СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЗАЩИТЫ ОТ УДАРОВ

Э. М. Болычевцев
Харьков

Рассматривается задача построения системы амортизации, защищающей объект от недопустимо высоких перегрузок и имеющей наименьший возможный свободный ход. Упрощенная постановка задачи такова.

1. Дано уравнение движения амортизируемого объекта

$$\ddot{x} + u(x, \dot{x}) = f(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ — смещение объекта относительно основания;

$u(x, \dot{x})$ — характеристика амортизатора;

$f(t)$ — известный на $[t_0, t_1]$ закон изменения перегрузки основания.

Требование ограниченности абсолютного ускорения объекта соответствует условию

$$|u(x, \dot{x})| \leqslant u_0, \tag{2}$$

где u_0 — заданная положительная постоянная.

Наряду с (1) рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = f(t) - u(t), \tag{1'}$$

где $f(t)$ — та же функция, что и в (1), а $u(t)$ — управление.

Рассмотрим функционал

$$J(u) = \max_{t\in[t_0,t_1]} |x(t)|, \tag{3}$$

где $x(t)$ — решение (1'), удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$x(t_0) = x_0, \ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0. \tag{4}$$

Требуется: а) найти наименьшее значение функционала (3) $\Delta = \min_u \times$ $\times \max_t |x(t)|$ на классе кусочно-непрерывных и ограниченных по модулю управлений $|u(t)| \leqslant u_0$; б) среди кусочно-непрерывных функций $u(x, \dot{x})$, удовлетворяющих условию (2), выбрать такую $u^*(x, \dot{x})$ при которой решение (1) с начальными условиями (4) удовлетворяет на $[t_0, t_1]$ неравенству

$$|x(t)| \leqslant \Delta. \tag{5}$$

Величина Δ — теоретически возможный минимум свободного хода амортизатора. Функцию $u^*(x, \dot{x})$, реализующую этот минимум, назовем оптимальной характеристикой амортизатора. Вопрос существования такой функции $u^*(x, \dot{x})$ при произвольном возмущении $f(t)$ мы не рассматриваем.

Наибольшую актуальность поставленная задача приобретает при возмущениях $f(t)$ ударного типа. Случай одиночного удара в сходной постановке приведен в [1, 2]. Ниже рассматривается случай серии периодических ударов (мгновенных и конечной длительности).

2. Пусть $f(t)$ — серия периодически повторяющихся мгновенных импульсов (без ограничения общности период следования импульсов можно считать равным единице):

$$f(t) = \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n).$$

Рассматриваем ее на $(0, \infty)$ (в этом случае при необходимости можно считать, что в управлении (3) вместо max берется sup); параметр σ_0 положителен. Пусть начальные условия нулевые.

Найдем величину Δ. Рассматривая график функции $F(t) = \int_0^t f(t)\,dt = \sigma_0([t] + 1)$ ($[\ldots]$ — знак целой части), прежде всего заключаем, что для существования конечного значения Δ необходимо выполнение условия $\sigma_0 < u_0$. Предполагаем, что оно выполнено. Далее видим, что функция $u^*(t)$, доставляющая минимум функционалу (3), должна сохранять постоянное значение, равное u_0, на отрезке $[0, t^*]$, где $t^* = \frac{(n+1)\sigma_0}{u_0}$, а n определяется из условия

$$\frac{2(n+1)+1}{2(n+1)} \leqslant \frac{u_0}{\sigma_0} < \frac{2n+1}{2n}.$$

На остальном промежутке (t^*, ∞) функция $u^*(t)$ определяется неоднозначно и легко может быть выписана. Сама величина минимума функционала (3) Δ определяется следующим образом:

$$\Delta = \int_0^{t^*} (F(t) - u_0 t)\,dt = \frac{n+1}{2}\sigma_0\left(\frac{n+1}{u_0}\sigma_0 - n\right). \tag{6}$$

Переходим к нахождению оптимальной характеристики $u^*(x, \dot{x})$. Будем искать ее в виде

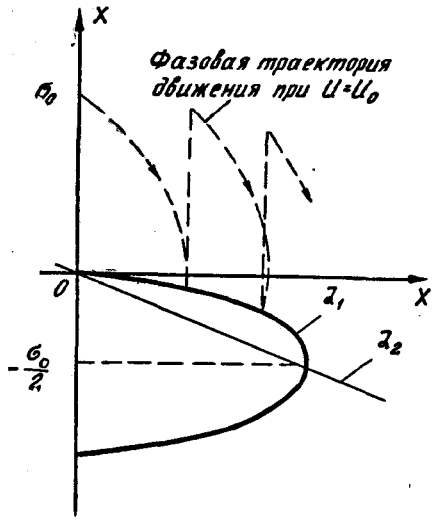
$$u^*(x, \dot{x}) = u_0 \operatorname{sign} \varphi(x, \dot{x}), \tag{7}$$

где $\varphi(x, \dot{x})$ — подлежащая определению функция. Рассмотрим фазовую картину движения. Если $u^*(x, \dot{x}) = u_0$, то в промежутках между моментами действия импульсов изображающая точка движется по кривой семейства

$$x + \frac{\dot{x}^2}{2u_0} = C, \tag{8}$$

а при $u^*(x, \dot{x}) = -u_0$ по кривой семейства

$$x - \frac{\dot{x}^2}{2u_0} = C. \tag{9}$$



Фазовая траектория движения при $u = u_0$.

В моменты приложения импульсов изображающая точка мгновенно смещается на величину σ_0 в положительном направлении оси $0\dot{x}$. Возможны также скользящие режимы и остановки. Как отмечено выше, в некоторый начальный промежуток времени обязательно должно быть $u^* = u_0$. Напишем параметрические уравнения фазовой траектории (1) при $u(x, \dot{x}) = u_0$. Интегрируя (1), находим

$$\dot{x}(t) = \int_0^t (f(t) - u_0)\, dt = \sigma_0([t] + 1) - u_0 t;$$

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(t)\, dt = \sigma_0([t] + 1)\left(t - \frac{[t]}{2}\right) - \frac{u_0 t^2}{2}.$$

Отсюда можно заключить, что к моментам приложения импульсов изображающая точка попадает на параболу (линия Z_1 на рисунке)

$$2(\sigma_0 - u_0)x - (\dot{x}^2 + \sigma_0 \dot{x}) = 0. \tag{10}$$

Рассмотрим прямую Z_2, проходящую через начало координат и вершину параболы (10). Ее уравнение имеет вид

$$\dot{x} + \alpha x = 0, \tag{11}$$

где

$$\alpha = \frac{4(u_0 - \sigma_0)}{\sigma_0}.$$

Анализ фазовой картины движения показывает, что первая встреча изображающей точки с прямой Z_2 происходит всегда при значении $\dot{x} \leqslant -\frac{\sigma_0}{2}$. Поэтому функцию $\varphi(x, \dot{x})$ в (7) можно определить следующим образом:

$$\varphi(x, \dot{x}) = \dot{x} + \alpha x.$$

Действительно, изображающая точка после попадания на линию переключения (11) будет двигаться либо вдоль нее в режиме скольжения, либо по кривой семейства (9) в сторону начала координат и после

воздействия очередных импульсов попадать всякий раз на кривую семейства (8) со значением постоянной C, не превосходящим значения величины Δ. При этом изображающая точка остается в правой полуплоскости во все время движения, т. е. (5) выполнено. Таким образом, оптимальной характеристикой амортизатора является

$$u^*(x, \dot{x}) = u_0 \operatorname{sign}(\dot{x} + \alpha x). \qquad (12)$$

Из соображений, аналогичных вышеприведенным, следует, что характеристика (12) будет оптимальной и в том случае, если параметр α изменяется в некоторых пределах

$$\frac{4(u_0 - \sigma_0)}{\sigma_0} \leqslant \alpha \leqslant \frac{2(2u_0 - \sigma_0)}{\sigma_0}$$

(для некоторых соотношений между u_0 и σ_0 верхняя граница может быть несколько ниже).

3. Пусть теперь $f(t)$ представляет серию прямоугольных периодических импульсов

$$f(t) = \sigma_1 \sum_{n=0}^{\infty} [1(t - n) - 1(t - n - \tau)].$$

Здесь $1(\ldots)$ — единичная ступенчатая функция; $0 < \tau < 1$; $0 < \sigma_1\tau < u_0$. Пусть начальные условия нулевые.

Для нахождения величины Δ получаем, аналогично п. 2, следующие формулы:

$$\Delta = \frac{n+1}{2}\sigma_0\left(\frac{n+1}{u_0}\sigma_0 - n - \tau\right),$$

где n определяется из условия

$$\frac{2(n+1)+1}{2(n+1)+\tau} \leqslant \frac{u_0}{\sigma_1\tau} < \frac{2n+1}{2n+\tau}.$$

Оптимальная характеристика $u^*(x, \dot{x})$ снова может быть найдена на основании анализа фазовых траекторий движения.

Она может быть выбрана в виде (12), причем границы для параметра α, гарантирующие выполнение (5), следующие:

$$\frac{4(u_0 - \sigma_1\tau)}{\sigma_1\tau(1-\tau)} \leqslant \alpha \leqslant \frac{2(2u_0 - \sigma_1\tau)}{\sigma_1\tau(1-\tau)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Гурецкий. О предельных возможностях защиты оборудования от воздействия ударов. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.

2. М. З. Коловский. Нелинейная теория виброзащитных систем. Изд-во «Наука», М., 1966.

УСТАНОВКА ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ РЕЛЕ

В. А. Михайлов, О. В. Хомицкий, А. А. Петрушин, Я. Л. Зайцев

Харьков

В процессе лабораторных испытаний неавтоматизированное измерение параметров реле, работающих в различных режимах и внешних воздействиях, весьма трудоемко. Для получения вполне достоверных данных оператор должен проводить значительное количество опытов и манипуляций с аппаратурой, считывать показания приборов, фиксировать ре-