new information about the object. Coordinate space is defined using basic matrixes and matrixes of coordinate transformation. The overviews of coordinate spaces, which are used in tensor analysis of networks, as well as solvable with the help of their problems, are offered.

Основным преимуществом применения математического аппарата тензорного анализа применительно к решению прикладных телекоммуникационных задач является реализация основным принципов системотехники и достижение более полного описания системы без повышения размерности математической модели. Тензорный подход к моделированию телекоммуникационной системы (ТКС) основывается на ее представлении как геометрического объекта – смешанного тензора, являющегося совокупностью ковариантных и контравариантных тензоров более низкого порядка, связанных между собой тензорными уравнениями. Данный геометрический объект может быть рассмотрен с позиций различных систем координат, в каждой из которых проекции (координаты) исходного тензора связаны векторно-матричными уравнениями. В каждой из этих систем координат численные значения проекций изучаемого геометрического объекта – тензора – напрямую связаны с выбранным для решения конкретной задачи базисом. Возможность и правила преобразования координат геометрического объекта при переходе к новому базису в рамках данного пространства или при переходе к принципиально другому пространству, возможно другой размерности, является предметом изучения тензорного анализа сетей (ТАС) и позволяет решить ряд прикладных задач [1,2,3].

Каждое координатное пространство, в котором рассматривается ТКС, позволяет осветить какой-либо один определенный аспект ТКС, благодаря чему становится возможным многоаспектное описание ТКС в рамках одной, тензорной, модели. С точки зрения решения прикладных задач каждое новое координатное пространство позволяет получить какие-либо новые сведения об объекте, причем они могут выступать как в качестве исходных данных, так и искомых величин.

Таким образом, для расширения перечня прикладных задач и их успешного решения важно в рамках ТАС определить наибольшее число возможных координатных пространств, их базисные множества, а так же правила преобразования проекций геометрического объекта при переходе как к новому базису, так и к новому пространству.

Тензорные методы анализа ТКС предполагают рассмотрение всех процессов как протекающих в дискретном пространстве - структуре, одним из вариантов представления которого является ориентированный граф. Множество ветвей графа может выступать в качестве простейшего пространства, базисом в котором будет все множество ветвей n. Тогда некие численные характеристики процесса информационного обмена, связанные с каждой отдельной ветвью, можно рассматривать как проекции (координаты) соответствующего тензора в пространстве ветвей.

Воспользовавшись результатами хорошо развитой теории графов, можно предложить для анализа сетей следующие координатные пространства:

- пространство контуров (π), где базисной является матрица контуров B_π размерности $(n-m+1)\times n$, ранг которой $(n-m+1)$, где m – количество вершин графа;

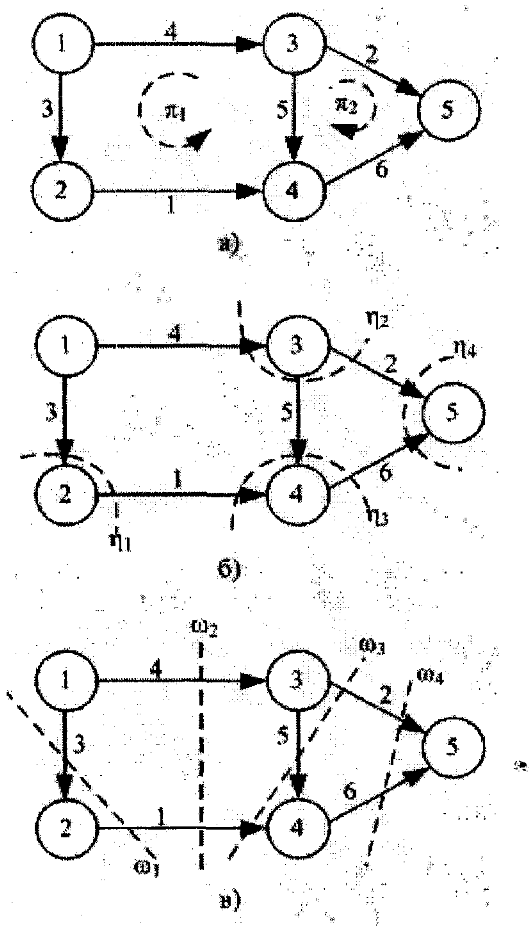
- пространство узловых пар (η), где базисной является усеченная матрица инциденций B_η размерности $(m-1)\times n$, ранг которой $(m-1)$;

- пространство сечений (ω), где базисной является усеченная матрица сечений B_ω размерности $(m-1)\times n$, ранг которой $(m-1)$;

- пространство путей между одной (любой) парой вершин (γ), базисной является матрица путей B_γ размерности $(n-m+2)\times n$, ранг которой $(n-m+2)$;

- пространство деревьев (ξ), базисной является матрица деревьев B_ξ размерности $n\times n$, ранг n, $n\geq 4$.

На рис. 1 приведен пример графа ($n=6$, $m=5$), для которого в качестве базисных матриц различных пространств могут выступать:



$$B_\pi=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix};$$

$$B_\eta=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$B_\omega=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$B_\gamma=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$B_\xi=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Рис. 1. Граф и его системы базисных контуров (а), узловых пар (б) и базисных сечений (в)

Отметим, что узловая пара является частным случаем разреза такого, что разделяет узлы сети на два непересекающихся подмножества, одно из которых образовано одним единственным узлом, а другое включает в себя все остальные узлы сети, в том числе и узел-источник. Однако, несмотря на это, пространства узловых пар и сечений используются при решении различных прикладных задач, а значит, вводятся и рассматриваются отдельно.

В рамках тензорного анализа сетей существует возможность рассмотрения ТКС в рамках какого-либо одного пространства (моделирование так называемой неортогональной сетью – π, η, ω, γ или ξ), а также предлагается рассматривать процессы, протекающие в ТКС, с позиции ее моделирования одновременно в двух ортогональных подпространствах (моделирование ортогональной сетью).

Из теории графов известна ортогональность двух пар пространств: 1) пространства узловых пар и базисных контуров (обозначим его $\pi\eta$) и 2) пространства базисных контуров и базисных сечений (обозначим его $\pi\omega$). В работе [4] предлагается использовать для изучения свойств ТКС ортогональное пространство $\gamma\varepsilon$, образованное подпространствами путей γ и внутренних узловых пар ε, представляющего собой подмножество множества всех узловых пар относительно данной пары источник-получатель. Моделирование сети в таких ортогональных пространствах эквивалентно рассмотрению протекающих в ней процессов одновременно с точки зрения двух ортогональных подпространств: узловых пар и контуров, контуров и сечений, путей и узловых пар.

Рассмотрение процессов, протекающих как в отдельных ветвях ТКС, так и в сети в целом, может трактоваться как переход от примитивной сети к реальной, а в терминах пространств из пространства ветвей ν в более сложное пространство, например, $\pi\eta$, $\pi\omega$ или $\gamma\varepsilon$. Такой переход можно считать полностью определенным, если задан однозначный закон преобразования базисов различных пространств, который формализуется в виде матриц координатного преобразования. Если при переходе из пространства ветвей к пространствам π, η, ω γ или ξ соответствующие базисные матрицы B_π, B_η, B_ω, B_γ, B_ξ, являются одновременно и матрицами координатного преобразования, то в случае перехода к ортогональным пространствам $\pi\eta$, $\pi\omega$ или $\gamma\varepsilon$ матрицы прямого и обратного координатного преобразования $A_\nu^{\pi\eta}$ и $C_{\pi\eta}^\nu$ ($A_\nu^{\pi\omega}$ и $C_{\pi\omega}^\nu$, $A_\nu^{\gamma\varepsilon}$ и $C_{\gamma\varepsilon}^\nu$) соответственно строятся уже по более сложным законам. Отметим, что матрицы A являются законами координатного преобразования проекций ковариантного тензора, а матрицы C – контравариантного.

Основоположниками теории тензорного анализа сетей Г. Кроном и А. Анго было предложено использовать для построения матрицы координатного преобразования следующее правило:

$$A_\nu^{\pi\eta} = \begin{bmatrix} B_\pi^{*T} & B_\eta^T \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где B_π^* – неособенная подматрица матрицы базисных контуров B_π.

В ряде работ показано, что в случае перехода между пространствами ν и $\pi\eta$, в качестве матрицы прямого координатного преобразования можно использовать

$$A_\nu^{\pi\eta} = \begin{bmatrix} B_\pi^T & B_\eta^T \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Применив, по аналогии, правило (1) для формирования матриц прямого координатного преобразования для ортогонального пространства $\pi\omega$, получаем $A_\nu^{\pi\omega} = \begin{bmatrix} B_\pi^{*T} & B_\omega^T \end{bmatrix}$. По аналогии с (2) имеем $A_\nu^{\pi\omega} = \begin{bmatrix} B_\pi^T & B_\omega^T \end{bmatrix}$. Для пространства путей и внутренних узловых пар $\gamma\varepsilon$ применимо правило (2) построения матрицы прямого преобразования: $A_\nu^{\gamma\varepsilon} = \begin{bmatrix} B_\gamma^T & B_\varepsilon^T \end{bmatrix}$ [4]. Из условия ортогональности прямого и обратного координатного преобразования имеем $C_{\pi\eta}^\nu = \begin{bmatrix} B_\pi \\ B_\eta \end{bmatrix}^{-1}$, $C_{\pi\omega}^\nu = \begin{bmatrix} B_\pi \\ B_\omega \end{bmatrix}^{-1}$ и $C_{\gamma\varepsilon}^\nu = \begin{bmatrix} B_\gamma \\ B_\varepsilon \end{bmatrix}^{-1}$.

Для сети (рис. 1) некоторые из матриц координатного преобразования приведены ниже:

$$A_{\nu}^{*\pi\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{\pi\eta}^{*\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{\nu}^{*\pi\omega} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{\pi\omega}^{*\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{\nu}^{\pi\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{\nu}^{\pi\omega} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{\nu}^{\gamma\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотренные матрицы координатного преобразования позволяют осуществить переход между пространствами ветвей ν и одним из введенных неортогональных или ортогональных пространств. В результате, зная законы координатного преобразования, представляется возможным получение определенных характеристик в одном пространстве при известных координатах проекций соответствующих тензоров в другом.

В целом введенные координатные пространства в рамках тензорного анализа применительно к телекоммуникационным сетям позволяют решить следующий ряд важных прикладных задач: одно- и многопутевая маршрутизация; совместное решение задачи маршрутизации и распределения сетевых ресурсов в условиях известного состояния сети и поступающей нагрузки; обеспечение гарантированного качества обслуживания по множеству показателей путем реализации динамической стратегии распределения сетевых ресурсов и многопутевой маршрутизации; построение дерева многоадресной рассылки в условиях известного состояния сети и поступающей нагрузки с выполнением требований пользователей относительно уровня качества обслуживания.

Литература:

1. Крон Г. Тензорный анализ сетей. – М.: Сов. радио, 1978. – 719 с.

2. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров: Пер. с фр. – М.:Наука, 1965. – 780 с.

3. Лемешко А.В., Евсеева О.Ю., Чечуй А.В. Категориально-тензорное представление телекоммуникационной системы // Наукові записки УНДІЗ, 2008 – №2(4) – С. 3–15.

4. Лемешко А.В. Тензорные модели решения задачи поиска кратчайшего пути // Прикладная радиоэлектроника. – 2003. – Том 2, №1. – С. 52–59.