

СИНФАЗНЕ ЗБУДЖЕННЯ РЕШІТКИ, УТВОРЕНОЇ ПЛОСКИМИ НАПІВОБМЕЖЕНИМИ ХВИЛЕВОДАМИ

ЧУМАЧЕНКО В.С., ЧУМАЧЕНКО С.В.

Пропонується точний розв'язок задачі про розсіяне поле у фазированій решітці з напівобмежених плоских хвилеводів при синфазному збудженні. Застосовується метод розкладання функцій у гільбертовому просторі з відтворюючим ядром у ряд за вибірковими значеннями.

1. Актуальність дослідження

Строгі аналітичні методи розв'язку крайових задач займають особливе місце в математичній фізиці. Отримані з їхньою допомогою результати мають велику цінність, оскільки є основою для наступних чисельних розрахунків. Вивчення і розвиток конструктивних методів вирішення крайових задач, що допускають побудову строгого аналітичного розв'язку, продовжують залишатися актуальними у всіх наукових напрямках.

Більшість методів, що використовуються при розрахунку фазированих антенних решіток (ФАР), ґрунтуються на класичній теорії [1,2], аналітичних методах [3-5], чисельних і експериментальних результатах [6]. Аналітичні методи часто є наближеними, а побудовані на їхній основі чисельні – припускають наявність часових витрат, пов'язаних з обчислювальною складністю і підвищенням точності результатів.

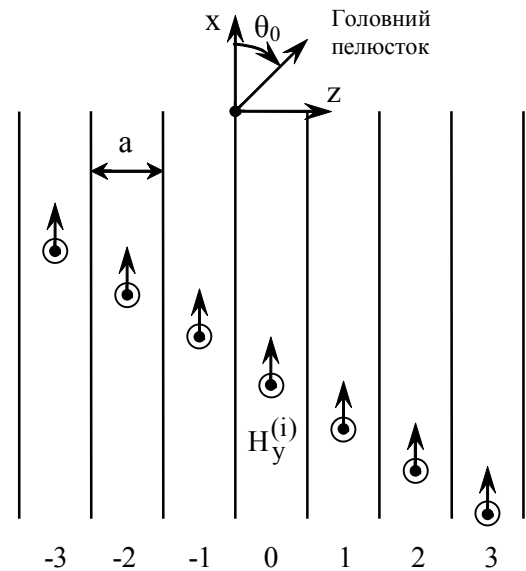
Виходячи зі сказаного вище, виникає необхідність у створенні ефективних аналітичних методів розв'язку граничних задач, що дозволяють будувати точний розв'язок, зручний для чисельного аналізу.

Ціль – розробка методу для аналізу й розрахунку певного класу ФАР з метою вивчення їхніх електродинамічних характеристик, що дасть відповідну техніку аналізу і синтезу, необхідну при розробці антен.

2. Постановка і геометрія задачі

Розглянемо задачу про нескінченну фазировану решітку, утворену плоскими напівобмеженими хвилеводами (рисунк), стінки яких вважаються нескінченно тонкими, ідеально провідними; ширина між ними a . Падаюче поле в кожному із хвилеводів має однакову амплітуду і для будь-яких двох сусідніх з них зрушене за фазою на однаковий кут (синфазне збудження) [1].

Нехай θ_0 – кут нахилу головного пелюстка діаграми спрямованості антени, що відлічується від осі x . Тоді фаза падаючого поля в m -му хвилеводі повинна описуватися множителем $\exp(imu)$, де $u = ka \sin \theta_0$.



Вважаючи, що падаюче поле у хвилеводній області складається тільки з основної хвилі типу ТЕМ, для m -го хвилеводу маємо таке зображення компонентів поля:

$$H_y^{(i)} = \psi^{(i)} = e^{ikx} e^{imu}, \quad (1)$$

$$E_x^{(i)} = \frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} \psi^{(i)}, \quad (2)$$

$$E_z^{(i)} = \frac{1}{\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial x} \psi^{(i)}, \quad (3)$$

за умови $x < 0$ і $ma < z < (m+1)a$.

Потрібно визначити поле, що випромінюється у вільний простір і відбивається в хвилеводі.

3. Метод розв'язку

Використовуємо метод зшивання (або метод часткових областей), що зручний для дослідження структур складного вигляду, які розпадаються на дві й більш прості суміжні області. Для кожної з них можна одержати розв'язок за допомогою розподілу змінних. Перший крок полягає в зображенні невідомих полів для кожної часткової області у вигляді розкладання за власними функціями. У прямокутній системі координат компоненти електромагнітного поля є розв'язками скалярного рівняння Гельмгольца у відповідній області, побудова періодичного рішення якого, що задовольняє граничним умовам, є змістом теореми Флоке. Ортонормовані функції поперечних координат являють собою систему скалярних просторових гармонік (гармонік Флоке), на основі яких будуються повні системи векторних гармонік [2].

Оскільки явний вигляд для взаємо-ортогональних власних функцій відомий, задача зводиться до визначення амплітудних коефіцієнтів при власних функціях у розкладанні поля в кожній частковій області. Для цього необхідне виконання умов безперервності полів на границях часткових областей. Внаслідок цієї вимоги і використання властивостей ортогональності власних функцій розв'язок зводиться до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) щодо невідомих ам-

плітуд власних хвиль, знайти точне рішення якої в загальному випадку неможливо. Звичайно обмежуються одержанням наближеного розв'язку за допомогою методів редукції або послідовних наближень [3].

Розглянута решітка з тонких ідеально провідних пластин являє собою модель, для якої при певній ідеалізації можливе точне рішення функціонально-теоретичним (метод відрахувань) [1], або методом Вінера-Хопфа [1,5]. У методі відрахувань вводиться інтеграл від спеціальної аналітичної функції, потім відрахування підінтегральної функції пов'язуються з невідомими коефіцієнтами. Область його застосування обмежена та поширюється на задачі для решіток з паралельних пластин кінцевої товщини – модифікований метод відрахувань [1,4].

Існує, однак, цілий клас крайових задач, для яких нескінченні СЛАР допускають точний розв'язок. Розширити його дозволяє метод розкладання функцій у ряди за вибірковими значеннями, що ґрунтується на таких міркуваннях. Розглянемо деякий клас A функцій, визначених на множині T . Будемо вважати, що функція $f \in A$ може бути розкладена в ряд за вибірковими значеннями у точках $t_i \in T$, якщо існує набір вибіркових функцій $\psi_i(s, t_i)$, таких, що:

$$1) \psi_i(s, t_i) \in A,$$

$$2) \psi_i(t_i, t_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j; \end{cases}$$

3) для будь-якої функції $f \in A$ ряд

$$f(s) = \sum_i f(t_i) \psi_i(s, t_i)$$

сходиться рівномірно для $s \in T$.

Звідси випливає теорема [7].

Нехай існує абстрактний гільбертовий простір H з відтворюючим ядром $K(s, t)$, визначеним на множині T . Нехай $\{\varphi_i(s, t_i)\}$, $t_i \in T$ – повна ортонормована система в H . Якщо існують ненульові дійсні постійні c_i такі, що

$$\varphi_i(s, t_i) = c_i K(s, t_i), \quad |K(t, t)| \leq c_i < \infty, \quad t \in T,$$

то розкладання за повною ортонормованою системою для кожної $f \in A$, яка має вигляд

$$f(s) = \sum a_i \varphi_i(s, t_i), \quad s \in T, \quad a_i = (f, \varphi_i),$$

є рядом за вибірковими значеннями.

Фундаментальне дослідження проблеми розкладання за вибірковими значеннями було виконано К.Шенноном і В.А. Котельниковим.

4. Розв'язок задачі

4.1. Зображення невідомих полів

Оскільки розглянута структура однорідна уздовж координати y , відбите поле складається тільки з хвиль типу $TM_{n,0}$. Таким чином, у хвилеводній області поле описується функцією

$$\psi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^m \cos\left[\frac{n\pi}{a}(z - ma)\right] e^{\omega_n x}, \quad (4)$$

де $x < 0$, $ma < z < (m+1)a$, $\omega_n = [(n\pi/a)^2 - k^2]^{1/2}$.

У вільному напівпросторі поле внаслідок періодичності структури представляється сумою просторових гармонік вигляду

$$\psi(x, z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} B_p e^{i\alpha_p z} e^{-\Omega_p x}, \quad x > 0, \quad (5)$$

де $\alpha_p = (2p\pi + u)/a$ і $\Omega_p = (\alpha_p^2 - k^2)^{1/2}$.

Головний пелюсток діаграми спрямованості описується основною просторовою гармонікою поля випромінювання, тобто у виразі (5) це член з індексом $p = 0$. Видно, що напрямком випромінювання головного пелюстка визначається кут θ_0 .

4.2. Формулювання граничних умов

Використовуючи умову безперервності дотичних складових поля на поверхні $x = 0$, що визначає зшивання функцій ψ і $d\psi/dx$ на цій поверхні, одержимо систему функціональних рівнянь

$$e^{imu} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^m \cos\left[\frac{n\pi}{a}(z - ma)\right] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} B_p e^{i\alpha_p z}, \quad (6)$$

$$ike^{imu} + \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n A_n^m \cos\left[\frac{n\pi}{a}(z - ma)\right] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-\Omega_p) B_p e^{i\alpha_p z}, \quad (7)$$

де $ma < z < (m+1)a$.

4.3. Визначення невідомих коефіцієнтів

Перепишемо останню систему у вигляді

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^m e^{-imu}) \cos\left[\frac{n\pi}{a}(z - ma)\right] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} B_p e^{i\alpha_p(z - ma)}, \quad (8)$$

$$ik + \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n (A_n^m e^{-imu}) \cos \left[\frac{n\pi}{a} (z - ma) \right] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-\Omega_p) B_p e^{i\alpha_p (z - ma)}, \quad (9)$$

тут $ma < z < (m+1)a$.

Введемо позначення: $z' = z - ma$. Тоді з наведених рівнянь випливає співвідношення для амплітуд власних хвиль у різних хвилеводах:

$$A_n^m = A_n^0 e^{imu}, \quad (10)$$

де $n = 0, 1, 2, \dots$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

При $m = 0$ з (8), (9) одержимо:

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^0 \cos \frac{n\pi}{a} z = \sum_{p=-\infty}^{\infty} B_p e^{i\alpha_p z}, \quad (11)$$

$$ik + \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n A_n^0 \cos \frac{n\pi}{a} z = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-\Omega_p) B_p e^{i\alpha_p z}, \quad (12)$$

в інтервалі $0 < z < a$.

Таким чином, задача зводиться до розгляду одного періоду $m = 0$.

Розглянемо (11), (12) і одержимо систему алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів $\{A_n\}$. Для цього помножимо обидві частини рівнянь на $e^{-i\alpha_q z}$ і проінтегруємо за z від 0 до a . У результаті отримаємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^0 \frac{1 - (-1)^n e^{-iu}}{\omega_n^2 - \Omega_q^2} + \frac{1 - e^{-iu}}{\omega_0^2 - \Omega_q^2} = \frac{a}{i\alpha_q} B_q, \quad (13)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^0 \omega_n \frac{1 - (-1)^n e^{-iu}}{\omega_n^2 - \Omega_q^2} - \omega_0 \frac{1 - e^{-iu}}{\omega_0^2 - \Omega_q^2} = \frac{a}{i\alpha_q} B_q (-\Omega_q), \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (14)$$

де $\omega_0 = -ik$. З (13) та (14), маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n e^{-iu}}{\omega_n - \Omega_q} A_n^0 = \frac{1 - e^{-iu}}{\omega_0 + \Omega_q}, \quad (15)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega \frac{1 - (-1)^n e^{-iu}}{\gamma_n + \Omega_q} A_n^0 - \frac{1 - e^{-iu}}{\omega_0 - \Omega_q} = \frac{i2a\Omega_q}{\alpha_q} B_q, \quad (16)$$

$q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Оскільки з постановки задачі випливає, що $\{A_n^0\}$ не залежать від q , знайдемо його з (15) при $q = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-iu} \cos n\pi}{\omega_n - \Omega_0} A_n^0 = \frac{1 - e^{-iu}}{\omega_0 + \Omega_0}. \quad (17)$$

Будемо шукати невідомі коефіцієнти $\{A_n^0\}$ у вигляді:

$$A_n^0 = \varepsilon_n A \frac{u \sin \pi \left(\frac{u}{\pi} - n \right)}{a(\omega_n + \Omega_0)(1 - e^{-iu} \cos n\pi)}, \quad (18)$$

де A – невідома константа, що не залежить від n . Підставив (18) у (17), маємо

$$A = \frac{e^{-iu} - 1}{a(\omega_0 + \Omega_0)}.$$

Отже, розв'язуючи підсистему (15) щодо невідомих коефіцієнтів $\{A_n^0\}$, одержуємо

$$A_n^0 = \varepsilon_n \frac{u \sin \pi \left(\frac{u}{\pi} - n \right)}{a(\omega_n + \Omega_0)(1 - e^{-iu} \cos n\pi)} \frac{(e^{-iu} - 1)}{a(\omega_0 + \Omega_0)}, \quad (19)$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 2, & n = 1, 2, \dots; \end{cases} \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

Коефіцієнт (19) обертає (15) у тотожність [8, формула 5.139, с. 350]. Підставляючи (19) у (16) і обчислюючи суму ряду, що входить у (16), знаходимо коефіцієнт B_q :

$$B_q = \frac{\alpha_q (e^{-iu} - 1)}{2ia\Omega_q (\omega_0 - \Omega_q)}. \quad (20)$$

5. Порівняння результатів та висновки

Отже, отриманий точний розв'язок задачі про розсіяне поле у фазированій решітці з напівобмежених плоских хвилеводів при синфазному збудженні. Сформульована задача вирішена методом зшивання із застосуванням гармонік Флоке, як це наведено в [1], але у поєднанні з методом розкладання функцій у гільбертовому просторі з відтворюючим ядром у ряд за вибірковими значеннями.

При обчисленні деяких рядів, що зустрічаються в процесі розв'язку задачі, використовувався метод розкладання функцій у гільбертовому просторі з відтворюючим ядром у ряд за вибірковими значеннями. Застосування цього методу в порівнянні з методом відрахувань дозволило уникнути нескінченних добутоків у зображеннях для амплітудних коефіцієнтів [1]:

$$A_0^0 = \frac{\omega_0 - \Omega_0}{\omega_0 + \Omega_0} \exp \left(\frac{2\omega_0 a}{\pi} \ln 2 \right) \times \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 + \omega_0 / \omega_m}{1 - \omega_0 / \omega_m} e^{-2\omega_0 a / m\pi} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - \omega_0 / \Omega_m)(1 - \omega_0 / \Omega_{-m})}{(1 + \omega_0 / \Omega_m)(1 + \omega_0 / \Omega_{-m})} e^{2\omega_0 a / m\pi}, \\ & A_n^0 = \frac{e^{-iu} - 1}{1 - (-1)^n e^{-iu}} \times \\ & \times \exp\left[\frac{(\omega_n + \omega_0)a}{\pi} \left(\ln 2 - \frac{1}{n}\right)\right] \frac{2}{1 - \omega_n / \omega_0} \times \\ & \times \prod_{m=1}^{\infty} (n) \frac{1 + \omega_0 / \omega_m}{1 - \omega_n / \omega_m} e^{-(\omega_n + \omega_0)a / m\pi} \frac{1 - \omega_n / \Omega_m}{1 + \omega_0 / \Omega_0} \times \\ & \times \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - \omega_n / \Omega_m)(1 - \omega_n / \Omega_{-m})}{(1 + \omega_0 / \Omega_m)(1 + \omega_0 / \Omega_{-m})} e^{(\omega_n + \omega_0)a / m\pi}, \\ & n = 1, 2, 3, \dots \\ & B_q = \frac{\alpha_q}{ia\Omega_q} \frac{1 - e^{-iu}}{\omega_0 - \Omega_q} \times \\ & \times \exp\left[\frac{(\omega_0 - \Omega_q)a}{\pi} \ln 2\right] \frac{1}{1 + \Omega_q / \omega_0} \times \\ & \times \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 + \omega_0 / \omega_m}{1 + \Omega_q / \omega_m} e^{(\Omega_q - \omega_0)a / m\pi} \frac{1 + \Omega_q / \Omega_0}{1 + \omega_0 / \Omega_0} \times \\ & \times \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1 + \Omega_q / \Omega_m)(1 + \Omega_q / \Omega_{-m})}{(1 + \omega_0 / \Omega_m)(1 + \omega_0 / \Omega_{-m})} e^{(\omega_0 - \Omega_q)a / m\pi}, \\ & q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Отримані розв'язки (17), (18) є точними і застосовуються в тих випадках, коли стінки хвильоводів мають нескінченно малу товщину. З їхньою допомогою можна робити розрахунки для хвильоводів різних розмірів.

Зіставляючи здобуті зображення зі співвідношеннями з [1, с.67, (2.6.16), (2.6.17)], що виражають невідомі коефіцієнти $\{A_n^0\}$ і $\{B_q\}$ через аналітичну функцію $f(w)$:

$$\begin{aligned} A_n^0 &= \frac{\text{Res} f(\omega_n)}{1 - (-1)^n e^{-iu}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ B_q &= \frac{\alpha_q}{i2a\Omega_q} f(-\Omega_q), \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned}$$

можна стверджувати, що

$$\begin{aligned} \text{Res} f(\omega_n) &= \varepsilon_n \frac{u \sin \pi \left(\frac{u}{\pi} - n\right)}{a(\omega_n + \Omega_0)} \frac{e^{-iu} - 1}{a(\omega_0 + \Omega_0)}, \\ f(-\Omega_q) &= \frac{e^{-iu} - 1}{\omega_0 - \Omega_0}. \end{aligned}$$

У запропонованому рішенні відсутня досить громіздка побудова функції $f(w)$, явний вираз якої [1, с.67, (2.6.18)] через нескінченні добутки свідчить про неможливість її точного обчислення:

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1 - e^{-iu}}{w + \omega_0} \exp\left[\frac{(w + \omega_0)a}{\pi} \ln 2\right] \frac{2}{1 - w / \omega_0} \times \\ & \times \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 + \omega_0 / \omega_m}{1 - w / \omega_m} e^{-(w + \omega_0)a / m\pi} \frac{1 - w / \Omega_0}{1 + \omega_0 / \Omega_0} \times \\ & \times \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - w / \Omega_m)(1 - w / \Omega_{-m})}{(1 + \omega_0 / \Omega_m)(1 + \omega_0 / \Omega_{-m})} e^{(w + \omega_0)a / m\pi}. \end{aligned}$$

Література: 1. *Митра Р., Лу С.* Аналитические методы теории волноводов: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. 328с. 2. *Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч.* Теория и анализ фазированных антенных решеток: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. 455с. 3. *Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г.* Дифракция волн на решетках. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973. 288с. 4. *Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А.* Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. К.: Наук. думка, 1984. 296с. 5. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 280с. 6. *Sergey P. Skobelev.* Shaping of Flat-Topped Element Patterns in an Array of Slow-Wave Strip Structures Excited by Parallel-Plate Waveguides // IEEE Transactions on antennas and propagation. Vol. 49, N12, December 2001. P.1763-1768. 7. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. М.: Гостехиздат, 1951. 8. *Бухгольц Г.* Расчет электрических и магнитных полей: Пер. с нем. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 712с.

Надійшла до редколегії 21.10.2001

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, проф. Чурюмов Г.І.

Чумаченко Віктор Савелійович, канд. фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник ХНФТЦ НАНУ. Наукові інтереси: математична фізика. Адреса: Україна, 61145, Харків, вул. Новгородська, 1, тел. 32-45-67.

Чумаченко Світлана Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри АПОТ ХНУРЕ. Наукові інтереси: математична фізика. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Леніна, 14, тел. 40-93-26.