Вопрос применимости модели для любых зрительных картин, а также определения ядер интегральных преобразований (1) требует дальнейшего изучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шабанов-Кушнаренко Ю. П., Сердюченко В. Я., Грабина В. А. Математическое моделирование индуктивного цветового контраста.— В кн.: Проблемы бионики. Вып. 17, Харьков, 1976, с. 3—8.
2. Шабанов-Кушнаренко Ю. П. Математическое моделирование некоторых функций человеческого зрения. Автореф. дис. на соиск. учен. степени д-ра техн. наук. Харьков, 1970, с. 12—14.
3. Nayatani Y. Estimation of color induction by simultancous color contrast.—«Proc. Int. Color Meeting «Color 69», Stockholm, 1969, vol. 1, p. 219—228.
4. Heinrich F. Untersuchungen zum farbigen Simultankontrast.—«Optik», 1965, 22, № 3, S. 162—168.

Поступила 25 ноября 1976 г.

УДК 62.506.2

В. П. ПЧЕЛИНОВ

ДЕДУКТИВНЫЙ ВЫВОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОРГАНА ЗРЕНИЯ ЧЕЛОВЕКА. СООБЩЕНИЕ 1

Согласно современной трехкомпонентной теории цветового зрения человека, процесс преобразования излучений в цветовые образы можно описать с помощью математических выражений:

$$\overline{S} = \varphi(\overline{B}), \tag{1}$$

$$B_i = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda)\, e_i(\lambda)\, d\lambda, \tag{2}$$

где $b(\lambda)$ — функции спектральной плотности лучистой яркости, т. е. входные сигналы органа зрения; $e_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, 3)$ — функции сложения цвета; $\overline{B}$ — вектор с компонентами B_1, B_2, B_3; $\overline{S}$ — вектор цвета, имеющий компоненты: цветовой тон s_1, насыщенность s_2 и светлоту s_3; φ — взаимно-однозначная функция; λ_1, λ_2 — длины волн излучений, соответствующие началу и концу светового диапазона.

Проблема состоит в том, что эти выражения до сих пор не являются строго обоснованными. Впервые вывод интегральных соотношений (2) был сделан Шредингером [1], однако в работе [2] убедительно показано, что этот вывод опирается на субъективные понятия и содержит ошибку «логического круга», поэтому имеет гипотетический характер и не является достаточно убедительным.

Наиболее полно вопросы доказательства математическо модели рассматриваемого процесса описаны в работе [2] и вс же ряд из них требует дальнейшего решения.

Сюда относятся такие аспекты, как введение математическо го понятия цвета, упрощение аксиоматики, используемой пр выводе модели, дальнейшее расширение этой аксиоматики дл различных видов множеств входных сигналов органа зрени приведение ее к виду, позволяющему осуществлять эксперимен тальную проверку по методике, дающей объективные данны разработка более строгого метода вывода модели, основанног лишь на математических преобразованиях без привлечения фи зических данных и др.

Все это позволит получить указанную модель чисто дедук тивным способом и обосновать ее достоверность.

Трудность решения этой задачи состоит в том, что хотя вход ные сигналы органа зрения — функции $b(\lambda)$ и являются изме римыми физическими величинами, однако выходные — это цве товые образы, которые нельзя замерить никакими приборам

Поэтому приходится разрабатывать специальные методы исследования. Наиболее приемлемым здесь оказывается мето «черного ящика», который состоит в том, что вначале форму лируются аксиомы, хорошо проверенные в экспериментах, и которых затем выводится требуемая модель и доказываетс эквивалентность полученной модели и используемых аксиом т. е. их полнота.

Рассмотрим вначале методику проведения экспериментов которой должны удовлетворять эти аксиомы. Известно, что на иболее точные результаты можно получить в опытах, когд орган зрения человека используется в качестве нуль-органа.

Пусть имеется испытуемый, которому предъявляется дв поля сравнения, являющихся однородными стационарными зри тельными картинами, т. е. описываемые функциями спектраль ной плотности лучистой яркости соответственно $b_1(\lambda)$ и $b_2(\lambda)$ Ему предлагается ответить на вопрос: одинаковы цвета эти полей сравнения или нет? Если одинаковы, то он должен зафик сировать 1, а если нет — то 0. Поскольку испытуемому можн предъявить множество таких пар полей сравнения (обозначи это множество через B), то получим множество ответов $У\ \{0,\ 1\}$

Схематично эту ситуацию можно изобразить, как показан на рис. 1, где Φ — функция, которую реализует испытуемый при сравнении цветов полей сравнения, причем $\Phi\ (b_1\ (\lambda),\ b_2(\lambda)) \in У$

Тогда можно сказать, что эта функция является отображе нием множества B на множество $У$, т. е. $\Phi : B \to У$.

Заметим, что для постороннего наблюдателя (например, дл исследователя) входные сигналы испытуемого — функции $b(\lambda)$ а также выходные — 0 и 1 являются категориями объективны ми, поскольку их можно фиксировать, регистрировать, воспро изводить и т. д.

Поэтому если исходя только из указанных сигналов нам удастся расшифровать вид функции Ф, то полученная модель будет иметь объективный характер.

Эксперименты с испытуемыми, проведенные по описанной методике, показывают, что для входных сигналов органа зрения — функций $b(\lambda)$ выполняются следующие условия.

1. Если на обоих полях сравнения, предъявляемых испытуемому, сформировать одинаковые излучения, то он зафиксирует равенство их цветов. Это можно записать в виде

$$\Phi\,[b(\lambda),\ b(\lambda)] = 1 \text{ (рефлексивность).} \qquad (3)$$

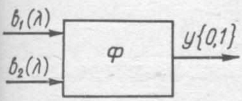

Рис. 1.

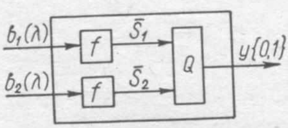

Рис. 2.

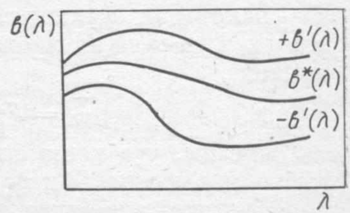

Рис. 3.

2. Если испытуемому предъявить пару полей сравнения и он зафиксирует равенство их цветов, то при перемене мест этих полей сравнения его ответ не изменится, т. е.

$$\text{если } \Phi\,[b_1(\lambda), b_2(\lambda)] = 1, \text{ то } \Phi\,[b_2(\lambda), b_1(\lambda)] = 1 \text{ (симметричность).} \qquad (4)$$

3. Если предъявить испытуемому пару полей сравнения, характеризуемых функциями $\langle b_1(\lambda),\ b_2(\lambda)\rangle$, на которые он дает ответ 1, а затем два поля сравнения, характеризуемые функциями $\langle b_2(\lambda),\ b_3(\lambda)\rangle$, для которых он также зафиксирует равенство цветов, то для полей сравнения, описываемых функциями $\langle b_1(\lambda), b_3(\lambda)\rangle$, его ответ также будет положительным, т. е.

$$\text{если } \Phi\,[b_1(\lambda),\ b_2(\lambda)] = 1 \text{ и } \Phi\,[b_2(\lambda),\ b_3(\lambda)] = 1, \text{ то } \Phi\,[b_1(\lambda),\ b_3(\lambda)] = 1 \text{ (транзитивность).} \qquad (5)$$

Отсюда можно сделать заключение, что функция Ф удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности, а значит, она является отношением эквивалентности [3] на множестве входных сигналов B. Следовательно, существует отображение F множества B на множество классов эквивалентности $\tilde{K}$, т. е. $F: B \to \tilde{K}$, которое ставит в соответствие каждому элементу множества B его класс. К одному классу эквивалентности относятся излучения, если $\Phi\,[b_1(\lambda),\ b_2(\lambda)] = 1$, и к разным классам, если $\Phi\,[b_1(\lambda),\ b_2(\lambda)] = 0$.

Задача состоит в том, чтобы найти решение системы уравнений (3), (4), (5) относительно функции Ф.

Как показано в работе [4], это решение может быть записано в виде

$$\Phi\,[b_1(\lambda),\ b_2(\lambda)] = Q\,[F(b_1(\lambda)),\ F(b_2(\lambda))], \tag{6}$$

где Q — функция сравнения, заданная на некотором множестве S и определяемая из условий

$$Q(\bar{\alpha}_1,\ \bar{\alpha}_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } \bar{\alpha}_1 \neq \bar{\alpha}_2; \\ 1, & \text{если } \bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2; \end{cases} \tag{7}$$

$$(\bar{\alpha}_1,\ \bar{\alpha}_2 \in S);$$

F — некоторая функция, определенная на множестве B с областью значений на множестве S, т. е. это отображение $F: B \to S$, причем

$$\bar{\alpha}_1 = F\,[b_1(\lambda)],\ \bar{\alpha}_2 = F\,[b_2(\lambda)]. \tag{8}$$

Заметим, что конкретную функцию Φ однозначно определяют выбор множества S и функции F.

Обратное утверждение, однако, неверно, поскольку если задана функция Φ, то это еще не значит, что мы можем однозначно определить единственное множество S и функцию F, для которых выполняется равенство (6). Оказывается, что одна и та же функция Φ, удовлетворяющая условиям (3), (4), (5), может быть представлена различными способами.

Для более строгого доказательства этого утверждения абстрагируемся от конкретной интерпретации функций $b(\lambda) \in B$ и будем считать их, как и другие используемые величины, абстрактными математическими понятиями.

Допустим, имеются две функции $F'(b)$ и $F''(b)$ с областью определения на множестве B и со значениями на множествах соответственно S' и S''.

Введем функции Φ' и Φ'', удовлетворяющие условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности, т. е. представимые в виде

$$\Phi'(b_1,\ b_2) = Q\,[F'(b_1),\ F'(b_2)], \tag{9}$$

$$\Phi''(b_1,\ b_2) = Q\,[F''(b_1),\ F''(b_2)]. \tag{10}$$

Эти функции совпадают в том и только в том случае, если существует взаимно-однозначное отображение $\varphi: S' \to S''$ такое, что для всех $b \in B$

$$F'(b) = \varphi\,[F''(b)]. \tag{11}$$

Пусть функции Φ' и Φ''совпадают. Рассмотрим отношение φ_1, заданное на декартовом произведении $S' \times S''$, представляющем множество всех пар вида $< F'(b),\ F''(b) >$, где b — произвольный элемент из множества B.

Докажем, что φ — это биекция, т. е. взаимно-однозначная функция.

Если $b_1, b_2 \in B$ таковы, что $F'(b_1) = F''(b_2)$, то в силу (11) $\Phi'(b_1, b_2) = 1$, а значит, и $\Phi''(b_1, b_2) = 1$, т. е. $F'(b_2) = F''(b_1)$. Таким образом, отношение φ есть функция.

Пусть теперь $b_1, b_2 \in B$ таковы, что $F'(b_2) = F''(b_1)$. Тогда $\Phi'(b_1, b_2) = 1$ и $\Phi''(b_1, b_2) = 1$ и поэтому $F'(b_1) = F''(b_2)$.

Значит, φ — взаимно-однозначная функция. Следовательно, если Φ' и Φ'' совпадают, то существует взаимно-однозначная функция такая, что

$$F'(b) = \varphi\,[F''(b)].$$

Пусть теперь биекция φ существует. Докажем, что в этом случае функции Φ' и Φ'' совпадают.

Если $b_1, b_2 \in B$ таковы, что $\Phi'[b_1, b_2] = 1$, то $F'(b_1) = F'(b_2)$ и поэтому $F''(b_1) = F''(b_2)$, т. е. $\Phi''[b_1, b_2] = 1$.

Если же $b_1, b_2 \in B$ таковы, что $\Phi'[b_1, b_2] = 0$, то $F'(b_1) \neq F'(b_2)$, а значит, $F''(b_1) \neq F''(b_2)$, в силу взаимной однозначности φ в выражении (11). Поэтому $\Phi''(b_1, b_2) = 0$.

Таким образом, мы доказали наше утверждение и, кроме того, установили, что любую функцию, представляемую в виде (6), можно записать также в виде

$$\Phi\,[b_1(\lambda),\ b_2(\lambda)] = Q\,[\varphi(F(b_1(\lambda))),\ \varphi(F(b_2(\lambda)))], \tag{12}$$

где φ — произвольно выбранная взаимно-однозначная функция.

Конкретизируя полученное выражение для условий, рассматриваемых в данной статье, приходим к выводу, что оно описывает процесс распознавания и сравнения цветов испытуемым в экспериментах по ранее описанной методике, причем

$$Q(\overline{S}_1, \overline{S}_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } \overline{S}_1 \neq \overline{S}_2, \\ 1, & \text{если } \overline{S}_1 = \overline{S}_2; \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \overline{S}_1 &= f\,[b_1(\lambda)] = \varphi\,[F(b_1(\lambda))], \\ \overline{S}_2 &= f\,[b_2(\lambda)] = \varphi\,[F(b_2(\lambda))], \end{aligned} \tag{14}$$

где $\overline{S}_1, \overline{S}_2$ — векторы цвета полей сравнения, являющиеся элементами множества цветов S; $F[b(\lambda)]$ — функция, ставящая в соответствие каждому излучению некоторый вектор $\overline{\alpha} = F[b(\lambda)]$.

Отсюда следует, что множество классов эквивалентности $\tilde{K}$, функции F и множество цветов S связаны между собой взаимно-однозначной функцией. Математическая модель в виде соотношений (12), (13), (14) описывает процесс распознавания цвета с точностью до взаимно-однозначного соответствия или до кодов. Однако для математического описания любого объекта принцип кодирования не играет существенной роли. Схематично эту модель можно изобразить, как показано на рис. 2.

Дальнейшей задачей вывода модели спектральной чувствительности органа зрения является определение конкретного вида функции F в выражении (12).

С этой целью необходимо сначала определить вид пространства входных сигналов.

Рассмотрим линейные свойства функций $b(\lambda)$. Для тог чтобы их множество можно было считать линейным пространством, необходимо выполнение следующих условий [4]:

1. Для любых $b_1(\lambda)$, $b_2(\lambda) \in B$, $b_1(\lambda) + b_2(\lambda) \in B$, приче

а) $b_1(\lambda) + b_2(\lambda) = b_2(\lambda) + b_1(\lambda)$;

б) $b_1(\lambda) + (b_2(\lambda) + b_3(\lambda)) = (b_1(\lambda) + b_2(\lambda)) + b_3(\lambda)$;

в) $b(\lambda) + 0 = b(\lambda)$;

г) существует $-b(\lambda)$ и $b(\lambda)$, причем $b(\lambda) + (-b(\lambda)) = 0$

2. Для любого $b(\lambda) \in B$ и числа α $\alpha b(\lambda) \in B$, причем:

д) $\alpha_1(\alpha_2 b(\lambda)) = (\alpha_1\alpha_2) b(\lambda)$;

е) $\alpha(b_1(\lambda) + b_2(\lambda)) = \alpha b_1(\lambda) + \alpha b_2(\lambda)$;

ж) $(\alpha_1 + \alpha_2) b(\lambda) = \alpha_1 b(\lambda) + \alpha_2 b(\lambda)$;

з) $1b(\lambda) = b(\lambda)$,

где α, α_1, α_2 — произвольные числа.

Анализируя эти условия, можно прийти к выводу, что н выполняется условие г), поскольку не существует отрицательного излучения, так как в природе нет отрицательных энергий а условия д), е) и ж) выполняются лишь для положительны чисел α, α_1, α_2.

Поэтому мы не можем утверждать, что множество функци образует линейное пространство. Однако в математике имеется понятие положительного конуса [5], которое определяется ка множество K элементов линейного пространства, имеющих положительный знак, не содержащее отрицательных элементов и удовлетворяющее условию: для любого $b(\lambda) \in K$, $\alpha b(\lambda) \in K$, гд $\alpha \geqslant 0$.

Поскольку функции $b(\lambda)$ удовлетворяют этому требованию то они образуют положительный конус K линейного пространства.

Как уже отмечалось, функции $b(\lambda)$ являются измеримым физическими величинами, поэтому каждой из них можно поставить в соответствие некоторое число-норму $\|b\|$. Однако в линейном пространстве норма может быть введена различным способом, который выбирается исходя из конкретных задач исследования.

Для нас решающим обстоятельством является то, что мощность светового потока, воздействующего на избирательную систему (которой, в частности, является и орган зрения) с спектральной характеристикой $g(\lambda)$, можно определить с помощью скалярного произведения

$$(b, g) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda)\, g(\lambda)\, d\lambda, \qquad (15)$$

представляющего собой линейный функционал от функции $b(\lambda)$. Согласно теореме Рисса [4], линейный функционал, записываемый в виде скалярного произведения, может иметь место в гильбертовом пространстве, частным случаем которого является пространство функций, суммируемых с квадратом $L_2[0, 1]$.

По определению функция $b(\lambda)$ может являться элементом пространства L_2, если

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b^2(\lambda)\,d\lambda < \infty. \tag{16}$$

Так как функции $b(\lambda)$ имеют физический смысл и принимают только конечные значения, в силу конечных значений энергий, их вызывающих, то в выполнении этого условия нет никаких сомнений.

Поэтому можно сказать, что множество входных сигналов, описываемых функциями $b(\lambda)$, образует положительный конус K пространства $L_2[\lambda_1, \lambda_2]$.

Заметим, что интервал $[\lambda_1, \lambda_2]$ не накладывает каких-либо дополнительных ограничений на использование понятия пространства L_2, так как его легко можно привести к виду $[0, 1]$, введя новую независимую переменную по формуле

$$\tau = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \tag{17}$$

Норма функции $b(\lambda)$ в пространстве L_2 определяется из выражения

$$\|b\| = \sqrt{\overline{b,\ b}} = \sqrt{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b^2(\lambda)\,d\lambda}, \tag{18}$$

а расстояние между двумя функциями $b_1(\lambda)$, $b_2(\lambda)$

$$\rho(b_1, b_2) = \|b_1 - b_2\| = \sqrt{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [b_1(\lambda) - b_2(\lambda)]^2 d\lambda}. \tag{19}$$

Поскольку функции $b(\lambda)$ образуют положительный конус линейного вещественного пространства, то нетрудно видеть, что все требования нормы [4] выполняются, т. е.

1) $\|b\| \geqslant 0$, причем $\|b\| = 0$ лишь тогда, когда $b(\lambda) = 0$;

2) $\|b_1 + b_2\| \leqslant \|b_1\| + \|b_2\|$;

3) $\|\alpha b\| = |\alpha| \cdot \|b\|$.

Отождествляя множество входных сигналов с положительным конусом $K \subset L_2[\lambda_1, \lambda_2]$, заметим, что такая абстракция на практике не всегда оказывается удовлетворительной, так как согласно определению конуса, если $b(\lambda) \in K$, то $\alpha b(\lambda) \in K$, каким бы большим или малым не было число α.

Содержательно это означает, что глаз человека должен различать цветовые оттенки при сколь угодно большой или малой мощности излучения. На самом деле это не так, поскольку известно, что при малых (менее 10 *нит*) и слишком больших излучениях нормальное цветовосприятие органа зрения нарушается. Более того, мощность излучения можно увеличить настолько, что глаз может выйти из строя.

Поэтому если при исследовании цветового зрения нас интересует вся область зрительных стимулов, включая ее границы, то придется отказаться от абстракции конуса и перейти к понятию выпуклого множества.

Множество M, являющееся подмножеством линейного пространства (в частности пространства L_2), называется выпуклым, если для любых двух его элементов $b_1(\lambda)$, $b_2(\lambda)$ выполняется условие $mb_1(\lambda) + (1 - m) b_2(\lambda) \in M$ $(0 \leqslant m \leqslant 1)$, т. е. все точки отрезка, соединяющего эти элементы, также принадлежат множеству M.

Анализ входных сигналов органа зрения показывает, что их совокупность действительно образует выпуклое множество, поэтому если цветовое зрение исследуется на всем диапазоне зрительных стимулов, то следует пользоваться именно этой их моделью, которая является наиболее общей, хотя и наиболее сложной. С помощью такой модели можно искусственно ограничить любую область множества входных сигналов и проводить исследования с излучениями, входящими именно в данную область и не выходящими за ее границы.

Если же такое исследование проводится на довольно обширной области множества функций $b(\lambda)$, однако вопрос о границах этого множества нас не интересует, поскольку заведомо известно, что зрительные стимулы находятся внутри области нормального цветовосприятия и на достаточном удалении от ее границ, то можно предположить, что эти границы находятся в бесконечности. Тогда целесообразно воспользоваться моделью конуса, как более простой и удобной.

Вопрос об использовании той или иной абстракции множества входных сигналов зависит от конкретных условий и задач исследования цветового зрения человека.

На практике представляет интерес также модель множества входных сигналов в виде всего пространства L_2. Применение ее целесообразно в том случае, если исследуется сравнительно небольшая область зрительных стимулов в непосредственной близости от некоторого фиксированного излучения, спектр которого для всех длин волн светового диапазона имеет значения, достаточно удаленные от нуля. К таким излучениям относятся, например, свет солнца, лампочки накаливания и др. При небольших вариациях вблизи заданного излучения мы никогда не дойдем до пределов множества входных сигналов ни в одном из направлений. Поэтому можно принять, что это множество неограниченно распространяется во все стороны от выбранной точки. В таком случае целесообразно принять данное фиксированное излучение за нуль отсчета, а отклонения других излучений от заданного использовать в качестве математической характеристики входных сигналов органа зрения, которые можно записать в виде

$$b(\lambda) = b'(\lambda) - b^*(\lambda), \tag{20}$$

где $b^*(\lambda)$ — фиксированное излучение, принятое за нуль отсчета; $b'(\lambda)$ — излучение из его окрестности; $b(\lambda)$ — математическая характеристика входных сигналов органа зрения.

Схематично эти сигналы показаны на рис. 3.

Нетрудно убедиться, что при таком определении зрительных стимулов все требования линейного нормированного пространства, приведенные ранее, будут выполняться и их можно рассматривать как элементы всего пространства $L_2[\lambda_1, \lambda_2]$. Такая модель входных сигналов оказывается наиболее простой, и поэтому, если позволяют условия, ее удобно использовать при исследовании цветового зрения.

Итак, мы установили, что в зависимости от конкретных условий входные сигналы органа зрения можно рассматривать как элементы выпуклого множества $M \subset L_2[\lambda_1, \lambda_2]$, положительного конуса $K \subset L_2[\lambda_1, \lambda_2]$ и всего пространства $L_2[\lambda_1, \lambda_2]$. Отметим иерархическую структуру этих множеств.

Из определений каждой из них очевидно, что наиболее общими свойствами обладают элементы выпуклого множества, затем идет положительный конус и далее — все пространство L_2. Отсюда следует, что свойства выпуклого множества $M \subset L_2$ могут распространяться на элементы положительного конуса $K \subset L_2$ и всего пространства $L_2[\lambda_1, \lambda_2]$, однако обратное утверждение не имеет места, поскольку если элементы выпуклого множества $M \subset L_2$ должны обязательно удовлетворять требованиям элементов пространства L_2, то для элементов всего пространства L_2 не обязательны требования выпуклого множества.

Это же можно сказать и об элементах положительного конуса. Указанные обстоятельства обязывают нас дифференцированно подходить к построению математической модели спектральной чувствительности органа зрения человека, учитывая различные свойства множеств входных сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schrodinger E. Grundlinien einer Theorie der Farbenmetric im Tagessehen.— «Ann. d. Phys.» 1920, Bd. 63, S. 397—456, 481—520.
2. Шабанов-Кушнаренко Ю. П. Аксиоматическое построение модели цветового зрения.— В кн.: Проблемы бионики. Вып. 4., Харьков, 1970, с. 30—50.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1972. 496 с.
4. Шульгин И. В., Лопатченко Б. К., Пильщиков Б. В. Математическое моделирование монокулярного зрительного восприятия. В кн.: Проблемы бионики. Вып. 9, Харьков, 1972, с. 40—44.
5. Функциональный анализ. Из серии «Справочная математическая библиотека», под ред. Р. Г. Крейна. М., «Наука», 1972. 544 с.

Поступила 26 августа 1976 г.