ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ОДНОЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Э. А. Дедиков, В. А. Забродский, Ю. Б. Максимов

Харьков

Задачи на экстремум при наличии ограничений на переменные — это большой класс математических задач, широко применяющихся в приложениях за последние десятилетия. К настоящему времени на основе функционального анализа в целом создана математическая теория данных задач. Получены весьма общие результаты, касающиеся существования и единственности экстремума, достаточно полно развиты методы решения, строго сформулированы условия их сходимости.

Однако вычислительный аспект указанных задач, являясь чрезвычайно важной проблемой для приложений, почти совсем не исследован. Поэтому исследователи не располагают численными результатами, с по-

мощью которых можно было бы оценить вычислительную эффективность того или иного метода для конкретного типа экстремальных задач. В тех же случаях, когда техническими условиями предъявляются дополнительные требования к экономности метода, фактически экспериментальным путем приходится находить самый подходящий метод. В этом случае, если аналитическим путем удается изучить экстремальные свойства оптимизируемой функции, объем работы значительно уменьшается.

Изложим полученные таким путем результаты для одной задачи математического программирования, иллюстрирующей процесс выбора оптимальной производственной программы машиностроительного предприятия [1].

Требуется максимизировать целевую функцию

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2}{b_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j} \tag{1}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i; \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ &x_j \geqslant 0; \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}\right\} \bar{\Omega}. \tag{2}$$

(3)

Здесь матрица $\|a_{ij}\|$ положительно полуопределенная.

Из непрерывности функции $F(X)$ (рассматриваем неотрицательный ортант без точки $X = 0$, так как она явно неоптимальна), а также ограниченности и замкнутости множества $\bar{\Omega}$ следует существование глобального максимума $F(X)$ на $\bar{\Omega} \subset E_n$.

Далее для задачи (1) — (3) докажем следующие утверждения.

1. На $\bar{\Omega} \subset E_n$ функция $F(X)$ строго вогнута. Требуется показать, что для любых X, $Y \in \bar{\Omega}$, $X \neq Y$ справедливо неравенство

$$F\left(\frac{X+Y}{2}\right) > \frac{F(X) + F(Y)}{2}. \tag{4}$$

Функция (1) легко преобразуется к виду

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} x_j\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i a_{ij}}{b_i}\right) + 2\sum_{i=1}^{m} f_i - \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i b_i}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j}. \tag{5}$$

Подставив нелинейный член (5) в (4) и перенеся все слагаемые в левую часть, приходим к неравенству

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{f_i b_i}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j} + \frac{f_i b_i}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j} - \frac{2f_i b_i}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j}\right) > 0.$$

Сделав обозначения $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = A_i(X)$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = A_i(Y)$ и проведя элементарные преобразования над левой частью, получим

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{f_i b_i [A_i(X) - A_i(Y)]^2}{2A_i(X)\,A_i(Y)\,[A_i(X) + A_i(Y)]} > 0.$$

Последнее верно, так как из условия $X \neq Y$ следует $A_i(X) \neq A_i(Y)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, а положительная полуопределенность матрицы $\|a_{ij}\|$ и

ограничения на аргументы $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ означают положительность знаменателей суммы. Далее ввиду того, что $\bar{\Omega} \subset \{X \mid x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \ldots, n\}$, (4) справедливо для нелинейного члена (5) на $\bar{\Omega}$. Но линейная комбинация вогнутой (линейной) и строго вогнутой функции суть строго вогнутая функция [2]. Утверждение доказано.

Однако любой локальный максимум строго вогнутой функции на выпуклом множестве (в нашем случае — на выпуклом многограннике) является одновременно и глобальным. Следовательно, к задаче (1) — (3) применимы локальные методы поиска.

2. Глобальный максимум функции $F(X)$ достигается на границе множества $\bar{\Omega}$. Иначе, $X^* \in \Gamma$, где $F(X^*) = \max\limits_{X \in \bar{\Omega}} F(X)$; Γ — граница $\bar{\Omega}$.

Доказательство. $\bar{\Omega}$ — замыкание некоторого открытого множества Ω, т. е.

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma. \tag{6}$$

Рассмотрим точку $X \neq 0$, $X \in \Omega$. Построим луч $\varphi(\lambda) = (x_1, \ldots, x_k + \lambda, \ldots, x_n)$, k — произвольное. Легко заметить, что для тех i для которых $a_{ik} \neq 0$, существует такое значение λ_i, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + a_{ik} \lambda_i = b_i.$$

Из неотрицательности a_{ik} следует, что $\lambda_i > 0$, если оно существует $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Выберем $\lambda^* = \min\limits_i \lambda_i$ и построим точку $Y = (x_1, \ldots, x_k + \lambda^*, \ldots, x_n)$. Нетрудно заметить, что $Y \in \Gamma$.

Покажем, что справедливо неравенство

$$F(Y) - F(X) > 0. \tag{7}$$

Подставив в левую часть неравенства (7) выражение для $F(X)$ в виде (5) и отбросив заведомо положительные слагаемые, после преобразований получим

$$F(Y) - F(X) > \lambda^* \sum_{i=1}^{m} f_i a_{ik} \left[\frac{b_i}{A_i(X)\,(A_i(X) + a_{ik}\lambda^*)} - \frac{1}{b_i} \right].$$

Далее анализируем только одно слагаемое получившейся суммы:

$$\lambda^* f_i a_{ik} \frac{b_i^2 - A_i(X)\,[A_i(X) + a_{ik}\lambda^*]}{b_i A_i(X)\,[A_i(X) + a_{ik}\lambda^*]} = \lambda^* f_i a_{ik} \frac{b_i^2 - A_i(X)\,A_i(Y)}{b_i A_i(X)\,A_i(Y)}.$$

Знаменатель дроби положителен ввиду неотрицательности всех величин, входящих в него. Числитель также положителен, т. е. $b_i^2 - A_i(X)\,A_i(Y) > 0$, так как $A_i(X) < b_i$, $A_i(Y) \leqslant b_i$ (равенство только для одного i). Но сумма положительных слагаемых положительна, т. е. доказано неравенство (7), а это означает, что $X^* \notin \Omega$, поскольку для любой точки $X \in \Omega$ можно указать перемещение, увеличивающее целевую функцию $F(X)$. Тогда, учитывая (6) и то, что $X^* \in \bar{\Omega}$, заключаем: $X^* \in \Gamma$. Утверждение доказано.

Установленные свойства функции $F(X)$ на $\bar{\Omega} \subset E_n$ позволили сделать вывод, что для решения задач (1) — (3) применимы только те локальные методы поиска экстремума, которые «работают» на границе допустимой области. В частности, неработоспособным оказывается метод максимизации по группам переменных (Гаусса — Зейделя), прямой градиентный метод, случайный поиск с адаптацией и некоторые другие.

Для сравнения численной эффективности алгоритмов на ЭВМ реализован метод возможных направлений (с нормировкой № 4) [2] и метод

П 366503

случайного поиска с возвратом при неудачном шаге [3]. Выбор первого объясняется гладкостью $F(X)$ и линейностью ограничений, что существенно облегчает поиск возможного направления в граничных точках $\bar{\Omega}$.

Проведено многократное испытание алгоритмов из разных начальных точек, разыгрываемых равновероятно в $\bar{\Omega}$. Сравнение алгоритмов по времени, затрачиваемом на поиск экстремума, показало предпочтительность случайного поиска в среднем. Этот факт объясняется вытянутостью эллипсоидов уровня, что требует многократного вычисления градиента, а также трудоемкостью решения линейной задачи на границе в методе возможных направлений. Кроме того, время поиска этим методом существенно зависит от начальной точки. Однако эти выводы, по-видимому, нельзя распространять на случай большой размерности пространства переменных, поскольку с ростом числа переменных и ограничений весьма затрудняется попадание очередной случайной точки в конус возможных направлений.

В алгоритме случайного поиска признаком конца счета служило содержимое счетчика неудачных попыток. Эта величина подбиралась экспериментально. Время счета составляло в среднем 5—6 *мин*, что почти вдвое меньше, чем для метода возможных направлений.

Для моделирования алгоритмов использовался следующий пример:

$$A = \begin{Vmatrix} 0{,}09 & 0{,}024 & 0{,}14 & 0{,}005 & 0 & 0{,}005 \\ 1{,}4 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}13 & 0{,}02 & 0{,}01 \\ 1{,}8 & 0{,}4 & 0{,}43 & 0{,}214 & 0{,}08 & 0{,}2 \end{Vmatrix}$$

$C = (4{,}5;\ 2{,}7;\ 3{,}7;\ 0{,}6;\ 0{,}63;\ 0{,}2);$

$B = (37;\ 624;\ 481);\quad F = (15{,}5;\ 50;\ 38{,}4).$

В результате решения получен оптимальный вектор $X^* = (15{,}0;\ 254{,}19;\ 445{,}28;\ 179{,}67;\ 358{,}21;\ 560{,}25);\ F(X^*) = 2801{,}98.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. А. Дедиков, В. А. Забродский, Ю. Б. Максимов. Оптимизация производственной программы предприятия модифицированным методом случайного поиска. Тезисы докл. научн. конф. «Применение математических методов в управлении производством», Львов, май, 1969.

2. Г. Зойтендейк. Методы возможных направлений. Изд-во иностр. лит., М., 1963.

3. Л. А. Растригин. Статистические методы поиска. Изд-во «Наука», М., 1968.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ОРГАНИЗАЦИЮ СБОРОЧНОГО КОНВЕЙЕРНОГО ПРОИЗВОДСТВА, НА СТАДИИ РАЗРАБОТКИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Ю. В. Шагаев, Ю. В. Переверзев

Харьков

Одной из наиболее прогрессивных форм организации массового выпуска продукции в машиностроении является конвейеризация процессов сборки выпускаемых изделий. Как известно, сборочный конвейер, осуществляющий принудительное перемещение каждого собираемого изделия вдоль рабочих мест, представляет собой непрерывно-поточную производственную линию с жестко регламентированным тактом выпуска готовой продукции. Так как при нормальной работе на сборочном конвейере в любой момент времени одновременно установлено столько единиц собираемой продукции, сколько имеется на его рабочей ветви