

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інфокомунікацій
(повна назва)

Кафедра інформаційно-мережної інженерії
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Дослідження методу апроксимації нелінійних характеристик електронних елементів радіотехнічних пристроїв в інформаційних мережах зв'язку
(тема)

Виконав:
здобувач 2 року навчання, групи ІМІМ-23-1
Москаленко Є.О.
(прізвище, ініціали)

Спеціальність 172 Електронні комунікації та радіотехніка
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна
Освітня програма інформаційно-мережна інженерія
(повна назва освітньої програми)

Керівник доцент Бондар Д.В.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри _____
(підпис)

Безрук В.М.
(прізвище, ініціали)

2025 р.

Не містить відомостей заборонених до відкритого публікування.

Студент / Москаленко Є.О. /

Керівник / Бондар Д.В. /

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет _____ *інфокомунікацій* _____
Кафедра _____ *інформаційно-мережної інженерії* _____
Рівень вищої освіти _____ *другий (магістерський)* _____
Спеціальність _____ *172 Електронні комунікації та радіотехніка* _____
(код і повна назва)
Тип програми _____ *освітньо-професійна* _____
Освітня програма _____ *інформаційно-мережна інженерія* _____
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри _____
(підпис)
«_____» _____ 20__ р.

Дослідження зв'язку

ЗАВДАННЯ

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві _____ *Москаленку Єгору Олександровичу* _____
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи _____ *Дослідження методу апроксимації нелінійних характеристик електронних елементів радіотехнічних пристроїв в інформаційних мережах зв'язку* _____

затверджена наказом університету від 28 жовтня 2024 р. № 1148-Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 06 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи _____
Огляд методів апроксимації функціональних залежностей, що подані табличними даними; Опис методу апроксимації характеристик сплайнами Без'є; Програмний пакет реалізації апроксимації вольтамперних характеристик радіоелектронних елементів; Результати випробувань програмного пакету.

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

Вступ;

1. Основи побудови електронних пристроїв інформаційних мереж зв'язку;

2. Огляд методів апроксимації характеристик;

3. Спосіб апроксимації характеристик сплайнами Без'є;

4. Програмна реалізація апроксимації характеристик сплайнами Без'є;

Висновки.

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій (п.5 включається до завдання за рішенням випускової кафедри) _____

Слайди презентації: оглядові слайди; слайди пояснення способу; слайди розробки методу; слайди результатів випробування.

6. Консультанти розділів роботи (п.6 включається до завдання за наявності консультантів згідно з наказом, зазначеним у п.1)

Найменування розділу	Консультант (посада, прізвище, ім'я, по батькові)	Позначка консультанта про виконання розділу	
		підпис	дата
Основна частина	доцент Бондар Д.В.		

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Ознайомлення з завданням	28.10	виконано
2	Пошук джерел за темою та ознайомлення	29.10 – 07.11	виконано
3	Розробка ввідної частини	08.11 – 17.11	виконано
4	Розробка огляду мат. методів апроксимації функцій	18.11 – 27.11	виконано
5	Розробка методу апроксимації характеристик сплайнами	28.11 – 07.12	виконано
6	Створення та випробування програмної реалізації методу апроксимації характеристик нелінійних елементів сплайнами	08.12 – 20.12	виконано
7	Розробка та виконання текстової частини	21.12 – 31.12	виконано
8	Розробка графічної частини	30.12 – 05.01	виконано
9	Надання пояснювальної записки на рецензування та для захисту	06.01	виконано

Дата видачі завдання 28 жовтня 2024 р.

Здобувач _____
(підпис)

Керівник роботи _____
(підпис)

доцент Бондар Д.В.
(посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: сторінок – 72, рисунків – 27, джерел – 15, додатків – 1.

ІНФОРМАЦІЙНА МЕРЕЖА ЗВ'ЯЗКУ, НЕЛІНІЙНИЙ ЕЛЕМЕНТ, ВОЛЬТ-АМПЕРНА ХАРАКТЕРИСТИКА, АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ, АНАЛІТИЧНИЙ ВИРАЗ, СПЛАЙНИ БЕЗ'Є, ПРОГРАМНИЙ МОДУЛЬ.

Розглянуті методи апроксимації характеристик нелінійних елементів радіоелектронних пристроїв, що застосовуються в інформаційних мережах зв'язку. Основну увагу приділено методу апроксимації характеристик за допомогою кубічних сплайнів Без'є. Розглянуто способи формування аналітичних виразів для характеристик на підґрунті непараметричних та параметричних сплайнів.

Розроблено програмний модуль, що дозволяє проводити апроксимацію характеристик елементів за парами табличних даних, отриманих з довідників або шляхом вимірювань. Проведено комп'ютерне моделювання. Отримано результати, які підтверджують коректність виконаної роботи.

THE ABSTRACT

Explanatory slip: pages – 72, figures – 27, sources – 15, appendices – 12.

INFORMATION COMMUNICATION NETWORK, NONLINEAR ELEMENT, VOLTAGE-AMPERE CHARACTERISTIC, APPROXIMATION OF FUNCTIONS, ANALYTICAL EXPRESSION, BEZIER SPLINES, SOFTWARE MODULE.

Methods of approximating the characteristics of nonlinear elements of radio electronic devices used in information communication networks are considered. The main attention is paid to the method of approximating the characteristics using cubic Bezier splines. Methods of forming analytical expressions for the characteristics on the basis of nonparametric and parametric splines are considered.

A software module has been developed that allows approximating the characteristics of elements by pairs of tabular data obtained from reference books or by measurements. Computer modeling has been carried out. Results have been obtained that confirm the correctness of the work performed.

ЗМІСТ

	С.
Перелік умовних скорочень.....	7
Вступ.....	8
1 Основи побудови електронних пристроїв інформаційних мереж зв'язку.....	9
2 Огляд методів апроксимації характеристик	14
3 Посіб апроксимації характеристик сплайнами Без'є.....	25
4 Програмна реалізація апроксимації характеристик сплайнами Без'є.....	44
Висновки.....	58
Перелік джерел.....	59
Додаток А Слайди презентації	61

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

ВАХ	—	вольт-амперна характеристика;
ВЗ	—	вузол зв'язку;
ЛЗ	—	лінія зв'язку;
МНК	—	метод найменших квадратів;
НЕ	—	нелінійний елемент.

ВСТУП

Життєдіяльність сучасного суспільства ґрунтується на передаванні та обробці колосальних об'ємів інформації. Означені процеси реалізуються завдяки наявності сучасних високотехнологічних, надійних та універсальних технічних систем телекомунікацій, створених із застосуванням електронних елементів.

Електронні елементи розділяють на лінійні та нелінійні. Всі вони потрібні для побудови пристроїв та приладів інформаційних мереж зв'язку. В основу розподілу елементів покладено математичну залежність співвідношення струму та напруги на їхніх виводах. Якщо залежність виражається лінійною функцією, то елемент вважається лінійним. Якщо залежність виражається нелінійною функцією, то елемент вважається нелінійним.

Співвідношення для нелінійних елементів (НЕ) прийнято називати вольт-амперними характеристиками (ВАХ). Інформація про ВАХ здобувається шляхом вимірювань. Характеристики НЕ потрібні для проектування схем електронних апаратів систем зв'язку та обробки інформації.

В сучасних умовах для проектування електронних схем широко використовуються засоби комп'ютерного моделювання та проектування. Комп'ютерні методи обробки потребують наявності математичних моделей електронних елементів. Математична модель, в свою чергу, потребує аналітичної форми для опису ВАХ НЕ.

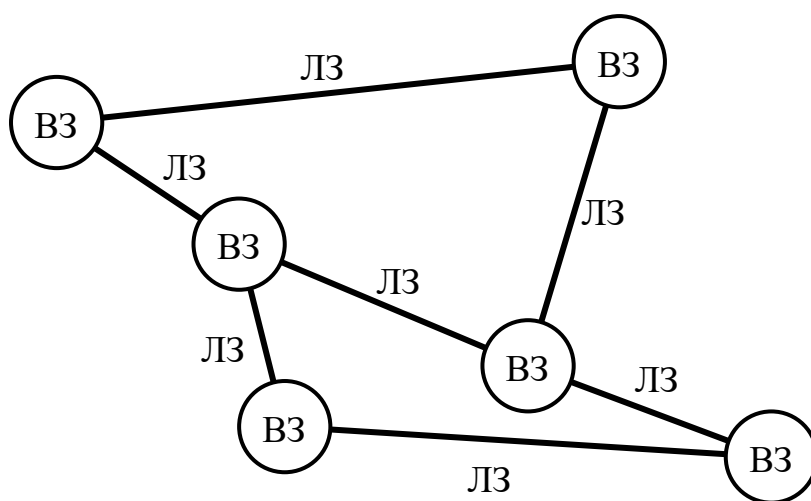
Таким чином виникає проблема переведення табличної форми уявлення ВАХ в аналітичну. Шляхом розв'язання цієї проблеми може бути застосування математичних методів апроксимації функцій.

На даний час відомо багато методів апроксимації функцій, але не існує універсального способу обрання певного методу при моделюванні тих чи інших схем. Тому треба проводити дослідження по використанню методів апроксимації ВАХ НЕ.

В даній роботі розглянуто метод апроксимації ВАХ за допомогою сплайнів Без'є, які добре зарекомендували себе в багатьох задачах проектування та моделювання технічних систем та пристроїв.

1 ОСНОВИ ПОБУДОВИ ЕЛЕКТРОННИХ ПРИСТРОЇВ ІНФОРМАЦІЙНИХ МЕРЕЖ ЗВ'ЯЗКУ

Будь яка галузь суспільного життя та економіки ґрунтується на переробці величезних обсягів інформації та вимагає потужних засобів передавання. Для передавання інформації створюються розгалужені інформаційні мережі зв'язку, які структурно складаються з вузлів зв'язку та каналів передачі-прийому (рис. 1.1).



ВЗ – вузол зв'язку;
ЛЗ – лінія зв'язку.

Рисунок 1.1 – Довільний приклад структури інформаційні мережі зв'язку

Вузли зв'язку разом з лініями зв'язку створюють середовище транспортування інформаційних повідомлень. Основою та центральною частиною середовища транспортування інформаційних повідомлень є система передачі електричних сигналів, узагальнена структурна схема якої показана на рис. 1.2.

Кожна із складових частин системи передачі також є складним радіоелектронним пристроєм. Вказані пристрої реалізують багато функції, зокрема підсилення та перетворення сигналів.

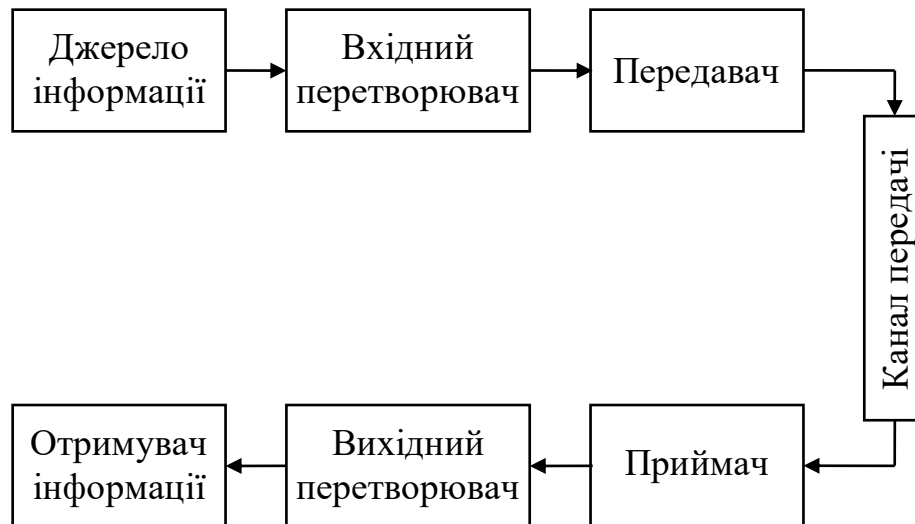


Рисунок 1.2 – Узагальнена структурна схема системи передачі

Радіоелектронні пристрої будуються з електронних елементів, які умовно можна розділили на лінійні та нелінійні. До лінійних елементів певною мірою можна віднести: резистори, конденсатори та котушки індуктивності. Нелінійні елементи в своїй більшості виготовляються з напівпровідникових матеріалів, найпоширенішими з яких є: діоди та транзистори. На основі цих елементів будують такі блоки як: підсилювачі, генератори коливань, активні фільтри, детектори, системи електроживлення тощо. На рис. 1.3 наведено схему підсилювального каскаду на біполярному транзисторі.

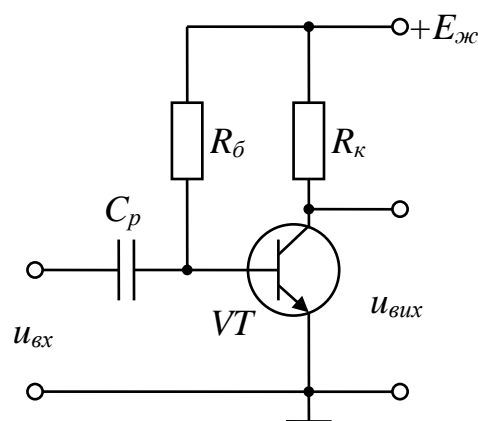


Рисунок 1.3 – Схема підсилювального каскаду на біполярному транзисторі

На рис. 1.4 наведено схему передавача на тунельному діоді

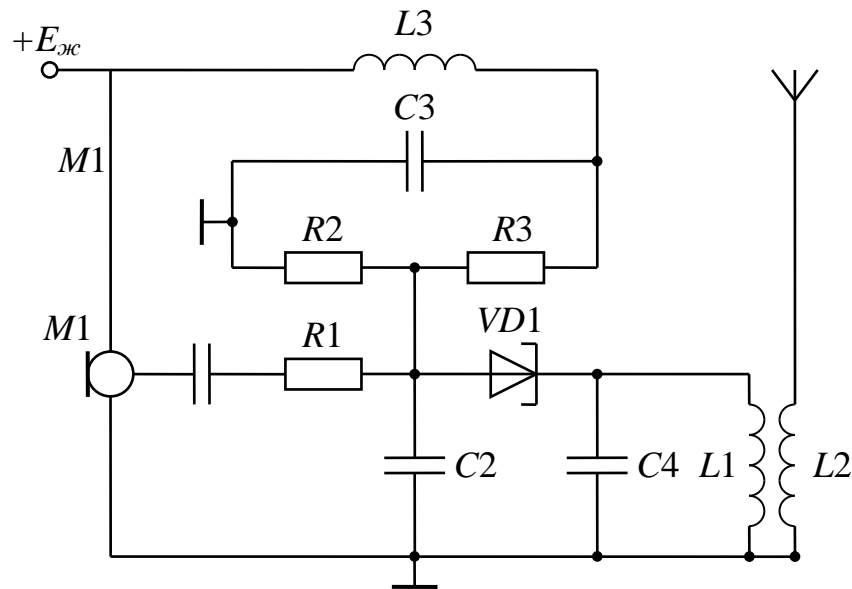


Рисунок 1.4 – Схема передавача на тунельному діоді

Функціонування нелінійних напівпровідникових елементів ґрунтується на властивостях $p-n$ переходу між напівпровідниковими частинами електронних елементів. На елементарному рівні електронний пристрій з $p-n$ переходом слід вважати двохполюсним елементом. Властивості такого елемента описують залежністю між струмом та напругою на його полюсах, яка має назву вольт-амперної характеристики (ВАХ).

Якщо ВАХ показує пряму пропорціональну залежність струму від напруги, то електронний елемент є лінійним. В цьому випадку ВАХ можна подати в аналітичному вигляді лінійною функцією. В іншому випадку ВАХ відображає нелінійну залежність та зазвичай не має точного аналітичного опису.

На практиці ВАХ реальних нелінійних електронних елементів отримують шляхом вимірювань, подають у вигляді графіків та розміщують в довідниковій літературі. Однак можна отримувати аналітичні вирази ВАХ елементів, застосувавши будь-який метод апроксимації. В результаті характеристика набуває наближеного виразу. Ступінь наближення можна регулювати математичним способом як в бік уточнення так і в бік зменшення рівня наближення.

Необхідність проведення апроксимації ВАХ нелінійних елементів обумовлена необхідністю автоматизації обрахунків при проектуванні

радіоелектронної апаратури, а також для реалізації моделювання електронних пристроїв засобами комп'ютерної техніки.

Приклад вхідної та вихідної ВАХ біполярного транзистора зображено на рис. 1.5.

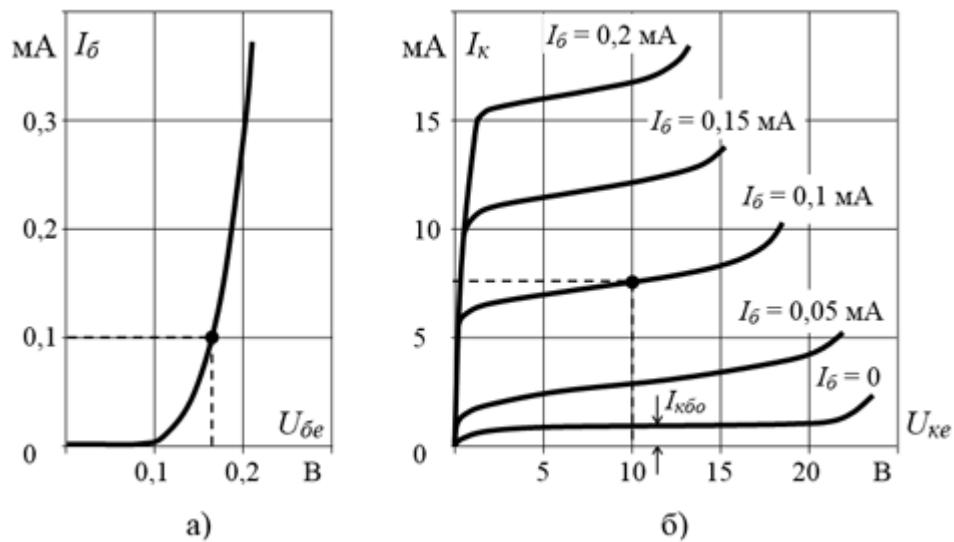


Рисунок 1.5 – Приклад вхідної та вихідної ВАХ біполярного транзистора

На рис. 1.6 зображено приклад ВАХ тунельного діода.

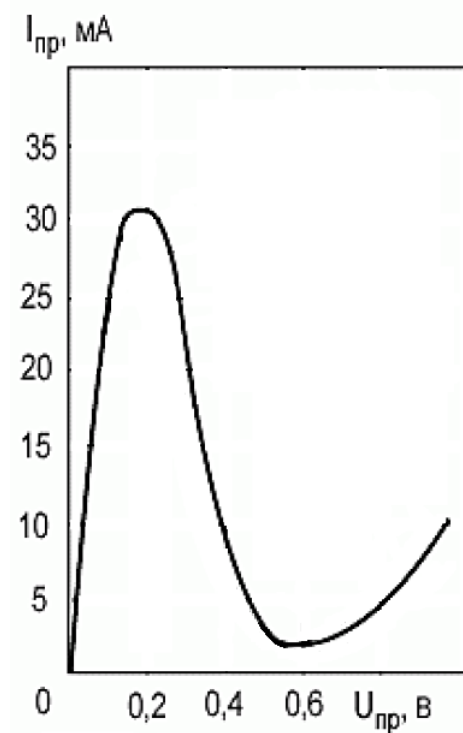


Рисунок 1.6 – Приклад ВАХ тунельного діода

Для апроксимації ВАХ слід взяти дані вимірювань з відповідної таблиці випробувань, або з графічного зображення. Таки чином треба сформувати матрицю вузлових або опорних точок для обраного методу апроксимації.

2 ОГЛЯД МЕТОДІВ АПРОКСИМАЦІЇ ХАРАКТЕРИСТИК

Проектування радіоелектронної апаратури вимагає проведення розрахунків, що ґрунтуються на використанні відповідного математичного апарату. Велика кількість розрахунків вимушена отримувати наближені результати, що виникають в результаті використання чисельних методів. Чисельні методи розглядаються як сукупність типових математичних задач. До типових задач відносять апроксимацію даних, що пропонує певне наближення.

Апроксимація функцій набуває потреби в теоретичних розробках, а також для виконання практичних розрахунків в техніці. Причина криється в тому, що для функції, яка задана таблицею, виникає нагальна потреба сформувавши аналітичний вираз. З функцією в аналітичному вигляді значно легше працювати та використовувати засоби обчислювальної техніки. Крім того у випадку складного аналітичного виразу функції корисно провести заміну на більш простий вигляд, але із збереженням важливих властивостей функції, що обробляється.

До більш простої форми апроксимуючої функції відносять форму у вигляді полінома, раціонального полінома нелінійного виду, рекурентної формули, тощо. Набрала популярності форма сплайнової апроксимації.

Зараз частіше знаходять застосування наближення даних нелінійними виразами, хоча класичні поліноми та раціональні рівномірні наближення не втрачають актуальності. Це треба пояснити здебільшого нелінійним характером фізичних процесів.

При розв'язанні великої кількості технічних задач використовують сплайн-апроксимацію функціональних залежностей. Обов'язково при цьому забезпечувати неперевищення наперед заданої величини похибки як абсолютної так і відносної в одній точці інтервалу апроксимації. Сплайнове наближення функції буде вважатися рівномірним якщо на всіх ланках сплайну максимальна похибка наближення є однаковою. В багатьох поширених випадках рівномірне наближення функціональних залежностей сплайном є оптимальним, оскільки при виборі значень вузлів апроксимації з огляду на умову рівномірності наближення при заданій кількості ланок забезпечує найменшу похибку, а якщо треба визначити похибку, то забезпечується мінімальна кількість сплайнових сегментів.

Потреба в апроксимації функцій присутня у великій кількості різноманітних технічних задач. При цьому їх можна трактувати як вивчення поведінки як реальних, так і абстрактних моделей.

Матеріалом для проведення апроксимації може виступати математична модель, що отримана як за формулою, так і у вигляді таблиці вимірювань або спостережень. В табличній формі дані відомі лише на дискретній множині аргументів. Обов'язково знадобляться відомості про значення функції в точках аргументу між табличними значеннями, які можна здобувати проведенням додаткових вимірювань або спостережень. Така можливість може бути нездійсненною або неефективною. Вихід з цієї ситуації може запропонувати застосування відповідного методу апроксимації функції при довільному значенні аргументу, спираючись на задані в таблиці дані.

Реалізація апроксимації функції передбачає: визначення координат вузлових точок з визначенням початкового вузла та вибір апроксимуючої функції, яку зручніше обрати у формі поліному.

Таким чином задача апроксимації полягає в наступному: якщо деяка функція $f(x)$ а точках аргументу x_1, x_2, \dots, x_n набуває значень y_1, y_2, \dots, y_n , то слід відновити її в буді-якій точці аргументу з безперервного інтервалу $[x_1; x_n]$. У випадку коли функція $f(x)$ не є аналітичного вигляду, то набір координат точок $(x_i; y_i \quad i = \overline{1, n})$ має назву функції, що задана у формі таблиці.

Апроксимація має за мету замінити функцію $f(x)$ на простішу функцію $g(x, a)$, яка є близькою до $f(x)$. Функція $g(x, a)$ залежить від аргументу x , а також від множини параметрів $(a_i; i = \overline{1, k})$. Функція $g(x, a)$ називається апроксимуючою. Параметри виконують роль інструменту наближення функції g до функції f .

Поширеним методом апроксимації функцій є метод найменших квадратів (МНК). Суть МНК полягає у виборі такої апроксимуючої функції, у якої сума квадратів відхилень її значень в точках визначення похідної функції є мінімальною. Практика застосування МНК передбачає обрання в якості апроксимуючої функції поліному n -го ступеню:

$$g(x, a) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n.$$

де a_i – коефіцієнти полінома.

Тоді базове співвідношення МНК набуває вигляду:

$$Q(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^m [f(x_i) - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_{n-1} x_i^{n-1} + a_n x_i^n)]^2 \rightarrow \min. \quad (2.1)$$

Таким чином, при обранні апроксимуючого поліному треба розрахувати сукупність його коефіцієнтів a_i , $i = \overline{0; n}$, які задовольняють умові (2.1). Щоб провести цей розрахунок треба всі приватні похідні співвідношення $Q(a_0, a_1, \dots, a_n)$ по коефіцієнтах a_i прирівняти до нуля.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a_0} Q(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial a_1} Q(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial a_2} Q(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0; \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial a_n} Q(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0. \end{cases}$$

В результаті утвориться система лінійних рівнянь, де невідомими величинами будуть коефіцієнти апроксимуючого поліному a_i , $i = \overline{0; n}$, а відомими коефіцієнтами системи абсциси функції, що апроксимується x_k , $k = \overline{0; m}$.

За допомогою пакету MathCad розглянемо приклади з поліномом першого та другого степеня в якості апроксимуючої функції.

Апроксимація лінійним поліномом:

$$xy := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Матриця координат табличних точок функції, що інтерполюється

Визначити вигляд апроксимуючого поліному $f(a_0, a_1, x) := a_0 + a_1 \cdot x$

Визначити функцію квадратичної різниці $\zeta(a_0, a_1) := \sum_{i=0}^{\text{rows}(xy)-1} \left[\binom{\langle 1 \rangle}{xy}_i - f \left[a_0, a_1, \binom{\langle 0 \rangle}{xy}_i \right] \right]^2$

Розрахувати похідну від функції квадратичної різниці за коефіцієнтом a_0 $d\zeta_0(a_0, a_1) := \frac{d}{da_0} \zeta(a_0, a_1)$

Розрахувати похідну від функції квадратичної різниці за коефіцієнтом a_1 $d\zeta_1(a_0, a_1) := \frac{d}{da_1} \zeta(a_0, a_1)$

Формування матриці лінійної системи рівнянь для розрахунку коефіцієнтів апроксимуючої функції

$$M := \begin{pmatrix} d\zeta_0(1,0) - d\zeta_0(0,0) & d\zeta_0(0,1) - d\zeta_0(0,0) \\ d\zeta_1(1,0) - d\zeta_1(0,0) & d\zeta_1(0,1) - d\zeta_1(0,0) \end{pmatrix} \text{ коефіцієнтів апроксимуючої}$$

Формування вектору вільних членів лінійної системи рівнянь для розрахунку коефіцієнтів апроксимуючої функції

$$v := \begin{pmatrix} -d\zeta_0(0,0) \\ -d\zeta_1(0,0) \end{pmatrix}$$

Розрахунок коефіцієнтів апроксимуючої функції $\alpha := \text{Isolve}(M, v)$

Створення апроксимуючої функції $z(\chi) := \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \chi$

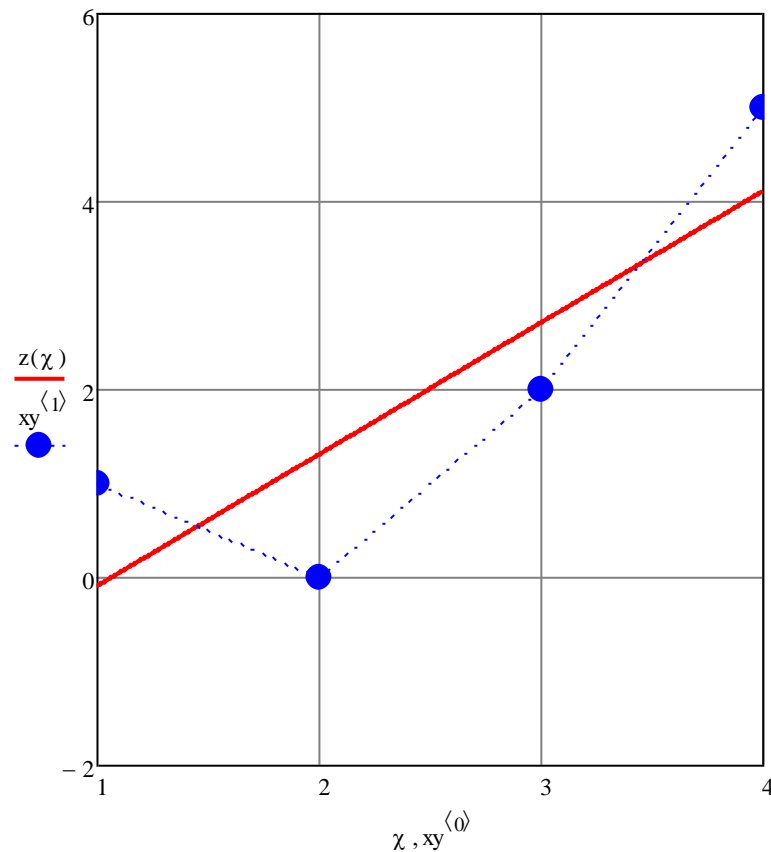


Рисунок 2.1 – Апроксимація лінійним поліномом

Апроксимація квадратичним поліномом:

$$xy := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Матриця координат табличних точок функції, що інтерполюється

Визначити вигляд апроксимуючого поліному $f(a_0, a_1, a_2, \chi) := a_0 + a_1 \cdot \chi + a_2 \cdot \chi^2$

Визначити функцію квадратичної різниці $\zeta(a_0, a_1) := \sum_{i=0}^{\text{rows}(xy)-1} \left[\left(xy^{(1)} \right)_i - f \left[a_0, a_1, \left(xy^{(0)} \right)_i \right] \right]^2$

Розрахувати похідну від функції квадратичної різниці за коефіцієнтом a_0 $d\zeta_0(a_0, a_1, a_2) := \frac{d}{da_0} \zeta(a_0, a_1, a_2)$

Розрахувати похідну від функції квадратичної різниці за коефіцієнтом a_1 $d\zeta_1(a_0, a_1, a_2) := \frac{d}{da_1} \zeta(a_0, a_1, a_2)$

Розрахувати похідну від функції квадратичної різниці за коефіцієнтом a_2 $d\zeta_2(a_0, a_1, a_2) := \frac{d}{da_2} \zeta(a_0, a_1, a_2)$

Формування матриці лінійної системи рівнянь для розрахунку коефіцієнтів апроксимуючої функції

$$M := \begin{pmatrix} d\zeta_0(1, 0, 0) - d\zeta_0(0, 0, 0) & d\zeta_0(0, 1, 0) - d\zeta_0(0, 0, 0) & d\zeta_0(0, 0, 1) - d\zeta_0(0, 0, 0) \\ d\zeta_1(1, 0, 0) - d\zeta_1(0, 0, 0) & d\zeta_1(0, 1, 0) - d\zeta_1(0, 0, 0) & d\zeta_1(0, 0, 1) - d\zeta_1(0, 0, 0) \\ d\zeta_2(1, 0, 0) - d\zeta_2(0, 0, 0) & d\zeta_2(0, 1, 0) - d\zeta_2(0, 0, 0) & d\zeta_2(0, 0, 1) - d\zeta_2(0, 0, 0) \end{pmatrix}$$

Формування вектору вільних членів лінійної системи рівнянь для розрахунку коефіцієнтів апроксимуючої функції

$$v := \begin{pmatrix} -d\zeta_0(0, 0, 0) \\ -d\zeta_1(0, 0, 0) \\ -d\zeta_2(0, 0, 0) \end{pmatrix}$$

Розрахунок коефіцієнтів апроксимуючої функції $\alpha := \text{Isolve}(M, v)$

Створення апроксимуючої функції $z(\chi) := \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \chi + \alpha_2 \cdot \chi^2$

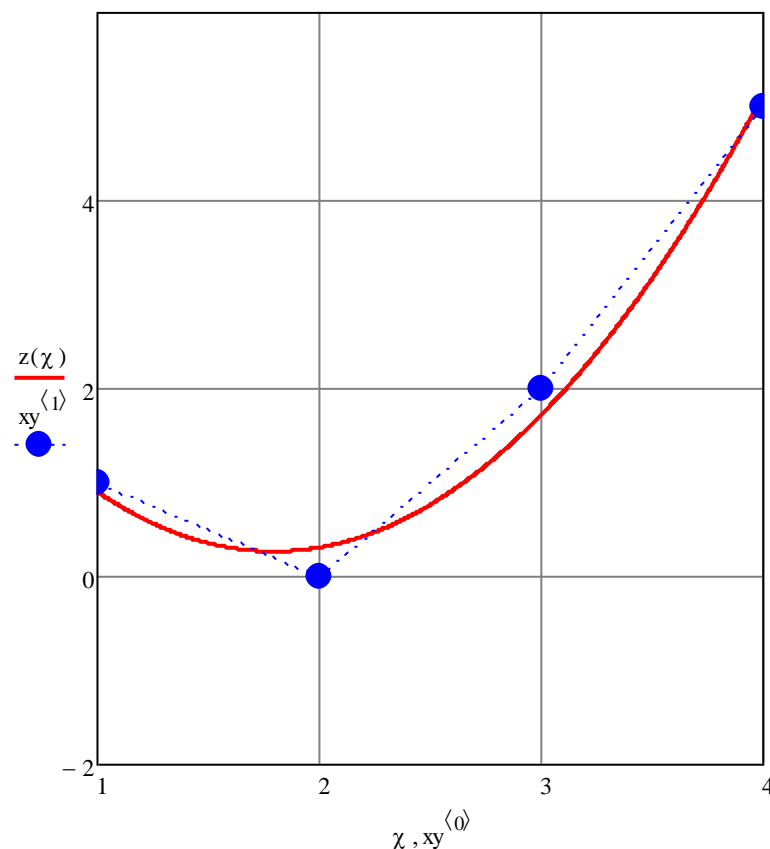


Рисунок 2.2 – Апроксимація квадратичним поліномом

Отримані результати свідчать про те, що апроксимаційна функція у вигляді поліному другого ступеня дає краще наближення до сукупності табличних точок ніж лінійний поліном. Також видно, що значення апроксимуючого поліному при абсцисі табличних значень на співпадають з ординатами функції, що апроксимується.

Розроблені методи апроксимації, які передбачають проходження апроксимуючої функції через точки з координатами функції первинної. Такі методи мають назву інтерполяційних. Це, наприклад такі методи як: інтерполяційний поліном Лагранжа та інтерполяційний поліном Ньютона.

Інтерполяція за Лагранжем полягає в побудові відповідного поліному мінімального степеня, який набуває значень на заданому наборі точок первинної функції. Якщо функція подана точками у вигляді пар координат $(x_i, y_i, i = \overline{0; \dots; n})$ в кількості $n + 1$ одиниць, то існує єдиний поліном $L(x)$ степеня не більшого за n , що задовольняє умові $L(x_i) = f(x_i)$.

Поліном Лагранжа утворюється за формулою:

$$L(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) l_j(x),$$

де $l_i(x)$ – базисні поліноми Лагранжа, що розраховуються за формулою:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Для того, щоб інтерполяційний поліном Лагранжа задовольняв умові $L(x_i) = f(x_i)$ треба, щоб базисні поліноми Лагранжа володіли наступною властивістю

$$l_i(x) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

За допомогою пакету MathCad розглянемо приклад з інтерполяційним поліномом Лагранжа в якості апроксимуючої функції.

$$xy := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Матриця координат табличних точок функції, що інтерполюється

Макрос вилучає координати однієї з табличних точок функції, що інтерполюється для формування відповідного базового поліному Лагранжа.

xy - матриця координат табличних точок функції, що інтерполюється;
 j - індекс координат однієї з табличних точок функції, що вилучається.

$$\text{workLagrMatr}(xy, j) := \begin{cases} xy \leftarrow \text{submatrix}(xy, j + 1, \text{rows}(xy) - 1, 0, \text{cols}(xy) - 1) & \text{if } j = 0 \\ \text{otherwise} \\ \quad \begin{cases} xy \leftarrow \text{submatrix}(xy, 0, \text{rows}(xy) - 2, 0, \text{cols}(xy) - 1) & \text{if } j = \text{rows}(xy) - 1 \\ \text{otherwise} \\ \quad \begin{cases} \text{vectOne} \leftarrow \text{submatrix}(xy, 0, j - 1, 0, \text{cols}(xy) - 1) \\ \text{vectTwo} \leftarrow \text{submatrix}(xy, j + 1, \text{rows}(xy) - 1, 0, \text{cols}(xy) - 1) \\ xy \leftarrow \text{stack}(\text{vectOne}, \text{vectTwo}) \end{cases} \end{cases} \\ \text{return } xy \end{cases}$$

Макрос формує базовий поліном Лагранжа, який відповідає координатам вилученої однієї з табличних точок функції, що інтерполюється для формування.

xy - матриця координат табличних точок функції, що інтерполюється;
 j - індекс координат однієї з табличних точок функції, що вилучається;
 χ - аргумент інтерполяційного поліному Лагранжа.

$$\text{baseLagr}(xy, j, \chi) := \begin{cases} x_j \leftarrow xy_{j,0} \\ xy \leftarrow \text{workLagrMatr}(xy, j) \\ x \leftarrow xy^{\langle 0 \rangle} \\ P \leftarrow \prod_{i=0}^{\text{rows}(xy)-1} \left(\frac{\chi - x_i}{x_j - x_i} \right) \\ \text{return } P \end{cases}$$

Макрос формує інтерполяційний поліном Лагранжа, який відповідає координатам табличних точок функції, що інтерполюється.

xy - матриця координат табличних точок функції, що інтерполюється;
 χ - аргумент інтерполяційного поліному Лагранжа.

$$\text{lagrangePoly}(xy, \chi) := \begin{cases} N \leftarrow \text{rows}(xy) - 1 \\ y \leftarrow xy^{\langle 1 \rangle} \\ P \leftarrow 0 \\ P \leftarrow P + \sum_{i=0}^N (y_i \cdot \text{baseLagr}(xy, i, \chi)) \\ \text{return } P \end{cases}$$

Створення інтерполяційного поліному Лагранжа $\text{lagPoly}(\chi) := \text{lagrangePoly}(xy, \chi)$

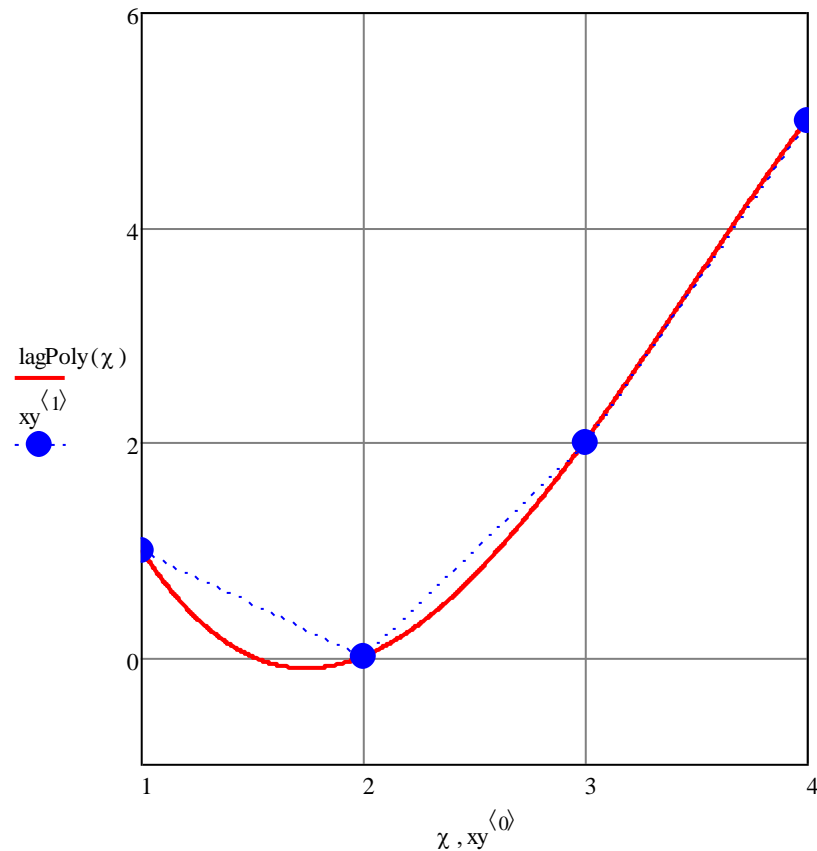


Рисунок 2.3 – Інтерполяція поліномом Лагранжа

Ще один спосіб інтерполяції надає побудова поліному Ньютона. Загальна форма інтерполяційного поліному Ньютона має вигляд:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Також інтерполяційний поліном Ньютона можна генерувати за допомогою рекурентного співвідношення:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Ланцюжок генерування інтерполяційного поліному Ньютона можна подати наступним чином:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= a_0; \\
P_1(x) &= P_0(x) + a_1(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0); \\
P_2(x) &= P_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1); \\
&\dots \\
P_n(x) &= P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) = \\
&= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Отриманий ланцюжок зручно використати для розрахунку коефіцієнтів інтерполяційного поліному Ньютона за табличними точками функції, що інтерполюється:

$$\begin{aligned}
P_0(x_0) &= a_0 = y_0; \\
P_1(x_1) &= a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1; \\
P_2(x_2) &= a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2; \\
&\dots \\
P_n(x_n) &= a_0 + a_1(x_n - x_0) + a_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \dots + a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1}) = y_n.
\end{aligned}$$

В результаті утворюється система лінійних рівнянь для знаходження коефіцієнтів інтерполяційного поліному Ньютона.

За допомогою пакету MathCad розглянемо приклад з інтерполяційним поліномом Ньютона в якості апроксимуючої функції.

$$xy := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Матриця координат табличних точок функції, що інтерполюється

Макрос розраховує та формує матрицю коефіцієнтів лінійної системи рівнянь для подальшого визначення коефіцієнтів інтерполяційного поліному Ньютона.

x - вектор абсцис табличних точок функції, що інтерполюється.

$$\text{newtonPolyMatr}(x) := \left| \begin{array}{l} N \leftarrow \text{rows}(x) - 1 \\ \text{for } i \in 1..N \\ \quad \text{for } j \in 1..N \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} \text{Koef}_{i,j} \leftarrow \prod_{k=1}^j (x_i - x_{k-1}) \text{ if } j \leq i \\ \text{Koef}_{i,j} \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \text{for } i \in 0..N \\ \quad \text{Koef}_{i,0} \leftarrow 1 \\ \text{return Koef} \end{array} \right.$$

Макрос розраховує та формує вектор коефіцієнтів інтерполяційного поліному Ньютона.

xy - матриця координат табличних точок функції, що інтерполюється

$$\text{newtonPolyKoef}(xy) := \left| \begin{array}{l} x \leftarrow xy^{\langle 0 \rangle} \\ y \leftarrow xy^{\langle 1 \rangle} \\ \text{Koef} \leftarrow \text{newtonPolyMatr}(x) \\ a \leftarrow \text{lsolve}(\text{Koef}, y) \\ \text{return } a \end{array} \right.$$

Макрос створює складове інтерполяційного поліному Ньютона відповідного степеню аргументу.

a - вектор коефіцієнтів інтерполяційного поліному Ньютона;

n - величина степеню аргументу;

x - вектор абсцис табличних точок функції, що інтерполюється;

χ - аргумент інтерполяційного поліному Ньютона.

$$\text{newtonPolyBase}(a, n, x, \chi) := \left| \begin{array}{l} P \leftarrow a_n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (\chi - x_k) \text{ if } n \neq 0 \\ P \leftarrow a_n \text{ otherwise} \\ \text{return } P \end{array} \right.$$

Макрос створює інтерполяційний поліном Ньютона по координат табличних точок функції, що інтерполюється.

xy - матриця координат табличних точок функції, що інтерполюється;

χ - аргумент інтерполяційного поліному Ньютона.

$$\text{newtonPoly}(xy, \chi) := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow \text{newtonPolyKoef}(xy) \\ N \leftarrow \text{rows}(a) - 1 \\ x \leftarrow xy^{\langle 0 \rangle} \\ P \leftarrow \sum_{k=0}^N \text{newtonPolyBase}(a, k, x, \chi) \\ \text{return } P \end{array} \right.$$

Створення інтерполяційного поліному Ньютона $\text{newPoly}(\chi) := \text{newtonPoly}(xy, \chi)$

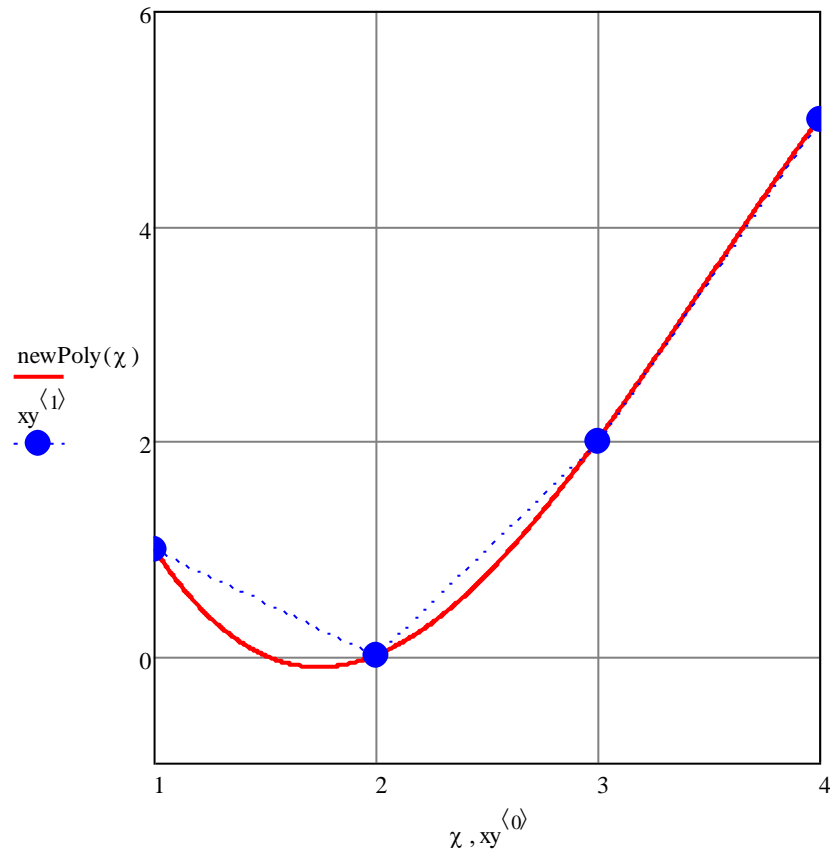


Рисунок 2.4 – Інтерполяція поліномом Ньютона

На практиці функції визначаються таблицями з великою кількістю вузлів. Тому розглянуті методи апроксимації та інтерполяції вимагають використання поліномів високих степенів. Це значно ускладнює розрахунки, а також призводить до появи відчутних пульсацій у апроксимуючих функцій, що є значним недоліком, оскільки збільшує розбіжність в наближенні.

Забезпечити значно кращого наближення дозволяє метод апроксимації та інтерполяції за допомогою сплайнів. Сплайн – це функція кусочно-поліноміального вигляду, що створюється на основі табличних даних первинної функції та може бути продиференцьована на цьому інтервалі не менш ніж два рази.

3 СПОСІБ АПРОКСИМАЦІЇ ХАРАКТЕРИСТИК СПЛАЙНАМИ БЕЗ'Є

Сплайни Без'є відносяться до кривих, що описуються поліномами. Отже крива Без'є це – параметрична крива, що задається виразом

$$B(t) = \sum_{i=0}^n P_i b_{i,n}(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.1)$$

де P_i – опорні точки кривої, що апроксимується; $b_{i,n}(t)$ – базисні функції кривої Без'є. Базисні функції являють собою поліноми Бернштейна.

Поліноми Бернштейна визначаються виразом:

$$b_{i,n}(t) = C_n^i (1-t)^n t^{n-i}$$

де $C_n^i = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ – кількість поєднань з n по i . В цій формулі n – степінь поліному Бернштейна; i – порядковий номер вершини.

Поліноми Бернштейна в залежності від порядку утворюють сім'ї базисних функцій. Кількість базисних поліномів в сім'ї на одиницю більше за порядок поліномів. Коефіцієнти полінома є числами у відповідних рядках трикутника Паскаля (рис. 3.1).

0										1								
1									1	1								
2									1	2	1							
3									1	3	3	1						
4									1	4	6	4	1					
5									1	5	10	10	5	1				
6									1	6	15	20	15	6	1			
7									1	7	21	35	35	21	7	1		
8									1	8	28	56	70	56	28	8	1	
...																		...

Рисунок 3.1 – Трикутник Паскаля

В якості прикладу можна навести наступні поліноми Бернштейна:

$$b_2^1(t) = 2(1-t)t;$$

$$b_3^1(t) = 3(1-t)^2 t;$$

$$b_3^2(t) = 3(1-t)t^2;$$

$$b_7^5(t) = 21(1-t)^2 t^5.$$

Графіки цих поліномів наведено на рис. 3.2.

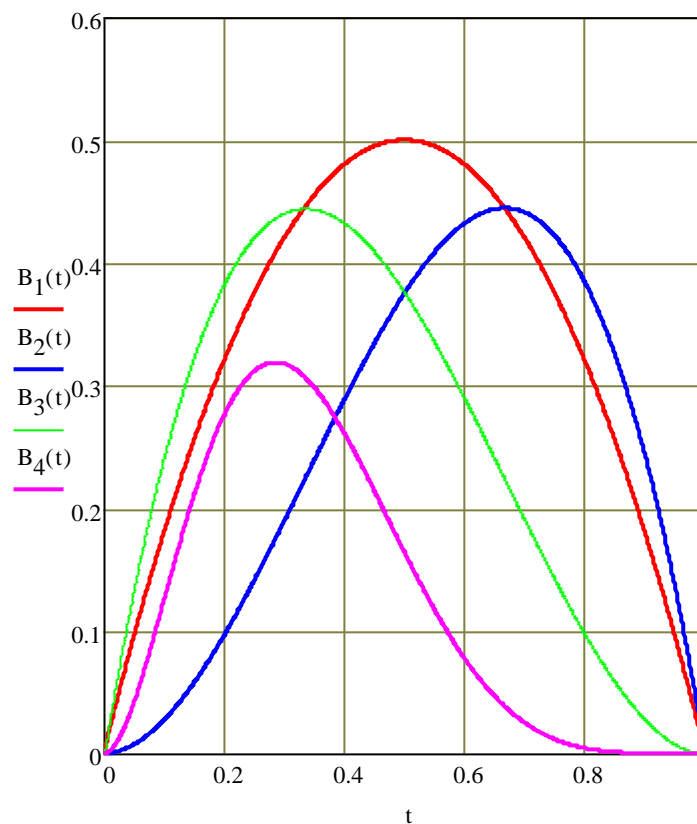


Рисунок 3.2 – Графіки прикладів поліномів Бернштейна

Особливістю виразу (3.1) є те що елемент P_i не є числом. В даному випадку це сукупність координат точки, яка може бути представлена одновимірною матрицею (вектором) кортежів значень координат. Відповідно до умов задачі P_i має вигляд вектору-стовбця з двох чисел:

$$P_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Таким чином, крива Без'є – це такий сплайн, який визначається як зважена сума певної кількості контрольних точок з ваговими коефіцієнтами у вигляді поліномів Бернштейна.

Для роботи та відображення кривих Без'є, спираючись на вирази (3.1) та (3.2), треба описувати їх в параметричній формі:

$$\begin{aligned}x(t) &= P_x(t); \\y(t) &= P_y(t).\end{aligned}$$

В якості прикладу можна розглянути наступну криву Без'є:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 b_5^0(t) + x_1 b_5^1(t) + x_2 b_5^2(t) + x_3 b_5^3(t) + x_4 b_5^4(t) + x_5 b_5^5(t); \\y(t) &= y_0 b_5^0(t) + y_1 b_5^1(t) + y_2 b_5^2(t) + y_3 b_5^3(t) + y_4 b_5^4(t) + y_5 b_5^5(t).\end{aligned}$$

Розглянемо в якості прикладу послідовність точок:

$$\begin{aligned}P_0 &= (0;0); \\P_1 &= (1;4); \\P_2 &= (2;1); \\P_3 &= (3;2); \\P_4 &= (4;7); \\P_5 &= (5;5).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Тоді параметричний опис кривої Без'є в цьому прикладі набуде вигляду:

$$\begin{aligned}x(t) &= 0 \cdot b_5^0(t) + 1 \cdot b_5^1(t) + 2 \cdot b_5^2(t) + 3 \cdot b_5^3(t) + 4 \cdot b_5^4(t) + 5 \cdot b_5^5(t); \\y(t) &= 0 \cdot b_5^0(t) + 4 \cdot b_5^1(t) + 1 \cdot b_5^2(t) + 2 \cdot b_5^3(t) + 7 \cdot b_5^4(t) + 5 \cdot b_5^5(t).\end{aligned}$$

В даному прикладі отримали криву Без'є п'ятого порядку. Ця крива має форму гладкої лінії. Графік цієї кривої Без'є наведено на рис. 3.3. З графіку видно, що крива проходить тільки через першу та останню точки: $P_0 = (0;0)$; $P_5 = (5;5)$. Проміжні точки: $P_1 = (1;4)$; $P_2 = (2;1)$; $P_3 = (3;2)$; $P_4 = (4;7)$, виконують функцію подібну до деяких "магнітів", що притягують викривляючи до себе лінію. Для кривих Без'є проміжні точки виконують допоміжну роль формуючих точок. Даний факт означає, що при побудові кривих Без'є треба на

додачу до вузлових точок апроксимації вираховувати та додавати ще проміжні формуючі точки, кількість яких залежить від порядку кривої Без'є.

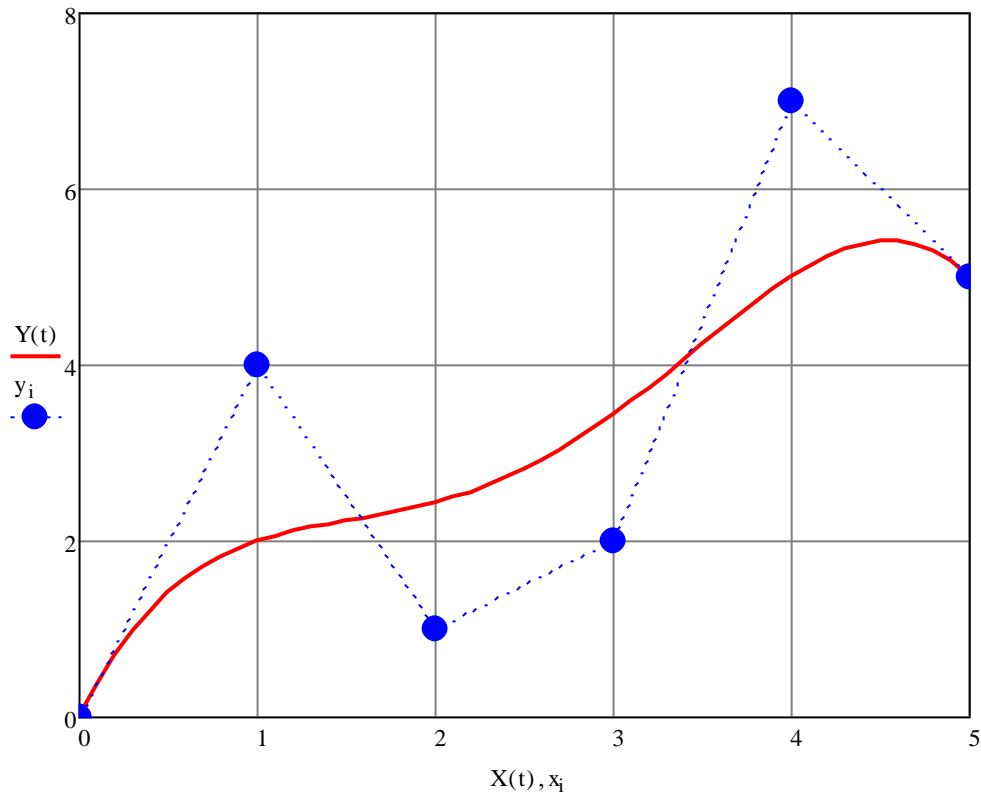


Рисунок 3.3 – Графік кривої Без'є п'ятого порядку

Підсумовуючи аналіз прикладу, слід зауважити наступне: якщо є вимога проходження гладкої кривої Без'є через усі точки з переліку, зазначеному в (3.3), то треба будувати окремі сегменти кривої Без'є між суміжними точками з переліку (3.3). Це тягне за собою вирахування проміжних точок між зазначеними парами. Якщо вставляти по одній проміжній точці, то отримаємо сегменти квадратичної кривої Без'є; якщо вставляти по дві проміжні точки, то отримаємо сегменти кубічної кривої Без'є, тощо. Найкращі результати дає використання кубічних кривих Без'є. Тому розглянемо побудову сплайнової апроксимації саме кубічними кривими Без'є.

Побудова кубічної кривої Без'є спирається на чотири точки. Позначимо їх як $P_0; P_1; P_2; P_3$. Вказані точки визначаються на площині, що записується як: $P_0; P_1; P_2; P_3 \in R^2$. З точки зору математики кубічна крива Без'є – це відображення B відрізка $[0, 1]$ у площину R^2 , що задається виразом:

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + (1-t)^2 t P_1 + (1-t) t^2 P_2 + t^3 P_3. \quad (3.4)$$

Точки P_0 та P_3 є кінцями кубічної кривої Безьє, а точки P_1 та P_2 називають контрольними точками. Крива Без'є не проходить через контрольні точки, але вони впливають її форму. Зокрема, прямі $P_0 P_1$ та $P_2 P_3$ визначають відрізки дотичних прямих до кривої в її кінцевих точках P_0 та P_3 . До того ж кубічна крива Безьє цілком міститься всередині опуклої оболонки, утвореної з вершин у точках $P_0; P_1; P_2; P_3$, що проілюстровано на рис. 3.4.

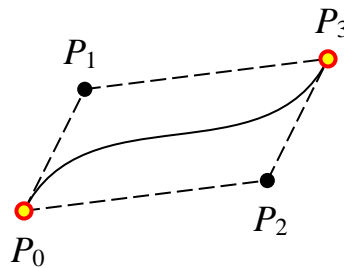


Рисунок 3.4 – Графік прикладу кривої Без'є третього порядку

Точки P_0 та P_3 є основою для побудови сегменту сплайнової кривої. Тому природно зробити так, щоб їхні індекси відрізнялися на одиницю. Тому їх можна позначити як Q_0 та Q_1 . Тоді точки P_1 та P_2 можна позначити як A_0 та B_0 . Таким чином, точки, що утворюють кортеж точок, які визначають i -й сегмент сплайнів Без'є буде мати вигляд: $Q_i; A_i; B_i; Q_{i+1}$.

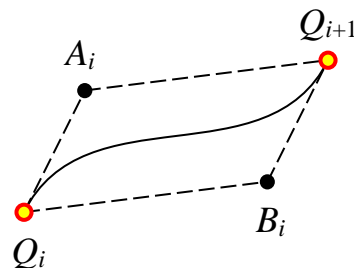


Рисунок 3.5 – Графік прикладу i -го сегменту сплайнів Без'є третього порядку

Розглянемо тепер метод апроксимації кривих кубічними сплайнами Без'є. Маючи набір базових точок $Q_0; Q_1; \dots; Q_n$, розрахувати для кожної пари точок Q_i та Q_{i+1} пару контрольних точок A_i та B_i , які впливають на форму кривої.

Розрахунок контрольних точок слід виконати так, щоб на краях кривих, що утворюють суміжні сегменти співпадали похідні. Це умова гладкості кривої. Контрольні точки B_{i-1} та A_i мають бути симетричні відносно базової точки стикування Q_i . Контрольні точки B_{i-1} та A_i мають лежати на одній прямій, яка є дотичною до обох суміжних сегментів та відрізки $B_{i-1}Q_i$ та Q_iA_i повинні мати однакову довжину $|B_{i-1}Q_i| = |Q_iA_i|$ (рис. 3.6).

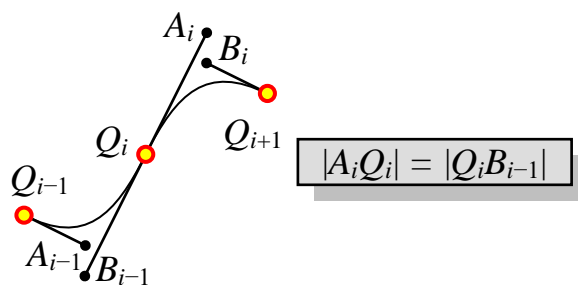


Рисунок 3.6 – Пояснення щодо стиковки сегментів сплайнів Без'є третього порядку

Для того, щоб побудувати гладку криву сплайнами Без'є третього порядку треба забезпечити безперервність першої та другої похідних у базових точках Q_i . Тому треба отримати вирази для першої та другої похідної кривої Без'є третього порядку, яка визначається формулою (3.4).

Розрахунок першої похідної кривої Без'є третього порядку набуває наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_i(t) &= \frac{d}{dt} \left[(1-t)^3 Q_i + 3(1-t)^2 t A_i + 3(1-t) t^2 B_i + t^3 Q_{i+1} \right] = \\ &= 3 \left\{ -P_0 (1-t)^2 Q_i + \left[-2(1-t)t + (1-t)^2 \right] A_i + \left[-t^2 + 2(1-t)t \right] B_i + t^2 Q_{i+1} \right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Розрахунок другої похідної кривої Без'є третього порядку набуває наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} B_i(t) &= \frac{d}{dt} \left[(1-t)^3 Q_i + 3(1-t)^2 t A_i + 3(1-t) t^2 B_i + t^3 Q_{i+1} \right] = \\ &= 6 \left[(1-t) Q_i - (2-3t) A_i + (1-3t) B_i + t Q_{i+1} \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Тепер треба підставити в отримані вирази похідних нульове та одиничне значення параметру t

$$\left. \frac{d}{dt} B_i(t) \right|_{t=0} = 3(A_i - Q_i). \quad (3.7)$$

$$\left. \frac{d}{dt} B_i(t) \right|_{t=1} = 3(Q_{i+1} - B_i). \quad (3.8)$$

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} B_i(t) \right|_{t=0} = 6(Q_i - 2A_i + B_i). \quad (3.9)$$

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} B_i(t) \right|_{t=1} = 6(A_i - 2B_i + Q_{i+1}). \quad (3.10)$$

Тепер при побудові сплайну треба забезпечити, щоб в кожному проміжному вузлі апроксимації $Q_i, 1 \leq i \leq n-1$ дві криві, що поєднуються в цьому вузлі мали однакові першу та другу похідні. Треба забезпечити співвідношення:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} B_{i-1}(t) \right|_{t=1} &= \left. \frac{d}{dt} B_i(t) \right|_{t=0} \\ \left. \frac{d^2}{dt^2} B_{i-1}(t) \right|_{t=1} &= \left. \frac{d^2}{dt^2} B_i(t) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

Враховуючи співвідношення (3.7) – (3.10), отримаємо:

$$A_i + B_{i-1} = 2Q_i; \quad (3.11)$$

$$A_{i-1} - 2B_{i-1} + 2A_i - B_i = 0. \quad (3.12)$$

Оскільки $1 \leq i \leq n-1$, то співвідношення (3.11) та (3.12) розгорнуться в систему $2(n-1)$ лінійних рівнянь з $2n$ невідомими A_i та B_i . Така система є неповною тому може мати нескінченну кількість розв'язків. Доповнити систему

лінійних рівнянь можна, задавши умови рівності нулю других похідних в крайніх базових точках кривої, що виражається формулами:

$$\begin{aligned} Q_0 - 2A_0 + B_0 &= 0; \\ A_n - 2B_n + Q_{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Після розподілу відомих та невідомих членів у рівняннях отримаємо:

$$-2A_0 + B_0 = -Q_0; \quad (3.13)$$

$$A_n - 2B_n = -Q_{n+1}. \quad (3.14)$$

В підсумку з виразів (3.11) – (3.14) утворюється лінійна система рівнянь для розрахунку контрольних точок A_i та B_i .

$$\begin{cases} -2A_0 + B_0 = -Q_0; \\ A_{i-1} - 2B_{i-1} + 2A_i - B_i = 0; \\ A_i + B_{i-1} = 2Q_i; \\ A_n - 2B_n = -Q_{n+1}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Треба розуміти, що невідомі A_i та B_i і величини Q_i є точками на площині та представлені наборами з двох координат. Тому систему (3.15) треба модифікувати, підставляючи замість означених векторів їхні координати. В результаті треба буде розв'язувати дві системи для відповідних координат.

Проілюструємо отриманий метод на прикладі. Розглянемо наступний набір базових точок (рис. 3.7):

$$\begin{aligned} Q_0 &= (0;0); \\ Q_1 &= (1;7); \\ Q_2 &= (5;4); \\ Q_3 &= (7;5). \end{aligned} \quad (3.16)$$

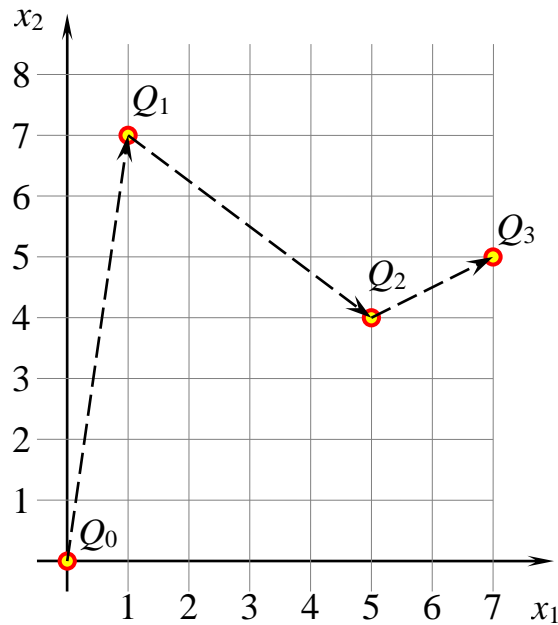


Рисунок 3.7 – Координати точок прикладу кривої

Розпишемо систему (3.15) під приклад з чотирьох точок.

Точок на кривій 4 Q_i , $0 \leq i \leq 3$.

Кривих Без'є між точками 3 $B_j(t)$ $0 \leq j < 2$.

Контрольних точок по 3 штук A_j , B_j , $0 \leq j < 2$.

$$\begin{cases} -2A_0 + B_0 = -Q_0; \\ A_1 + B_0 = 2Q_1; \\ A_0 - 2B_0 + 2A_1 - B_1 = 0; \\ A_2 + B_1 = 2Q_2; \\ A_1 - 2B_1 + 2A_2 - B_2 = 0; \\ A_2 - 2B_2 + = -Q_3. \end{cases} \quad (3.17)$$

Треба доповнити рівняння системи (3.17) складовими зі всіма невідомими для того, щоб можна було б надати системі матричної форми.

$$\begin{cases} -2 \cdot A_0 + 1 \cdot B_0 + 0 \cdot A_1 + 0 \cdot B_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot B_2 = -Q_0; \\ 1 \cdot A_0 - 2 \cdot B_0 + 2 \cdot A_1 - 1 \cdot B_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot B_2 = 0; \\ 0 \cdot A_0 + 1 \cdot B_0 + 1 \cdot A_1 + 0 \cdot B_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot B_2 = 2Q_1; \\ 0 \cdot A_0 + 0 \cdot B_0 + 1 \cdot A_1 - 2B_1 + 2A_2 - 1 \cdot B_2 = 0; \\ 0 \cdot A_0 + 0 \cdot B_0 + 0 \cdot A_1 - 2 \cdot B_1 + 2 \cdot A_2 + 1 \cdot B_2 = 2Q_2; \\ 0 \cdot A_0 + 0 \cdot B_0 + 0 \cdot A_1 + 0B_1 + 1 \cdot A_2 - 2B_2 = -Q_3. \end{cases}$$

Тепер цю систему можна записати у вигляді матричного рівняння:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_0 \\ 0 \\ 2Q_1 \\ 0 \\ 2Q_2 \\ -Q_3 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Особливість матриці системи рівнянь є те, що вона – чотири діагональна, що спрощую розрахунок за допомогою спеціалізованого методу Гауса. Однак це не так важливо, оскільки в пакеті MathCad є відповідна вбудована функція пошуку коренів системи лінійних рівнянь. На сучасних комп'ютерах ця задача розв'язується в реальному масштабі часу.

Знайдемо розв'язок, підставивши в рівняння (3.18) координати точок.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{A_0} \\ x_{B_0} \\ x_{A_1} \\ x_{B_1} \\ x_{A_2} \\ x_{B_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{A_0} \\ y_{B_0} \\ y_{A_1} \\ y_{B_1} \\ y_{A_2} \\ y_{B_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 14 \\ 0 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Використаємо матриці з рівнянь (3.19) та (3.20) в пакеті MathCad, застосувавши функцію *lsolve()*, та отримаємо результат:

$$x_{AB} = \begin{bmatrix} -0,254 \\ -0,508 \\ 2,508 \\ 5,780 \\ 2,220 \\ 4,610 \end{bmatrix}; \quad y_{AB} = \begin{bmatrix} 3,203 \\ 6,407 \\ 7,593 \\ 5,576 \\ 0,424 \\ 2,712 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Додавши координати контрольних точок з (3.21) до масиву базових точок (3.15), отримаємо набір для побудови гладкої кривої за допомогою сплайнів Без'є третього порядку (рис. 3.8).

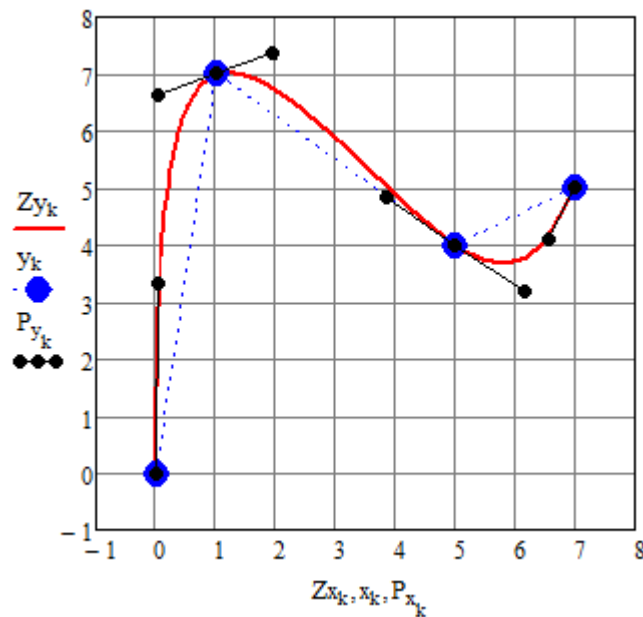


Рисунок 3.8 – Гладка крива, побудована сплайнами Без'є третього порядку

Попередньо викладені відомості дають змогу сформулювати алгоритм апроксимації набору точок кривої сплайнами Без'є третього порядку.

По-перше, треба з огляду на співвідношення (3.11) – (3.14) сформулювати матрицю коефіцієнтів лінійної системи рівнянь та вектор стовбець вільних членів.

Матриця коефіцієнтів є квадратною та має розміри $(2n-1) \times (2n-1)$, де n – кількість базових точок кривої Q_i . В першому рядку перші два елементи мають значення: -2 та 1 . Інші елементи є нульовими. В останньому рядку останні два елементи мають значення: 1 та -2 . Інші елементи є нульовими. Далі розглядаємо по парі суміжних рядків, які об'єднуються в матрицю $2 \times (n-1)$. При цьому в першій парі рядків перші чотири стовбці мають вигляд:
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$
. Інші елементи є нульовими. Наступні пари рядків можуть бути отримані в результаті правого послідовного дворазового циклічного зсуву стовбців попередньої пари рядків. Кількість таких пар рядків дорівнює $n-2$. З отриманих рядків з гори до низу вибудовується матриця коефіцієнтів системи.

Стовбець вільних членів будується наступним чином:

- перший елемент дорівнює Q_0 із зворотним знаком $(-Q_0)$;
- останній елемент дорівнює Q_n із зворотним знаком $(-Q_n)$;
- інші елементи утворюються за формулами: $q_{2i+1} = 0$; $q_{2i} = 2Q_i$; $1 \leq i < n$.

Розв'язок отриманої системи є вектор пар контрольних точок кубічних сплайнів Без'є A_i та B_i . Їх слід розташувати між базовими точками кривої, що апроксимується, Q_i . На підґрунті отриманого масиву точок можна в решті решт сформулювати аналітичний вираз для гладкої кривої Без'є, яка буде проходити через задані базові точки Q_i .

Розглянутий метод обчислення сплайну працює добре, коли відстані між вузлами інтерполяції приблизно однакові. Однак у випадку коли відстані між вузловими точками сильно різняться метод треба вдосконалити. Справа в тому, що параметризація кожної кривої Без'є, що є сегментом сплайну, виконується значеннями змінної t із відрізка $[0; 1]$.

Вирішення цієї проблеми полягає у виконанні параметризації кривих Без'є, що утворюють сплайн, не значеннями змінної t із відрізка $[0; 1]$, а значеннями змінної t із відрізка $[0; l]$, де l – відстань між суміжними точками

апроксимації. Звідси випливає, що треба розраховувати криву Без'є не $B(t)$, а $B(\alpha t)$, де α – параметр, що враховує різну відстань між вузловими точками апроксимації. Вказаний параметр пов'язаний з відстанню між вузловими точками апроксимації співвідношенням: $\alpha = \frac{1}{l}$. Відстань між парою точок (рис 3.9) розраховується за формулою:

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2};$$

$$\alpha = \frac{1}{l} = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}. \quad (3.22)$$

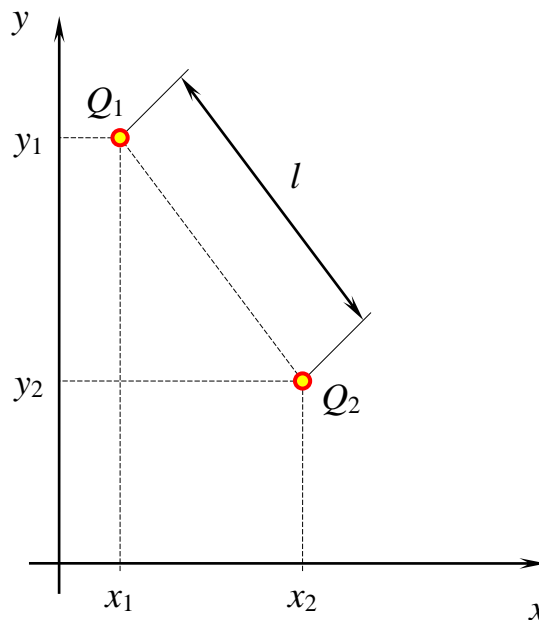


Рисунок 3.9 – Відстань між парою точок

Тепер треба розглянути параметризацію кривої Без'є на відрізку $[0; l]$.

$$A(t) = B(\alpha t).$$

Для цього в виразі треба зробити заміну $t \rightarrow \alpha t$.

$$A(t) = B(\alpha t) = (1 - \alpha t)^3 P_0 + (1 - \alpha t)^2 (\alpha t) P_1 + (1 - \alpha t) (\alpha t)^2 P_2 + (\alpha t)^3 P_3.$$

За вже відомим способом треба отримати вирази для першої та другої похідних:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A(t) &= 3\alpha\left[-(1-\alpha t)^2 Q_i + (1-\alpha t)(1-3\alpha t)A_i + \alpha t(2-3\alpha t)B_i + \alpha^2 t^2 Q_{i+1}\right] \\ \frac{d^2}{dt^2}A(t) &= 6\alpha^2\left[(1-\alpha t)Q_i - [2-3\alpha t]A_i + (1-3\alpha t)B_i + \alpha t Q_{i+1}\right].\end{aligned}$$

Тепер в отримані вирази похідних підставимо на місце змінної t значення на кінцях відрізка: 0 та l_i .

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A(0) &= 3\alpha(-Q_i + A_i); \\ \frac{d}{dt}A(l_i) &= 3\alpha(-B_i + Q_{i+1}); \\ \frac{d^2}{dt^2}A(0) &= 6\alpha^2(Q_i - 2A_i + B_i); \\ \frac{d^2}{dt^2}A(l_i) &= 6\alpha^2(A_i - 2B_i + Q_{i+1});\end{aligned}$$

Складемо знову рівняння, що стверджують рівність перших і других похідних сусідніх кривих Без'є в проміжних вузлах кривої з урахуванням параметризації.

$$\left. \begin{aligned}\frac{d}{dt}A_{i-1}(l_{i-1}) &= \frac{d}{dt}A_i(0) \\ \frac{d^2}{dt^2}A_{i-1}(l_{i-1}) &= \frac{d^2}{dt^2}A_i(0)\end{aligned}\right\} 1 \leq i \leq n-1.$$

Тоді отримаємо вирази:

$$\begin{aligned}\alpha_{i-1}(-B_{i-1} + Q_i) &= \alpha_i(-Q_i + A_i) \\ \alpha_{i-1}^2(A_{i-1} - 2B_{i-1} + Q_i) &= \alpha_i^2(Q_i - 2A_i + B_i)\end{aligned}$$

Перенесемо складові з невідомими змінними в один бік, а з відомими значеннями в інший бік.

$$\begin{aligned}\alpha_{i-1}B_{i-1} + \alpha_i A_i &= (\alpha_{i-1} + \alpha_i)Q_i; \\ \alpha_{i-1}^2 A_{i-1} - 2\alpha_{i-1}^2 B_{i-1} + 2\alpha_i^2 A_i - \alpha_i^2 B_i &= (-\alpha_{i-1}^2 + \alpha_i^2)Q_i.\end{aligned}$$

Знов отримали $2(n-1)$ лінійних рівнянь з $2n$ невідомими A_i та B_i . Щоб зробити систему повною треба як і в попередньому випадку додати крайові умови на початковій та останній точках кривої, а саме: нульові значення других похідних.

$$\begin{cases} -2A_0 + B_0 = -Q_0; \\ \alpha_{i-1}^2 A_{i-1} - 2\alpha_{i-1}^2 B_{i-1} + 2\alpha_i^2 A_i - \alpha_i^2 B_i = (-\alpha_{i-1}^2 + \alpha_i^2)Q_i; \\ \alpha_{i-1} B_{i-1} + \alpha_i A_i = (\alpha_{i-1} + \alpha_i)Q_i; \\ A_{n-1} - 2B_{n-1} = -Q_n. \end{cases} \quad (3.23)$$

Розглянемо вже відомий приклад з набором точок (3.16). Спираючись на співвідношення системи (3.23), отримаємо матричний вираз системи рівнянь для розрахунку контрольних точок A_i та B_i .

Оскільки в наборі є чотири точки, то треба скласти систему з шістьох лінійних рівнянь, що надасть можливість розрахувати координати шістьох контрольних точок: $A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2$.

$$\begin{cases} \alpha_0^2 A_0 - 2\alpha_0^2 B_0 + 2\alpha_1^2 A_1 - \alpha_1^2 B_1 = (-\alpha_0^2 + \alpha_1^2)Q_1; \\ \alpha_0 B_0 + \alpha_1 A_1 = (\alpha_0 + \alpha_1)Q_1; \\ \alpha_1^2 A_1 - 2\alpha_1^2 B_1 + 2\alpha_2^2 A_2 - \alpha_2^2 B_2 = (-\alpha_1^2 + \alpha_2^2)Q_2; \\ \alpha_1 B_1 + \alpha_2 A_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)Q_2; \\ \alpha_2^2 A_{i-1} - 2\alpha_2^2 B_2 + 2\alpha_3^2 A_3 - \alpha_3^2 B_3 = (-\alpha_2^2 + \alpha_3^2)Q_3; \\ \alpha_2 B_2 + \alpha_4 A_4 = (\alpha_3 + \alpha_4)Q_4. \end{cases} \quad (3.24)$$

Треба доповнити рівняння системи (3.24) складовими зі всіма невідомими для того, щоб можна було б надати системі матричної форми.

$$\begin{cases} -2 \cdot A_0 + 1 \cdot B_0 + 0 \cdot A_1 + 0 \cdot B_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot B_2 = -Q_0; \\ \alpha_0^2 \cdot A_0 - 2\alpha_0^2 \cdot B_0 + 2\alpha_1^2 \cdot A_1 - \alpha_1^2 \cdot B_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot B_2 = (-\alpha_0^2 + \alpha_1^2)Q_1; \\ 0 \cdot A_0 + \alpha_0 \cdot B_0 + \alpha_1 \cdot A_1 + 0 \cdot B_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot B_2 = (\alpha_0 + \alpha_1)Q_1; \\ 0 \cdot A_0 + 0 \cdot B_0 + \alpha_1^2 \cdot A_1 - 2\alpha_1^2 \cdot B_1 + 2\alpha_2^2 \cdot A_2 - \alpha_2^2 \cdot B_2 = (-\alpha_1^2 + \alpha_2^2)Q_2; \\ 0 \cdot A_0 + 0 \cdot B_0 + 0 \cdot A_1 + \alpha_1 \cdot B_1 + \alpha_2 \cdot A_2 + 0 \cdot B_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)Q_2; \\ 0 \cdot A_0 + 0 \cdot B_0 + 0 \cdot A_1 + 0 \cdot B_1 - 2 \cdot A_2 + 1 \cdot B_2 = -Q_3. \end{cases}$$

Тепер цю систему можна записати у вигляді матричного рівняння:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_0^2 & -2\alpha_0^2 & 2\alpha_1^2 & -\alpha_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^2 & -2\alpha_1^2 & 2\alpha_2^2 & -\alpha_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_0 \\ (-\alpha_0^2 + \alpha_1^2)Q_1 \\ (\alpha_0 + \alpha_1)Q_1 \\ (-\alpha_1^2 + \alpha_2^2)Q_2 \\ (\alpha_1 + \alpha_2)Q_2 \\ -Q_3 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

У матричному рівнянні (3.25) необхідно розрахувати значення параметрів α_i , використовуючи формулу (3.22).

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0,141 \\ 0,200 \\ 0,447 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Також у матричному рівнянні (3.25), враховуючи параметри (3.26), треба розрахувати матрицю коефіцієнтів.

$$Koeff = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,02 & -0,04 & 0,008 & -0,04 & 0 & 0 \\ 0 & 0,141 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 & -0,08 & 0,4 & -0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,447 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Також у матричному рівнянні (3.25), враховуючи параметри (3.26), треба розрахувати вміст двох векторів вільних членів для визначення координат контрольних точок.

$$Q_x = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,020 \\ 0,341 \\ 0,800 \\ 3,236 \\ -7,0 \end{bmatrix}; \quad Q_y = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,140 \\ 2,390 \\ 0,640 \\ 2,589 \\ -5,000 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Тепер, використовуючи результати (3.7) та (3.28) в пакеті MathCad, застосувавши функцію *lsolve()*, та отримаємо розв'язок матричного рівняння (3.25):

$$x_{AB} = \begin{bmatrix} -0,022 \\ -0,044 \\ 1,956 \\ 3,844 \\ 6,156 \\ 6,578 \end{bmatrix}; \quad y_{AB} = \begin{bmatrix} 3,311 \\ 6,622 \\ 7,378 \\ 4,822 \\ 3,178 \\ 4,089 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Додавши координати контрольних точок з (3.29) до масиву базових точок (3.16), отримаємо набір для побудови гладкої кривої за допомогою параметричних сплайнів Без'є третього порядку (рис. 3.10).

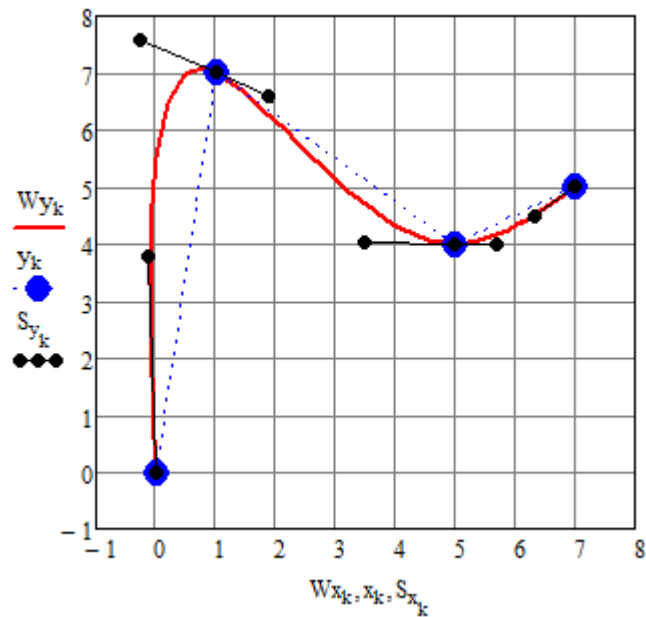


Рисунок 3.10 – Гладка крива, побудована параметричними сплайнами Без'є третього порядку

Отримані відомості дають змогу сформувавши алгоритм апроксимації набору точок кривої параметричними сплайнами Без'є третього порядку.

Квадратна матриця коефіцієнтів розмірами $(2n-1) \times (2n-1)$, де n – кількість базових точок кривої Q_i , будується наступним чином. В першому рядку перші два елементи мають значення: -2 та 1 . Інші елементи є нульовими. В останньому рядку останні два елементи мають значення: 1 та -2 . Інші елементи є нульовими. Далі розглядаємо по парі суміжних рядків, які об'єднуються в матрицю $2 \times (n-1)$. При цьому в першій парі рядків перші

чотири стовбці мають вигляд:
$$\begin{bmatrix} \alpha_i^2 & -2\alpha_i^2 & 2\alpha_{i+1}^2 & -\alpha_{i+1}^2 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_i & \alpha_{i+1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$
. Інші

елементи є нульовими. Наступні пари рядків можуть бути отримані в результаті правого послідовного дворазового циклічного зсуву стовбців попередньої пари рядків. При цьому індекс набуває значень від 0 до $n-1$. Кількість таких пар рядків дорівнює $n-2$. З отриманих рядків з гори до низу вибудовується матриця коефіцієнтів системи.

Стовбець вільних членів будується наступним чином:

- перший елемент дорівнює Q_0 із зворотним знаком $(-Q_0)$;
- останній елемент дорівнює Q_n із зворотним знаком $(-Q_n)$;

– інші елементи вектору вільних членів утворюються за формулами:
 $q_{2i+1} = (-\alpha_i^2 + \alpha_{i+1}^2)Q_{i+1}; q_{2i} = (\alpha_i + \alpha_{i+1})Q_{i+1}; 1 \leq i < n.$

Розв'язок отриманої системи є вектор пар контрольних точок параметричних кубічних сплайнів Без'є A_i та B_i . Отримані контрольні точки слід розташувати між базовими точками кривої, що апроксимується, Q_i . На підґрунті отриманого масиву точок можна в решті решт сформулювати аналітичний вираз для гладкої кривої Без'є, яка буде проходити через задані базові точки Q_i .

4 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ АПРОКСИМАЦІЇ ХАРАКТЕРИСТИК СПЛАЙНАМИ БЕЗ'Є

Завдяки наявності сучасних потужних комп'ютерів та за допомогою програмних засобів моделювання є можливість реалізувати обрані за необхідності методи апроксимації характеристик електронних елементів та провести моделювання.

Для програмної реалізації метода апроксимації характеристик електронних компонентів радіотехнічних пристроїв та пристроїв зв'язку за допомогою сплайнів Без'є в роботі обрано пакет MathCad. Цей продукт комп'ютерної математики має розвинені засоби розрахунку значень елементарних функції, матричної алгебри та графічної візуалізації результатів обчислень та моделювання. Якісною перевагою пакету MathCad є можливість створювати програмні модулі, що реалізують певні алгоритми обчислень. Ці програмні модулі мають назву макросів та спираються на використання невеликої кількості команд, якої цілком достатньо для створення потужних математичних моделей. Крім того пакет MathCad ґрунтується на зручному та простому інтерфейсі користувача, що робить процес вирішення задач доволі ефективним та порівняно швидким.

Як вже відомо, координати допоміжних точок сегментів кривої, що мають вигляд кубічних сплайнів Без'є, знаходяться як розв'язок лінійної системи рівнянь. Тому потрібні макроси, які сформуують матрицю коефіцієнтів системи та вектор стовбець вільних членів. Набір макросів, які будуть використані для розв'язання цієї задачі наведено далі.

Макрос виконує правий циклічний зсув вектору числових значень.

x - вектор-стовбець числових значень.

```

shiftCyclicRigth(x) :=
  N ← rows(x) - 1
  last ← xN
  for i ∈ N.. 1
    xi ← xi-1
  x0 ← last
  return x

```

Макрос виконує певну кількість правих циклічних зсувів вектору числових значень.

x - вектор-стовбець числових значень;

N - кількість правих циклічних зсувів вектору.

```

shiftCycRigthMul(x,N) := | j ← 0
                        | for i ∈ 0.. N - 1           if N ≠ 0
                        |   | x ← shiftCycRigth(x)
                        |   | j ← j + 1
                        | return x
  
```

Макрос формує матрицю коефіцієнтів для лінійної системи розрахунку точок сегменту сплайнів Без'є.

n - кількість опорних точок майбутньої кривої Без'є.

```

formMatrixBeze(n) := | n ← 2·n
                    | oneDif ← (0 1 1 0)
                    | twoDif ← (1 -2 2 -1)
                    | firsteLine ← (-2 1 0 0)
                    | lasteLine ← (0 0 1 -2)
                    | if n > 4
                    |   | for i ∈ 0.. n - 5
                    |   |   | xi ← 0
                    |   |   | oneDif ← augment(oneDif, xT)
                    |   |   | twoDif ← augment(twoDif, xT)
                    |   |   | firsteLine ← augment(firsteLine, xT)
                    |   |   | lasteLine ← augment(xT, lasteLine)
                    |   |   | M ← stack(firsteLine, twoDif, oneDif)
                    |   |   | m ←  $\frac{n-2}{2} - 1$ 
                    |   |   | for i ∈ 1.. m
                    |   |   |   | for j ∈ 0.. 1
                    |   |   |   |   | twoDif ← shiftCycRigth(twoDifT)T
                    |   |   |   |   | oneDif ← shiftCycRigth(oneDifT)T
                    |   |   |   |   | M ← stack(M, twoDif, oneDif)
                    |   |   |   | M ← stack(M, lasteLine)
                    |   |   |   | M ← M
                    |   |   | M ← stack(firsteLine, twoDif, oneDif, lasteLine) otherwise
                    |   |   | return M
  
```

Макрос формує вектор-стовбець вільних членів для лінійної системи розрахунку точок сегменту сплайну Без'є.

x - вхідний вектор-стовбець опорних точок кривої, що апроксимується.

```
formFreeMemb(x) :=
  N ← rows(x) - 1
  M ← 2·N
  y0 ← -x0
  j ← 1
  for i ∈ 1..N - 1
    yj ← 0
    yj+1 ← 2xi
    j ← j + 2
  yj ← -xN
  return y
```

Макрос розраховує вектор параметрів для сплайнів Без'є на підґрунті відстаней між опорними точками кривої.

Q - матриця декартових координат опорних точок кривої.

```
paramsEval(Q) :=
  N ← rows(Q) - 2
  for i ∈ 0..N
    αi ←  $\frac{1}{\sqrt{(Q_{i,0} - Q_{i+1,0})^2 + (Q_{i,1} - Q_{i+1,1})^2}}$ 
  return α
```

Макрос формує матрицю коефіцієнтів для лінійної системи розрахунку точок сегменту параметричних сплайнів Без'є.

n - кількість опорних точок майбутньої кривої Без'є.

```

formMatrixBezePar (rowsQ,  $\alpha$ ) :=
  n  $\leftarrow$  2 * rowsQ - 2
  oneDif  $\leftarrow$  (1 -2 2 -1)
  twoDif  $\leftarrow$  (0 1 1 0)
  firsteLine  $\leftarrow$  (-2 1 0 0)
  lasteLine  $\leftarrow$  (0 0 1 -2)
  if n > 4
    for i  $\in$  0..n - 5
       $x_i$   $\leftarrow$  0
      for i  $\in$  0..n - 1
         $M_{0,i}$   $\leftarrow$  0
      x  $\leftarrow$  x
      x  $\leftarrow$  x
      m  $\leftarrow$   $\frac{n - 2}{2}$  - 1
      for i  $\in$  0..m
         $y_i$   $\leftarrow$  i
        oneDif  $\leftarrow$  augment( $\left[ \begin{matrix} (\alpha_i)^2 & -2 \cdot (\alpha_i)^2 & 2 \cdot (\alpha_{i+1})^2 & -(\alpha_{i+1})^2 \end{matrix} \right], x^T$ )
        twoDif  $\leftarrow$  augment( $\left[ \begin{matrix} 0 & \alpha_i & \alpha_{i+1} & 0 \end{matrix} \right], x^T$ )
        oneDifF  $\leftarrow$  shiftCyrRigthMul(oneDifT, 2 * i)
        twoDifF  $\leftarrow$  shiftCyrRigthMul(twoDifT, 2 * i)
        M  $\leftarrow$  stack(M, oneDifF, twoDifF)
      M  $\leftarrow$  submatrix(M, 1, rows(M) - 1, 0, cols(M) - 1)
      M  $\leftarrow$  stack(augment(firsteLine, xT), M, augment(xT, lasteLine))
    M  $\leftarrow$  stack(firsteLine, oneDif, twoDif, lasteLine) otherwise
  return M

```

Макрос формує вектор-стовбець вільних членів для лінійної системи розрахунку точок сегменту параметричного сплайну Без'є.

x - вхідний вектор-стовбець опорних точок кривої, що апроксимується;

α - вхідний вектор-стовбець параметрів що до опорних точок кривої.

```
formFreeMembPar(x, α) :=
  N ← rows(x) - 1
  M ← 2·N
  y0 ← -x0
  j ← 1
  for i ∈ 1..N - 1
    yj ← [-(αi-1)2 + (αi)2]·x1
    yj+1 ← (αi-1 + αi)·x1
    j ← j + 2
  yj ← -xN
  return y
```

Макрос створює функцію базового поліному Бернштейна.

n - порядок поліному;

k - порядковий номер базового поліному;

t - змінна функції поліному.

$$\text{basePolyBernsh}(n, k, t) := \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot (1-t)^k \cdot t^{n-k}$$

Макрос створює поліном у формі поліному Бернштейна.

q - вектор-стовбець коефіцієнтів поліному;

t - змінна функції поліному.

```
polyBernshForm(q, t) :=
  n ← rows(q) - 1
  x ← 0
  for k ∈ 0..n
    x ← x + qk · basePolyBernsh(n, k, t)
  return x
```

Макрос розділяє спільний вектор допоміжних точок на два спеціалізованих.
 v - вхідний вектор-стовбець допоміжних точок сегментів сплайнів Без'є.

```

separABKoor(v) :=
  N ← rows(v) - 1
  i ← 0
  j ← 0
  for n ∈ 0..N
    if mod(n,2) = 0
      xi ← vn
      i ← i + 1
    otherwise
      yj ← vn
      j ← j + 1
  return augment(x,y)

```

Макрос формує масив для сплайнів з опорних та допоміжних точок.
 x - вхідний вектор-стовбець опорних точок сегментів сплайнів Без'є;
 A - вхідний вектор-стовбець допоміжних точок сегментів сплайнів Без'є;
 B - вхідний вектор-стовбець допоміжних точок сегментів сплайнів Без'є

```

formBezePoints(x, A, B) :=
  N ← rows(x) - 2
  j ← 0
  for i ∈ 0..N
    yj ← xi
    yj+1 ← Ai
    yj+2 ← Bi
    j ← j + 3
  yj ← xN+1
  return y

```

Макрос формує вектор-стовбець точок сегменту сплайнів Без'є.
 q - масив опорних та допоміжних точок;
 N - потрібна кількість точок.

```

BezeSegment(q, N) :=
  tbeg ← 0
  tend ← 1
  Δt ←  $\frac{t_{end} - t_{beg}}{N}$ 
  for k ∈ 0..N
    Xk ← polyBernshForm(q, tbeg + k·Δt)
  return reverse(X)

```

Макрос вираховує точки кривої сегменту сплайну Без'є.
 x - масив опорних точок кривої.

```
formBezeVector(x) :=
  N ← rows(x) - 1
  BezeMatr ← formMatrixBeze(N)
  Q ← formFreeMemb(x)
  P ← lsolve(BezeMatr, Q)
  P ← separABKoor(P)
  A ← P<0>
  B ← P<1>
  P ← formBezePoints(x, A, B)
  return P
```

Макрос вираховує точки кривої сегменту параметричного сплайну Без'є.
 x - масив опорних точок кривої;
 α - вхідний вектор-стовбець параметрів що до опорних точок кривої.

```
formBezeVectorPar(x, alpha) :=
  N ← rows(x) - 1
  BezeMatr ← formMatrixBezePar(rows(x), alpha)
  Q ← formFreeMembPar(x, alpha)
  P ← lsolve(BezeMatr, Q)
  P ← separABKoor(P)
  A ← P<0>
  B ← P<1>
  P ← formBezePoints(x, A, B)
  return P
```

Макрос вираховує масив координат точок кривої, що утворюється з сегментів сплайнів Без'є.

P - масив точок сегментів сплайнів Без'є;

N - кількість точок у масивах сегментів сплайну.

```
formBezeSplinePoints (P, N) :=
  M ← rows (P)
  M ← floor( $\frac{M}{3}$ ) - 1
  X ← 0
  row1 ← 0
  for i ∈ 0.. M
    row2 ← row1 + 3
    q ← submatrix(P, row1, row2, 0, 0)
    X ← stack(X, BezeSegment(q, N))
    z ← Xrows(X)-1
    X ← submatrix(X, 0, rows (X) - 2, 0, 0)
    row1 ← row2
  X ← submatrix(X, 1, rows (X) - 1, 0, 0)
  X ← stack(X, z)
  return X
```

Проведемо випробування макросів на довільних прикладах

Матриця координат табличних точок функції, що інтерполюється $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \\ 1 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Сформувати вектор абсцис з матриці табличних точок функції $x := Q^{(0)}$

Сформувати вектор ординат з матриці табличних точок функції $y := Q^{(1)}$

Розрахувати вектор абсцис точок сплайнів Без'є $P_x := \text{formBezeVector}(x)$

Розрахувати вектор ординат точок сплайнів Без'є $P_y := \text{formBezeVector}(y)$

Розрахувати вектор параметрів для параметричних сплайнів Без'є $\alpha := \text{parametpsEval}(Q)$

Розрахувати вектор абсцис точок параметричних сплайнів Без'є $S_x := \text{formBezeVectorPar}(x, \alpha)$

Розрахувати вектор ординат точок параметричних сплайнів Без'є $S_y := \text{formBezeVectorPar}(y, \alpha)$

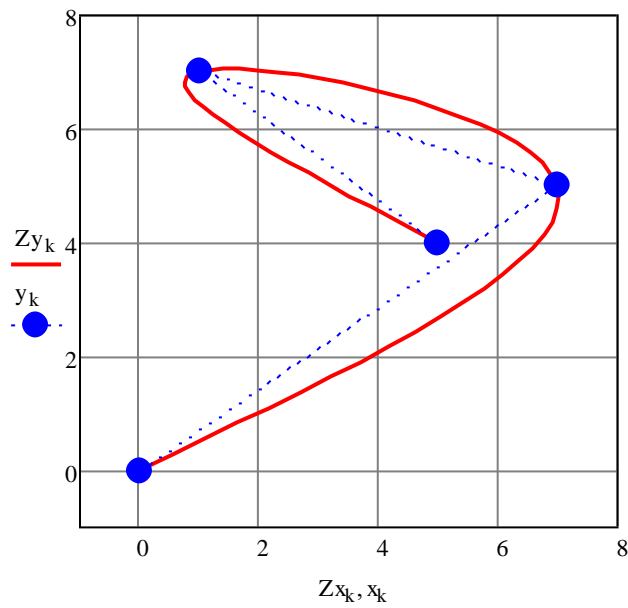
Задати кількість точок на сегмент кривої Без'є $M := 20$

Розрахувати вектор абсцис для графіку сплайнів Без'є $Z_x := \text{formBezeSplinePoints}(P_x, M)$

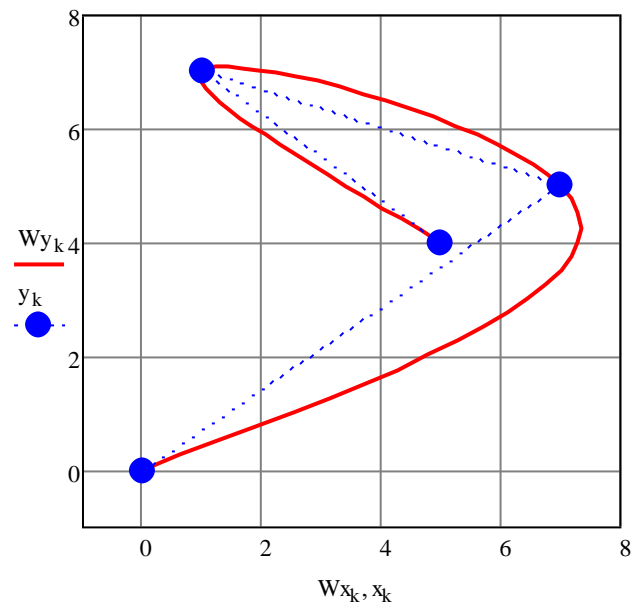
Розрахувати вектор ординат для графіку сплайнів Без'є $Z_y := \text{formBezeSplinePoints}(P_y, M)$

Розрахувати вектор абсцис точок параметричних сплайнів Без'є $W_x := \text{formBezeSplinePoints}(S_x, M)$

Розрахувати вектор ординат точок параметричних сплайнів Без'є $W_y := \text{formBezeSplinePoints}(S_y, M)$



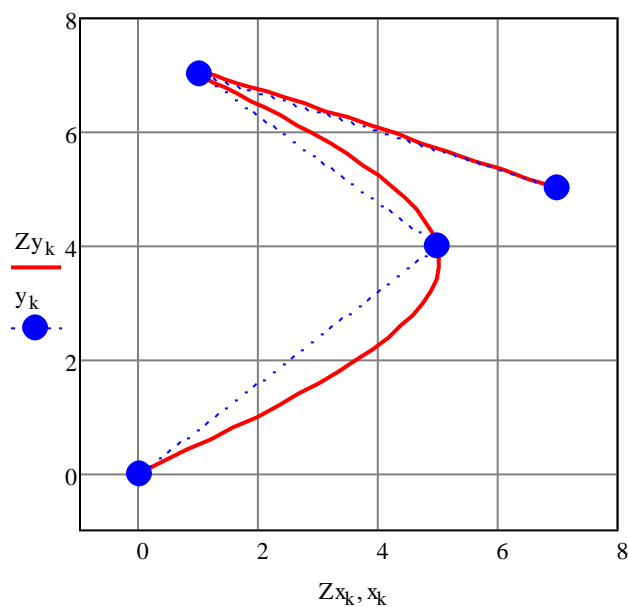
непараметризована крива



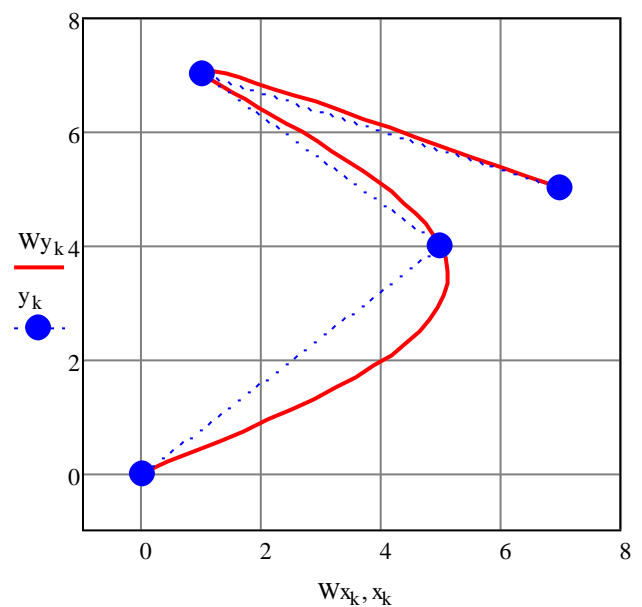
параметризована крива

Рисунок 4.1 – Графіки прикладів кривих Без'є

Матриця координат табличних точок функції, що інтерполюється $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 4 \\ 1 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$



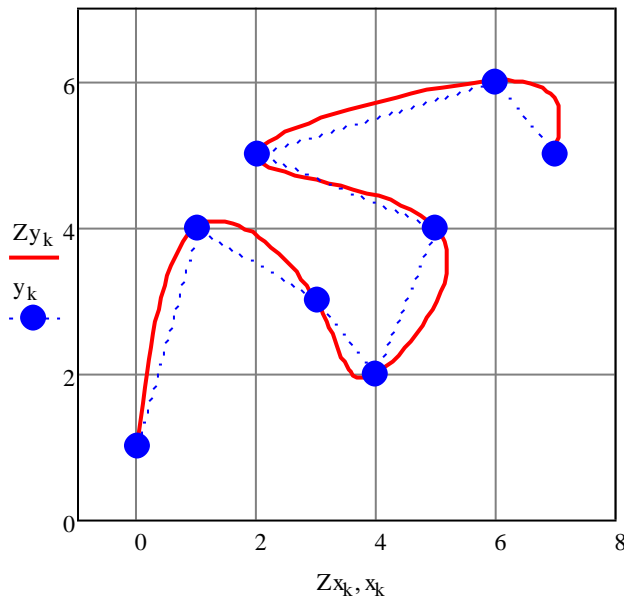
непараметризована крива



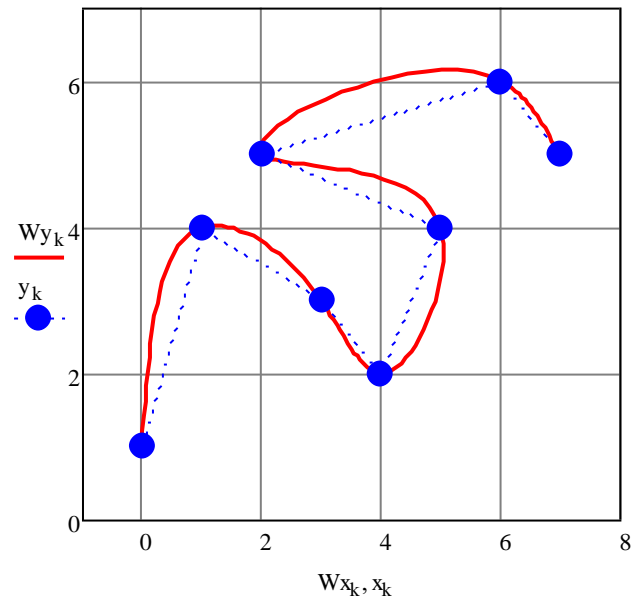
параметризована крива

Рисунок 4.2 – Графіки прикладів кривих Без'є

Матриця координат табличних точок функції, що інтерполюється $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & 5 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$



непараметризована крива



параметризована крива

Рисунок 4.3 – Графіки прикладів кривих Без'є

Тестові приклади свідчать про можливість застосування сплайнів Без'є до апроксимації кривих будь-якої складності.

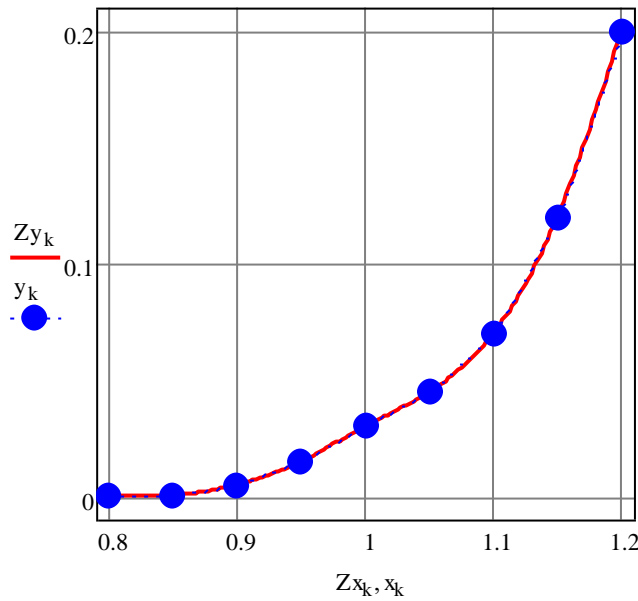
Тепер слід показати як цей метод застосувати до апроксимації ВАХ нелінійних електронних елементів. З цією метою треба взяти довідникові дані про ВАХ реальних елементів, провести їхню оцифровку та побудувати графіки, застосувавши розроблені в цій роботі макроси.

Проведемо випробування на прикладі: біполярного транзистору, тунельного діоду та тиристора.

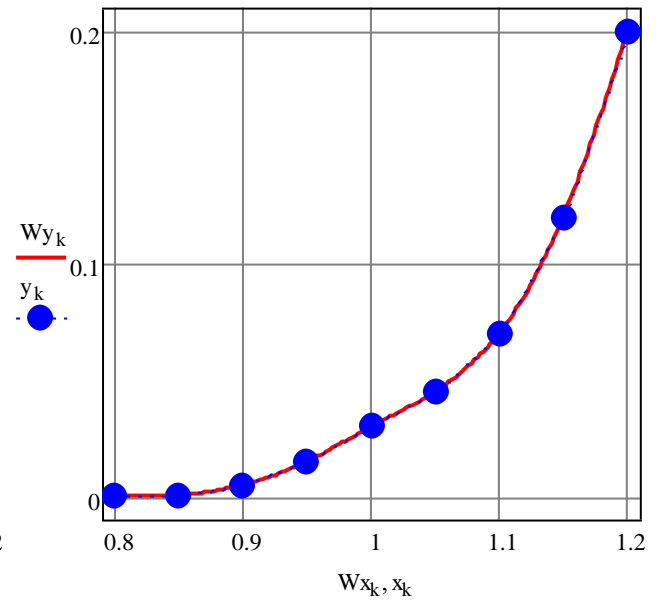
Побудуємо вхідну та вихідну ВАХ біполярного транзистора.

Матриця координат точок вхідної ВАХ біполярного транзистора $\mathbf{Q} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & 5 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$



непараметризована крива

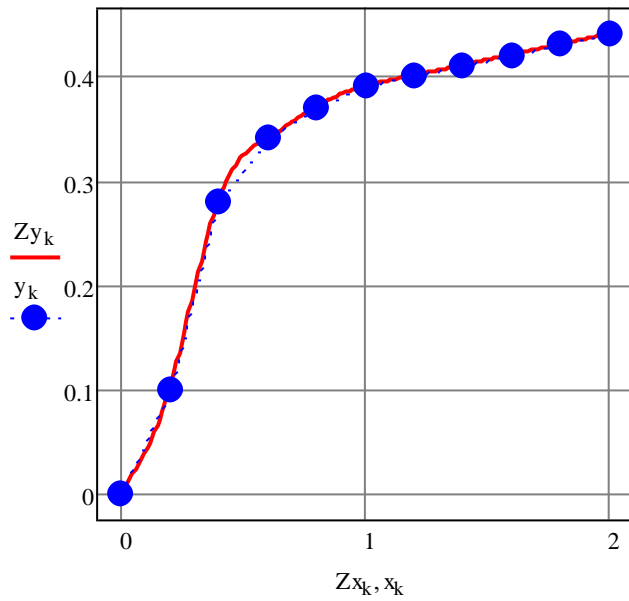


параметризована крива

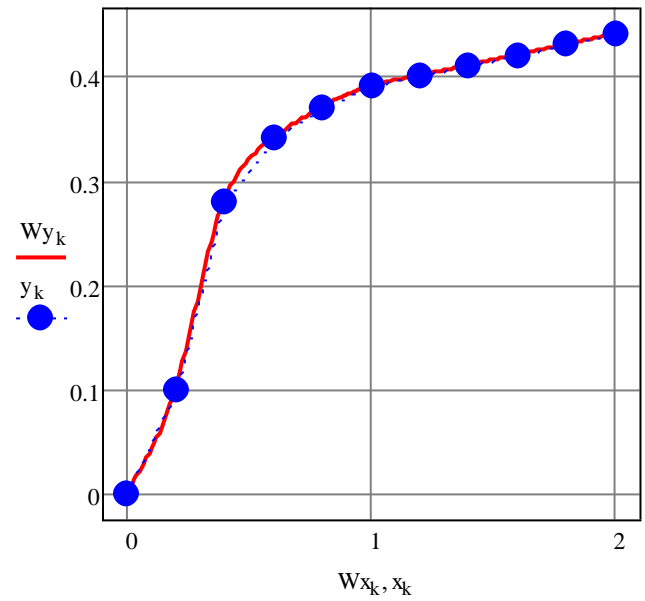
Рисунок 4.4 – Графіки вхідної ВАХ біполярного транзистора, апроксимованих кривими Без'є

Матриця координат точок вихідної ВАХ біполярного транзистора $\mathbf{Q} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & 5 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$



непараметризована крива



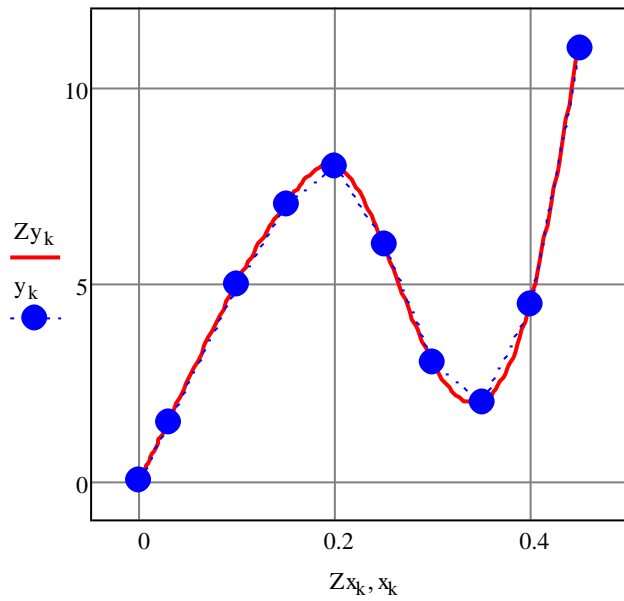
параметризована крива

Рисунок 4.5 – Графіки вихідної ВАХ біполярного транзистора, апроксимованих кривими Без'є

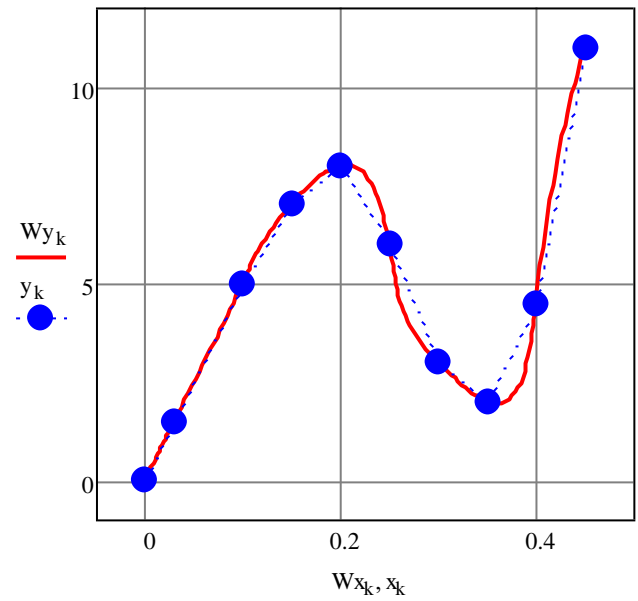
Побудуємо вхідну та вихідну ВАХ тунельного діода.

Матриця координат точок ВАХ тунельного діода $Q :=$

0	0
0.03	1.5
0.1	5
0.15	7
0.2	8
0.25	6
0.3	3
0.35	2
0.4	4.5
0.45	11



непараметризована крива



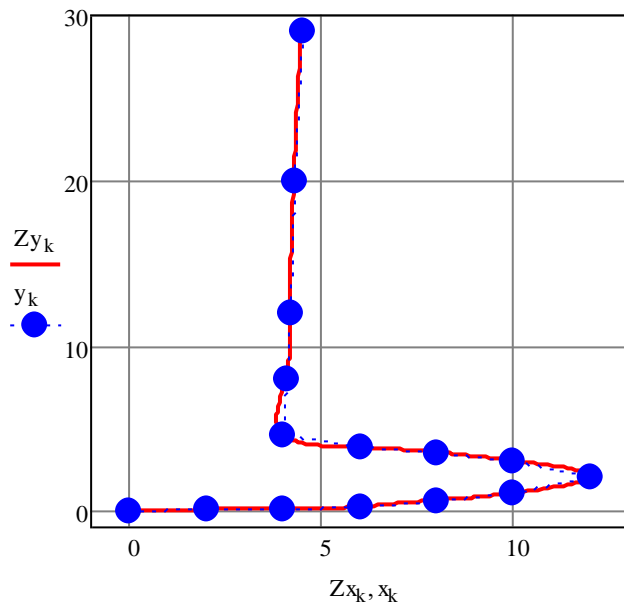
параметризована крива

Рисунок 4.6 – Графіки вихідної ВАХ тунельного діоду, апроксимованих кривими Без'є

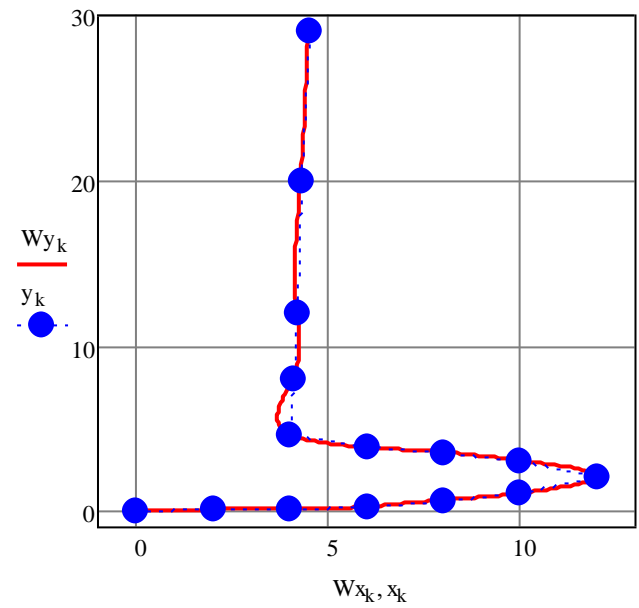
Побудуємо вхідну та вихідну ВАХ тиристора.

Матриця координат точок ВАХ тиристора $Q :=$

0	0
2	0.03
4	0.06
6	0.2
8	0.6
10	1.0
12	2.05
10	3.0
8	3.5
6	3.8
4	4.6
4.1	8
4.2	12
4.3	20
4.5	29



непараметризована крива



параметризована крива

Рисунок 4.7 – Графіки вихідної ВАХ тиристорів, апроксимованих кривими Без'є

Графіки з рис. 4.4 – рис. 4.7 показують, що метод апроксимації ВАХ нелінійних радіоелектронних елементів непараметризованими та параметризованими сплайнами Без'є дозволяє відтворити аналітичні формули на основі табличних даних, отриманих шляхом висірювань.

ВИСНОВКИ

Проектування сучасних засобів телекомунікацій обов'язково відбувається з використанням комп'ютерних систем розрахунку та моделювання радіоелектронної апаратури. Комп'ютерні пакети автоматизованого проектування оперують математичними моделями електронних елементів. Основою математичних моделей елементів є залежності між струмом та напругою на їхніх вихідних контактах, які зазвичай мають назву вольт-амперних характеристик.

Для того щоб ВАХ могла бути застосована при розробці математичної моделі треба сформулювати її аналітичний вираз на підґрунті табличних даних, отриманих шляхом вимірювань. Подолати цю проблему слід використовуючи методи апроксимації або інтерполяції функціональних математичних залежностей, поданих парами або кортежами величин.

Означених методів апроксимації або інтерполяції розроблено та відомо достатньо багато, але не існує єдиного універсального, придатного на всі випадки. Тому завжди актуальною залишається проблема обрання того чи іншого методу для використання в конкретній задачі.

За результатами виконаної роботи можна зробити низку висновків:

- 1) в роботі розглянуто метод апроксимації ВАХ нелінійних елементів кривими, синтезованими кубічними сплайнами Без'є;
- 2) використання сплайнів Без'є забезпечує гарне наближення синтезованого аналітичного запису функції до сукупності вимірних даних;
- 3) отриманий в результаті апроксимації аналітичний запис функції ВАХ використовує зручну форму поліномів третього ступеню;
- 4) використання кубічних сплайнів Без'є в складі математичних моделей нелінійних елементів не вимагає особливо потужних обчислювальних ресурсів комп'ютерної техніки;
- 5) використання сплайнів Без'є дозволяє синтезувати аналітичні функції для ВАХ сформованих багатозначними функціями;
- 6) врахування специфіки характеристик, що обробляються, можливе застосування такими різновидами сплайнів Без'є як параметризовані та непараметризовані сплайнові сегменти;
- 7) отримані результати досліджень у вигляді графіків свідчать про більш привабливе застосування непараметризованих сплайнів щодо апроксимації ВАХ нелінійних елементів.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ

1. Прокис Дж. Цифровая связь [Текст]. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с. 1988, – 272 с.
2. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение [Текст]. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
3. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы [Текст]. – М.: Высш. шк., 1988 – 448 с.
4. Бабак В. П., Хандецький В. С., Шрюфер Е. Обробка сигналів [Текст]. – К.:Либідь, 1999. – 496с.
5. Основи електроніки : навч. посіб. / Васюра А.С., Дорощенко Г.Д., Кожем'яко В.П., Лисенко Г.Л. [Текст]. – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 197 с.
6. Шелевицький І.В., Шутко М.О., Шутко В.М., Колганова О.О. Сплаيني в цифровой обробці даних і сигналів [Текст]. – Кривий Ріг: Видавничий дім 2007р. – 232., іл.
7. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование [Текст]. – М.: Высш. школа, 1990. – 544 с.
8. Борович З.И. Определители и матрицы [Текст]. – М.: Наука, 1988. – 184 с.
9. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций [Текст]. – М.: Наука, 1988. – 352 с.
10. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам [Текст]. – М.: Радио и связь, 1985. – 304 с.
11. Денисюк В.П., Марченко Б.Г. Сплаины и их приложения в задачах моделирования и обработки измерительных сигналов / Национальный технический ун-т Украины "Киевский политехнический ин-т" [Текст]. – К., 1995. – 245с.
12. Завялов Ю.С., Леус В.А. Сплаины в инженерной геометрии [Текст]. – М.:Машиностроение, 1985. – 224 с.
13. Лоуссон, Хенсон. Численное решение задач метода наименьших квадратов [Текст]. – М.: Мир, 1988. –225 с.
14. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами [Текст]. – Киев: Наук. думка, 1989. –372 с.
15. Методичні вказівки до дипломного проектування бакалаврів для студентів усіх форм навчання напряму 6.05903 «Телекомунікації» по кафедрі

«Мережі зв'язку» [Текст] / Упоряд. В.В.Ємельянов, Ю.М. Бідний, І.А. Філіппенко. – Харків: ХНУРЕ, 2009. – 36 с.