

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

АТЕСТАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Застосування методу скінченних сум Фур'є для відновлення функцій,
заданих у областях з накладаннями
(тема)

Виконав:

студент 2 курсу, групи САУМ-19-1

Стародубець А.О.

(прізвище, ініціали)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. Литвин О.Г.

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

(підпис)

Тевяшев А.Д.

(прізвище, ініціали)

2020 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ _____ ” _____ 2020 р.

ЗАВДАННЯ
НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Стародубцю Андрію Олександровичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Застосування методу скінченних сум Фур'є для відновлення функцій, заданих у областях з накладаннями

затверджена наказом по університету від 23 жовтня 2020 р. № 1420 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 грудня 2020 р.

3. Вихідні дані до роботи проекційні дані, отримані з тестових задач, в яких відшукувана функція задана в квадраті з носієм у областях, утворених накладанням областей, обмежених колами, еліпсами та квадратами.

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз проблеми реконструкції зображень та постановка задач дослідження

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз проблеми _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	вересень 2020 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	жовтень – листопад 2020 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	листопад – грудень 2020 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	листопад – грудень 2020 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	грудень 2020 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	грудень 2020 р.	виконано

Дата видачі завдання 1 вересня 2020 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Литвин О.Г.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 109 с., 12 табл., 51 рис., 1 дод., 11 джерел.

КОМП'ЮТЕРНА ТОМОГРАФІЯ, МЕТОД СКІНЧЕННИХ СУМ, РЯДИ ФУР'Є, ЯДРО ФЕЙЄРА, КОЕФІЦІЄНТИ ФУР'Є, ПЕРЕТВОРЕННЯ РАДОНА, ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІЇ.

Об'єкт дослідження – процес відтворення внутрішньої структури тіла на основі проєкційних даних, що надходять з комп'ютерного томографа.

Мета роботи – розробка ефективних алгоритмів для відновлення функцій за відомими проєкційними даними.

Методи дослідження – для розв'язання задачі відновлення функції використовується метод скінченних сум Фур'є.

В даній роботі розглядаються теоретичні відомості, а також наведена практична частина, в якій розв'язано декілька тестових задач на відновлення функції з носієм у областях з накладаннями кругів, еліпсів та квадратів. Також у додатку до роботи є програма, розроблена у системі комп'ютерної математики «Mathcad» для розв'язання задач подібного типу.

ABSTRACT

Introductory note: 109 pages, 12 tables, 51 figures, 1 appendixes, 11 sources.

COMPUTER TOMOGRAPHY, FINITE SUM METHOD, FOURIER COEFFICIENTS, FOURIER ROWS, FEYER KERNEL, RADON TRANSFORM, RECOVERY OF FUNCTION.

Object of research – the process of reproduction of the internal structure of the body on the basis of projection data coming from a computer tomograph.

Purpose of work – development of effective algorithms for the restoration of functions according to known projection data.

Methods of research – the finite Fourier sum method is used to solve the problem of restoring the function.

In this paper we consider theoretical information, as well as the practical part in which several problems are solved for the recovery of a function with a carrier in the region with overlaps of circles, ellipses and squares. Also in the application to the work there is a program designed in the system of computer mathematics "Mathcad" for solving tasks of this type.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	8
1 Системний аналіз проблеми реконструкції зображень та постановка задач дослідження	10
1.1 Системний аналіз проблеми реконструкції зображень	10
1.1.1 Вербальна модель системи	10
1.1.2 Морфологічний опис системи	10
1.1.3 Функціональна модель системи	11
1.1.4 Інформаційна модель системи	13
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми реконструкції зображень	14
1.2.1 Модель аналізу проблеми	14
1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій	15
1.2.3 Модель вирішення проблеми	20
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	24
1.3.1 Змістовна постановка задачі	24
1.3.2 Формальна постановка задачі	28
1.4 Постановка задач дослідження	32
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	34
2.1 Ідея методу	34
2.2 Зведення подвійних інтегралів до повторних	35
2.3 Обчислення повторних інтегралів	47
3 Деякі відомості про кратні ряди Фур'є та Фейєра	50
3.1 Комплексна форма рядів Фур'є	50
3.2 Спряжений ряд	54
3.3 Кратні ряди Фур'є	55
3.4 Ряди Фейєра	58
4 Програмна реалізація	63

	7
4.1 Mathcad як система комп'ютерної математики.....	63
4.2 Опис програми.....	64
5 Результати обчислювального експерименту	66
5.1 Кількісні характеристики	66
5.2 Результати розв'язку задачі з носієм у області з накладанням двох еліпсів	66
5.3 Результати розв'язку задачі з носієм у області з накладанням круга, еліпса та квадрата	70
5.3.1 Випадок для неперервної функції	70
5.3.2 Випадок для розривної функції	72
5.4 Результати розв'язку задачі з носієм у області з накладанням двох кругів та двох еліпсів	75
5.5 Результати розв'язку задачі з носієм у області з накладанням чотирьох кругів.....	77
5.6 Результати розв'язку задачі з носієм у області з накладанням чотирьох еліпсів	79
5.7 Результати розв'язку задачі з носієм у області з накладанням одного квадрата, одного еліпса та трьох кругів.....	82
5.8 Результати розв'язку задачі з носієм у області з накладанням восьми кругів	84
6 Аналіз можливих застосувань	86
Висновки	87
Перелік джерел посилання	88
Додаток А Програмна реалізація у середовищі Mathcad	89

ВСТУП

Обчислювальна (або комп'ютерна) реконструктивна томографія є яскравим прикладом вибухового розвитку нового наукового напрямку, що проникає практично в усі галузі науки і техніки, в яких застосовуються або можуть бути застосовані будь-які види випромінювань. Вона знайшла широке застосування головним чином в медицині в сфері рентгенодіагностики. Однак різні томографічні методи на даний момент застосовуються в багатьох інших областях, таких, як радіоастрономія, електронна мікроскопія, біохімія, промисловість, фізика Землі, океану, космосу і т.п. В даний час обчислювальна томографія є цілком сформованою галуззю науки зі своїм колом завдань і методів їх вирішення. Число робіт, що відносяться до прикладної і теоретичної томографії, вимірюється тисячами. У багатьох випадках результати, одержані за допомогою пристроїв томографії, не можуть бути отримані ніякими іншими методами.

Методи реконструктивної томографії почали активно розвиватися в 60-х роках минулого століття, хоча математична база була, по суті, створена І. Радонем в 1917 р. Однак робота І. Радона, опублікована в працях Саксонської академії наук, не потрапила в поле зору дослідників і була забута. В даний час запропоновані Радонем методи широко використовуються.

Реконструктивна томографія в медицині стала використовуватися після публікації робіт А. Кормака в 1963-1964 рр.

Всі види томографії можна розділити на трансмісійну обчислювальну томографію і емісійну обчислювальну томографію. Крім того, за способом формування вихідних (проекційних) даних розрізняють паралельні і веєрні проєкції, а геометрію вимірювань поділяють на кругову (повну і неповну) і планарну.

Математично задача реконструктивної обчислювальної томографії зводиться до відновлення функції декількох змінних по відомим інтегралам від неї вздовж деяких множин (як правило, уздовж прямих). Хоча принципово це завдання було вирішено І. Радонем в 1917 р, вказавши спосіб інтегрального перетворення, що отримав його ім'я (перетворення Радона), значні зусилля великої

кількості дослідників були зосереджені на розробці досить ефективних в обчислювальному плані алгоритмів відновлення зображень і на подоланні труднощів, що виникають при дослідженні реальних об'єктів.

Методи реконструкції, що застосовуються в обчислювальній томографії, можна розділити на інтегральні та алгебраїчні. В інтегральних методах розгляд проводиться в неперервній формі, а дискретизація проводиться на кінцевому етапі безпосередньої реалізації алгоритму відновлення. При цьому основним математичним інструментом в трансмісійній томографії є апарат перетворення Радона, а в емісійній томографії – експоненціальне перетворення Радона.

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ РЕКОНСТРУКЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз проблеми реконструкції зображень

1.1.1 Вербальна модель системи

Проблема математичного моделювання томографічної реконструкції впливає з різних наукових областей. Найбільш поширена галузь науки у якій використовується томографічна реконструкція – медицина. Тобто, одне з головних призначень є діагностика головного мозку та інших внутрішніх органів методом комп'ютерної томографії, а також лікування інших неврологічних захворювань.

Об'єкт аналізу – «Лікувально-діагностична клініка».

Предмет аналізу – «Отримання результатів комп'ютерної томографії».

Точка зору: лікар.

Ціль: підтвердити або спростувати діагноз.

Головними входами системи є фінансування та пацієнт, а вихід – діагноз. Механізмами системи являються апаратне забезпечення та програмне забезпечення. У ролі керування системою виступають лікар та методи комп'ютерної томографії.

1.1.2 Морфологічний опис системи

Морфологічний опис системи повинен вказати, які компоненти системи будуть розглядатися. Наша система включає в себе інші дві підсистеми. Перша підсистема – це керуюча, а друга керована. У керуючу підсистему належить: міністерство охорони здоров'я, головний лікар. У керовану підсистему належить: персонал, відділ кадрів та бухгалтерія.

Модель «чорний ящик» – один із способів морфологічного опису системи. Така модель зосереджена на зміні зовнішнього середовища та на дослідженні реакції системи. Тобто усі зв'язки, внутрішній стан, а також елементи системи залишаються невідомими. Найважливішим залишається вихідний стан, який залежить від зовнішніх факторів, які діють на систему.

До факторів моделі можна віднести пацієнтів, лікарів, обладнання, ліки, а також фінансування. Тоді у якості результату, будуть виступати результати комп'ютерної томографії, здорові пацієнти, зарплатня персоналу.

На рис. 1.1 представлена модель типу «чорна скринька».



Рисунок 1.1 – Модель типу «чорна скринька»

1.1.3 Функціональна модель системи

Для функціонального опису системи можна використовувати графічний опис, наприклад, опис за допомогою контекстних діаграм IDEF0. В цій діаграмі представляється сукупність взаємодіючих робіт або функцій, інакше кажучи функціональних блоків.

Спочатку робиться опис системи взагалі, після описання системи проводиться розбиття її на крупні фрагменти. Цей процес називають функціональною декомпозицією, а ці діаграми, які описують кожен фрагмент і взаємодію фрагментів, називаються діаграмами декомпозиції. Після декомпозиції контекстної

діаграми проводиться декомпозиція кожного великого фрагменту системи на більш дрібні і так далі, до досягнення необхідного рівня подробиць опису.

На рисунку 1.3 зображена контекстна діаграма.



Рисунок 1.2 – Контекстна IDEF0 діаграма

На рисунку 1.3 зображена декомпозиція контекстної діаграми, тобто декомпозиція функціонального блоку «Отримання результатів комп'ютерної томографії».



Рисунок 1.3 – Декомпозиція першого рівня функціонального блоку «Отримання результатів комп'ютерної томографії»

Для більш детального опису моделі скористаємось методологією графічного структурного аналізу – діаграмою IDEF3.

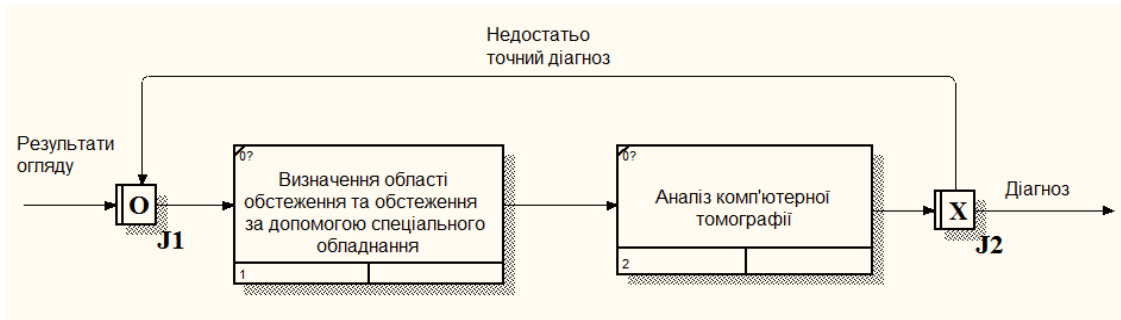


Рисунок 1.4 – Декомпозиція функціонального блоку «Реконструкція зображення» в методології IDEF3

1.1.4 Інформаційна модель

Опис інформаційної моделі повинен мати уявлення про керування, а також її організації як системи. Інформаційні системи описують різні типи систем об'єктів, у яких реалізуються різні взаємодії та взаємозв'язки між різними елементами системи.

Така модель може бути представлена графічно у вигляді DFD діаграм. Інструменти методології DFD дозволяють відображати джерела і адресати даних, ідентифікувати процеси і групи даних, які зв'язують в потоку одну функцію за іншою.

На рисунку 1.5 та 1.6 зображені контекстна DFD діаграма та її декомпозиція відповідно.

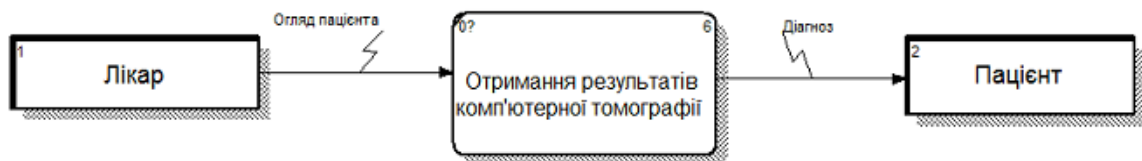


Рисунок 1.5 – Контекстна DFD діаграма

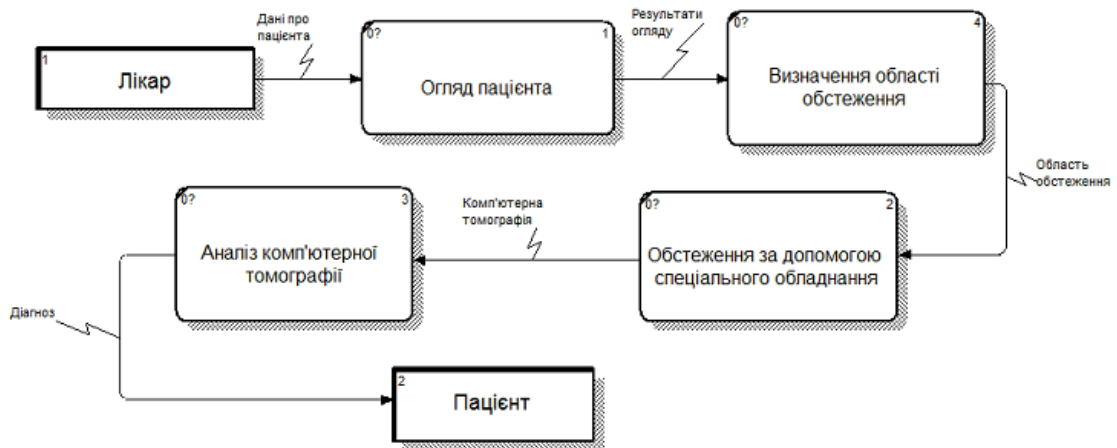


Рисунок 1.6 – Декомпозиція першого рівня DFD діаграми

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми реконструкції зображень

1.2.1 Модель аналізу проблеми

У процесі аналізу проблематики системи потрібно формалізувати проблему, виділивши ряд незадоволеності в системі.

Ці незадоволеності розбиваються на три групи:

а) небажані:

- 1) напруженість відносин між колективом і керівництвом;
- 2) застаріле обладнання;
- 3) плинність кадрів;
- 4) неефективний розподіл фінансів;
- 5) неефективність розподілу робочого часу;
- 6) неефективний розподіл повноважень керівництва;
- 7) висока ресурсомісткість;

б) критичні:

- 1) низька якість послуг;
- 2) низький рівень фінансування;
- 3) високий рівень корупції;

- 4) низький рівень кваліфікації співробітників-управлінців;
- в) бажані:
- 1) низький рівень кваліфікації персоналу;
 - 2) низька заробітна плата персоналу;
 - 3) відсутність системи збору та накопичення даних про результати діяльності клініки;
 - 4) низький рівень мотивації персоналу.

1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

Побудуємо ієрархічну структуру цих невдоволень і застосуємо метод аналізу ієрархій, використовуючи шкалу Сааті.

За допомогою методу парних порівнянь оцінимо ступінь впливу кожної з груп невдоволень на напруженість проблеми в цілому.

1 Бажані	1	0,25	0,2
2 Небажані	4	1	0,25
3 Критичні	5	4	1



Рисунок 1.7 – Матриця парних порівнянь і вектор пріоритетів для груп невдоволень

Далі за допомогою методу парних порівнянь оцінимо ступінь впливу кожної з бажаних, небажаних і критичних невдоволень на напруженість проблеми.

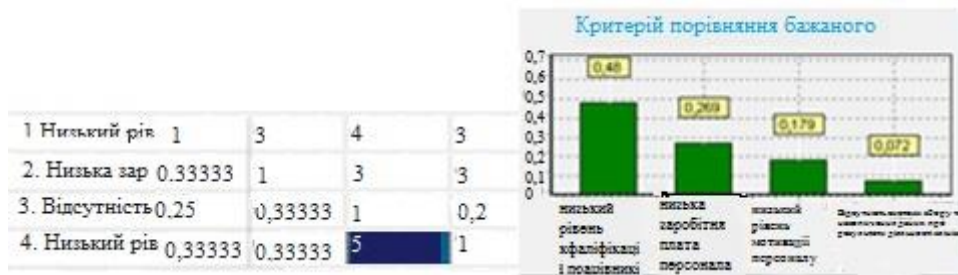


Рисунок 1.8 – Матриця парних порівнянь і вектор пріоритетів для бажаних невдоволень

N	1. Напруженість	2. Застарілі	3. Плинність	4. Неефективні	5. Неефективні	6. Неефективні
1. Напруженість	1	0,16667	0,25	0,33333	0,33333	0,16667
2. Застарілі	6	1	6	5	4	3
3. Плинність	4	0,16667	1	0,33333	3	0,2
4. Неефективні	4	0,33333	2	3	4	0,33333
5. Неефективні	3	0,2	3	1	3	0,2
6. Неефективні	3	0,25	0,33333	0,33333	1	0,2
7. Висока	6	0,33333	5	5	5	1

Рисунок 1.9 – Матриця парних порівнянь для небажаних невдоволень

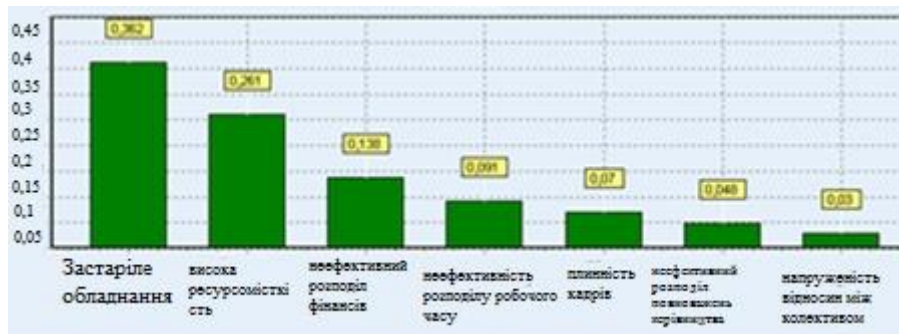


Рисунок 1.10 – Вектор пріоритетів для небажаних невдоволень

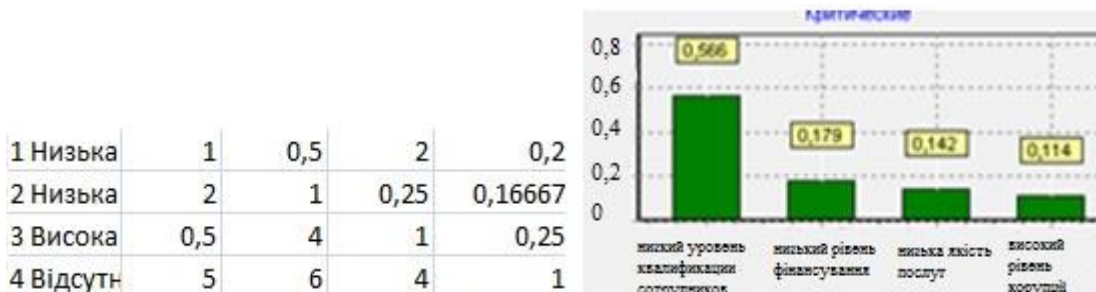


Рисунок 1.11 – Матриця парних порівнянь і вектор пріоритетів для критичних невдоволень

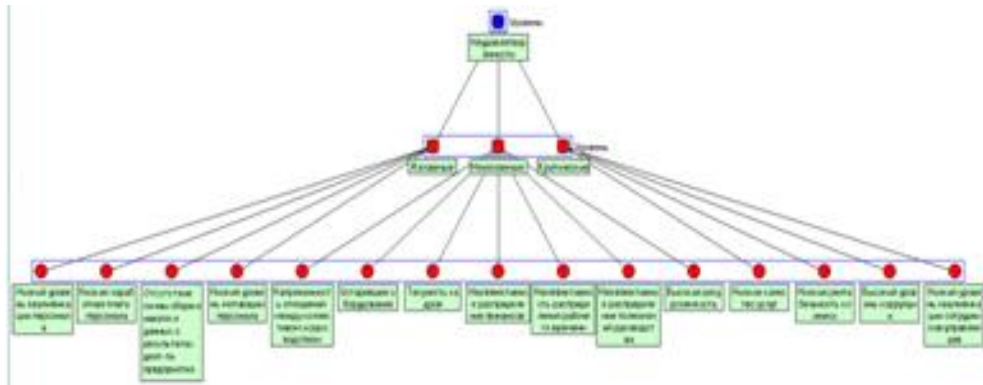


Рисунок 1.12 – Ієрархічна структура невдоволень системи

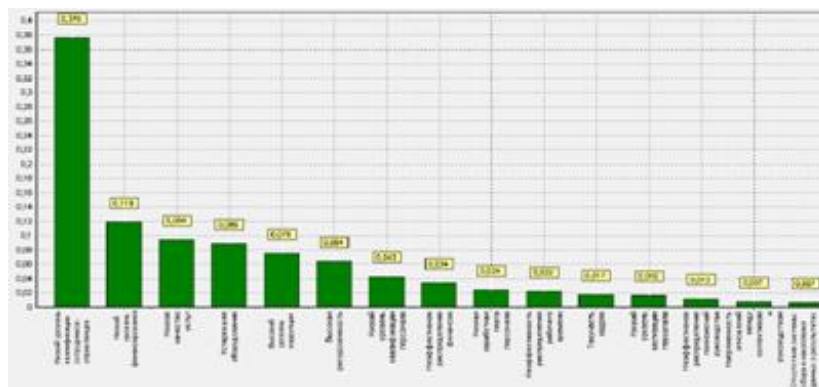


Рисунок 1.13 – Глобальний вектор пріоритетів невдоволень

Таблиця 1.1 – Глобальні пріоритети невдоволень

Глобальні невдоволеності	Значення
Низький рівень кваліфікації співробітників-управлінців	0,356
Низький рівень фінансування	0,139
Низька якість послуг	0,104
Застаріле обладнання	0,079
Високий рівень корупції	0,073
Висока ресурсомісткість	0,067
Низький рівень кваліфікації персоналу	0,046
Неефективний розподіл фінансів	0,041
Низька заробітна плата персоналу	0,034
Неефективність розподілу робочого часу	0,022
Плинність кадрів	0,017

Кінець таблиці 1.1

Низький рівень мотивації персоналу	0,016
Неефективний розподіл повноважень керівництва	0,012
Напруженість відносин між колективом і керівництвом	0,007
Відсутність системи збору та накопичення даних про результати діяльності підприємства	0,007

Застосовуючи принцип Парето, виділимо найбільш значимі незадоволеності. Для цього ранжируємо вектор глобальних пріоритетів і залишимо ті незадоволеності, сума пріоритетів яких не перевищить 0,9.

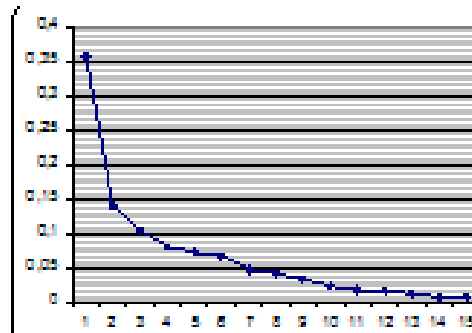


Рисунок 1.14 – Графічна інтерпретація принципу Парето

Виберемо найбільш значущі незадоволеності і розрахуємо відповідні їм нормовані значення.

Таблиця 1.2 – Нормовані пріоритети найбільш значущих невдоволеней

Найбільш значущі невдоволеності	Значення
Низький рівень кваліфікації співробітників-управлінців	0,42
Низький рівень фінансування	0,13
Низька якість послуг	0,10
Застаріле обладнання	0,095
Високий рівень корупції	0,08
Висока ресурсомісткість	0,062

Кінець таблиці 1.2

Низький рівень кваліфікації персоналу	0,046
Неефективний розподіл фінансів	0,041
Низька заробітна плата персоналу	0,026
Неефективність розподілу робочого часу	0,4

Таким чином, після застосування принципу Парето отримаємо ієрархічну структуру невдоволень, представлену на рисунку 1.14.

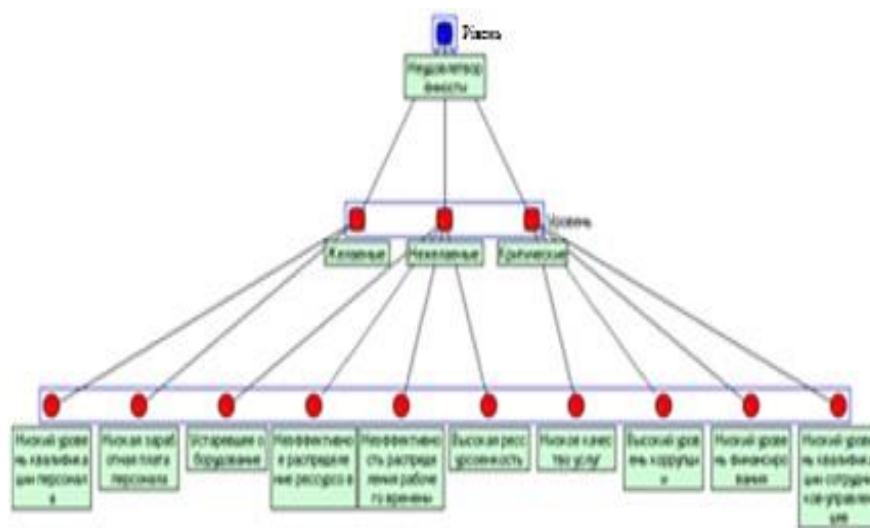


Рисунок 1.15 – Ієрархічна структура невдоволень після застосування принципу Парето

Після формалізованого аналізу можна зробити висновок про те, що найбільший вплив на напруженість проблеми надають такі незадоволеності: низький рівень кваліфікації співробітників-управлінців, низький рівень фінансування, низька якість послуг, застаріле обладнання, високий рівень корупції, висока ресурсомісткість, низький рівень кваліфікації персоналу, неефективний розподіл фінансів, низька заробітна плата персоналу, неефективність розподілу робочого часу. Саме з цими незадоволеностями і необхідно боротися, а перш за все з низьким рівнем кваліфікації співробітників-управлінців.

1.2.3 Модель вирішення проблеми

Виберемо показники, які дозволять оцінити стан проблематики системи:

- якість послуг;
- енерговитрати;
- фінансові витрати.

Однак, можна помітити, що найбільш значущими є якість послуг і фінансові витрати.

Ґрунтуючись на цих показниках можна сформулювати такі логічно можливі сценарії:

- а) сценарій 1 (СЦ. 1) — низька якість послуг (вага 0,185);
- б) сценарій 2 (СЦ. 2) — підвищення фінансування (вага 0,173);
- в) сценарій 3 (СЦ. 3) — прийнятну якість і вартість (вага 0,642).

Таблиця 1.3 – Калібрувальна таблиця

№	Показники стану проблематики системи	СЦ. 1	СЦ. 2	СЦ. 3	Узагал. сц.
1	Витрати на виробництво	2	-1	1	-1,83
2	Корупція	1	-2	3	2,8
3	Кваліфікація співробітників	2	2	4	2,21
4	Кількість дефектів	-3	3	-1	1,69
5	Умови праці	1	2	0	1,24
6	Плинність кадрів	1	-1	2	0,74
7	Мотивація співробітників	1	2	3	1,55
8	Заробітна плата	2	3	1	1,75
9	Шкідливість виробництва	4	-1	0	2,85

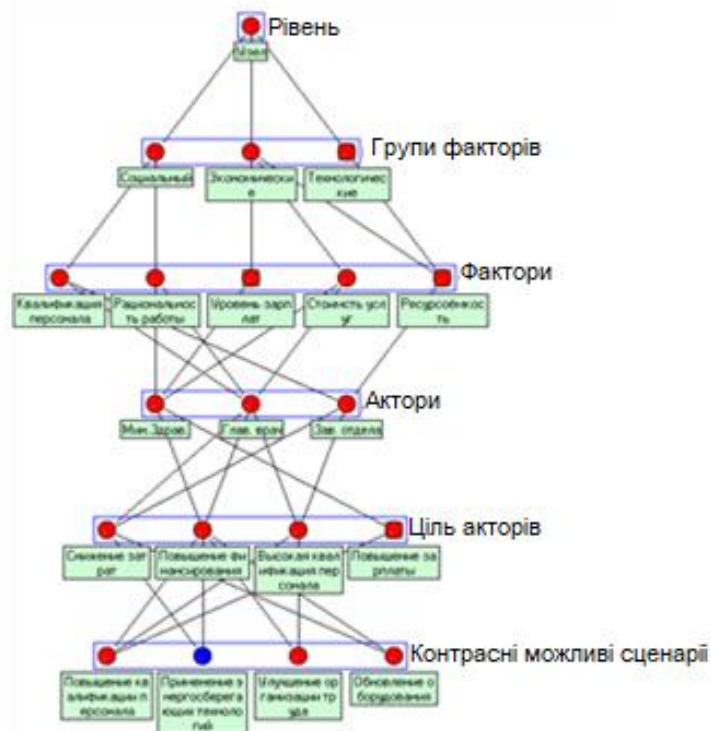


Рисунок 1.16 – Ієрархічна структура сценаріїв вирішення проблеми

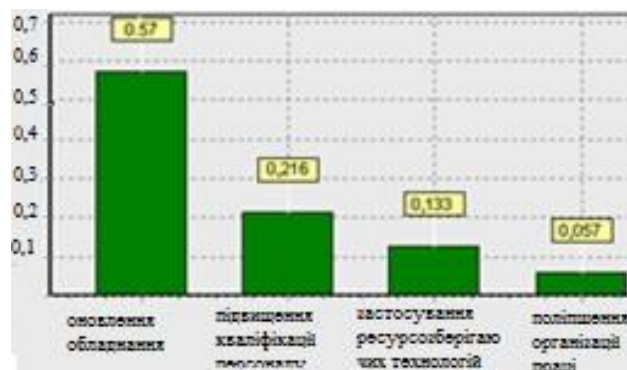


Рисунок 1.17 – Вектор пріоритетів сценаріїв вирішення проблеми

Після розробки контрастних сценаріїв, агрегуючи ієрархічну модель прямого аналізу проблеми (рис. 1.17).

Для того, щоб вибрати один з вже сформованих бажаних сценаріїв, експертним шляхом оцінимо коефіцієнти їх значущості (компоненти вектора глобальних пріоритетів) за критеріями «вигода» та «збитки», а також «вигода / збиток».

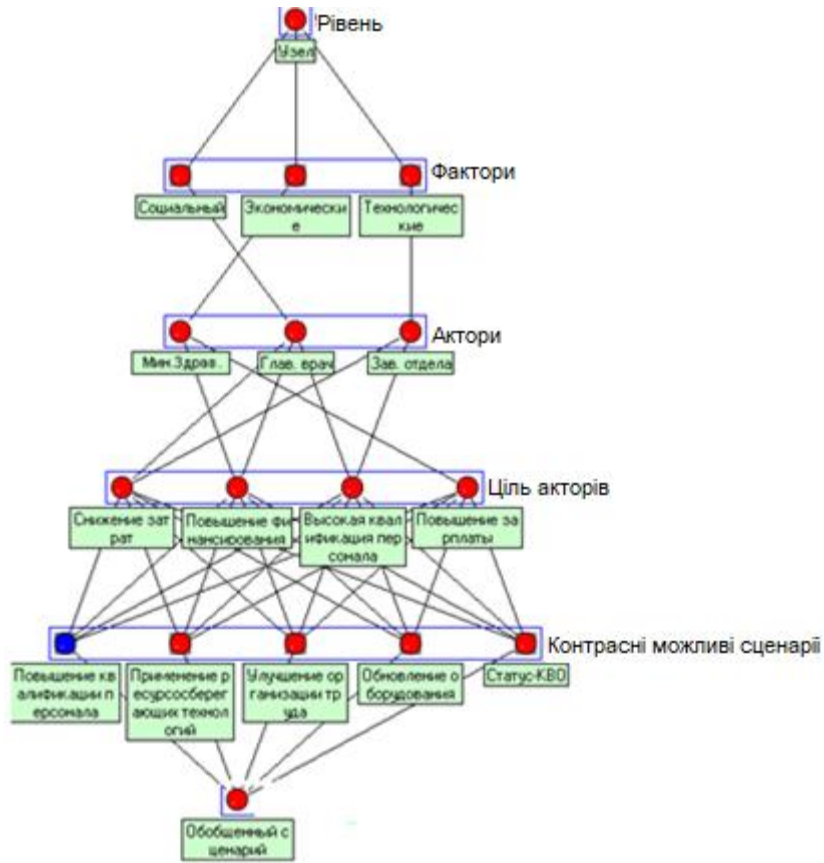


Рисунок 1.18 – Ієрархічна модель прямого аналізу проблеми

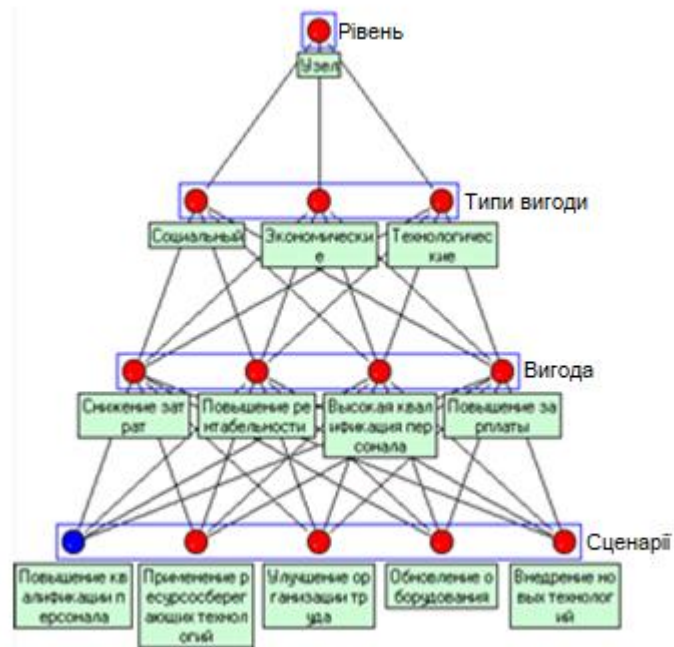


Рисунок 1.19 – Ієрархічна модель оцінки вектора пріоритетів за критерієм «вигода»

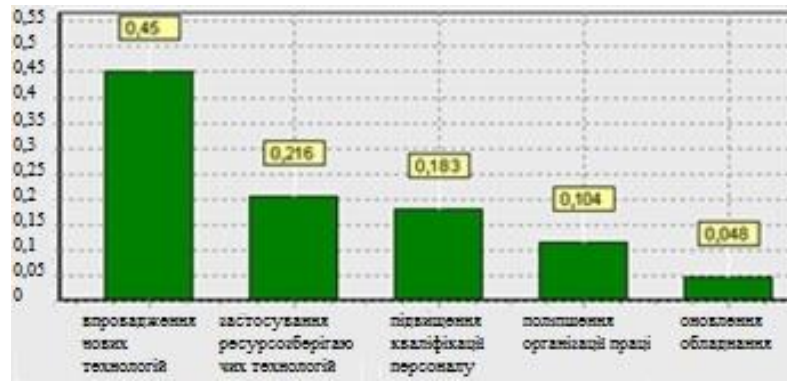


Рисунок 1.20 – Вектор пріоритетів за критерієм «вигода»

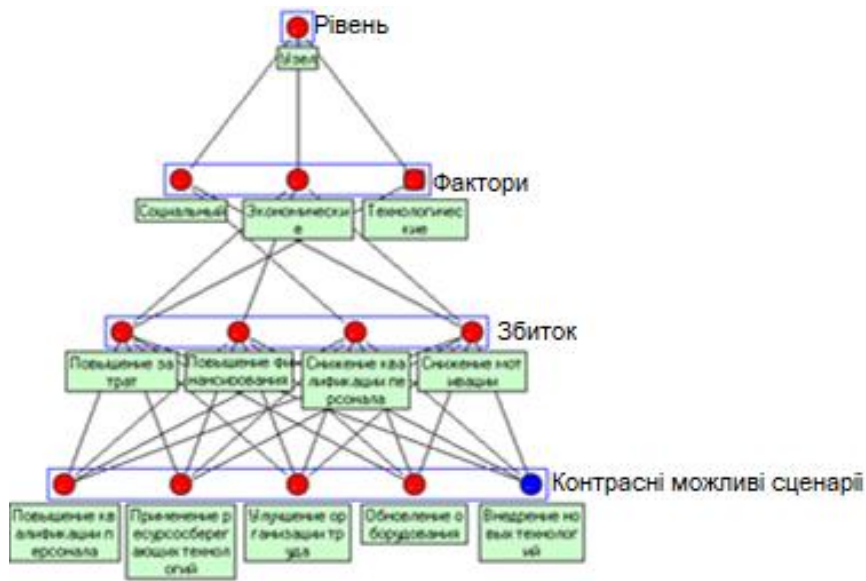


Рисунок 1.21 – Ієрархічна модель оцінки вектора пріоритетів за критерієм «збиток»

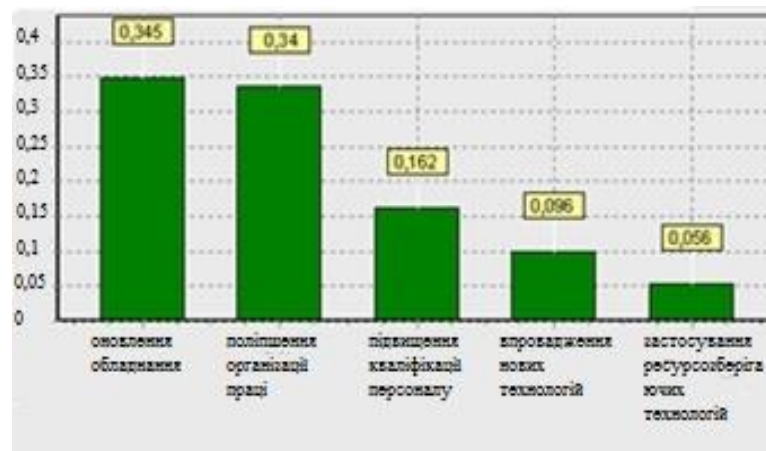


Рисунок 1.22 – Вектор пріоритетів за критерієм «збиток»

Таблиця 1.4 – Оцінка вектора пріоритетів за критерієм «вигода / збиток»

Критерії	СЦ. 1	СЦ. 2	СЦ. 3	СЦ. 4	СЦ. 5
Критерій «вигода» V	0.463	0.304	0.382	0.174	0.028
Критерій «збиток» U	0.038	0.084	0.232	0.435	0.142
Критерій «вигода / збиток» V / U	4.32	3.2	1.176	0.12	0.09

Далі необхідно ранжувати сценарії в порядку убутання величини $\frac{V}{U}$. Повинен бути обраний сценарій з максимальним значенням. В даному випадку це сценарій впровадження нових технологій у виробництво.

1.3 Змістовна та формальна постановки задачі

1.3.1 Змістовна постановка задачі

Обчислювальна томографія являє собою приклад розвитку нового наукового напрямку, проникаючого майже в усі області науки та техніки, де застосовуються або можуть буду застосовані які-небудь види випромінювання.

Апарат томографії дає можливість отримувати більш якісну інформацію, у порівнянні з уже відомими методами в різних областях науки та техніки: медицині, мікроскопії, океанології, спектроскопії і таке інше. Існують різні види томографії, які вже достатньо розвинені:

- рентгенівська;
- ядерно-магнітна;
- оптична;
- електронно-парамагнітно резонансна;
- ядерно-магнітно резонансна.

Усі ці види томографії по своїм властивостям можна розділити на два ве-

ликих класи: трансмісійну обчислювальну томографію (ТОТ) та емісійну обчислювальну томографію (ЕОТ). У першому виді томографії зовнішнє випромінювання зондує пасивний (невипромінюючий) об'єкт, частково поглинаючись у ньому. В ЕОТ активний об'єкт являє собою просторовий розподіл джерел випромінювання, при цьому виходячи вздовж якого-небудь напрямку випромінювання є суперпозицією випромінювання усіх джерел, які лежать на лінії проектування. Крім цього, за способом формування вихідних даних відрізняють паралельні та віялові проекції, а геометрію підрозділяють на кругову (повну і неповну) та планарну.

Всі ці перераховані способи дозволяють отримувати інформацію об досліджуваних об'єктах більш високої розмірності та кращої. Але основними методами отримання томографічних даних є ті, що базуються на фізичному процесі послаблення випромінювання у речовинах.

Розглянемо задачу відновлення двовимірного розподілу коефіцієнта ослаблення випромінювання $f(x, y)$ (рисунок 1.22). Процес вимірювань виглядає наступним чином.

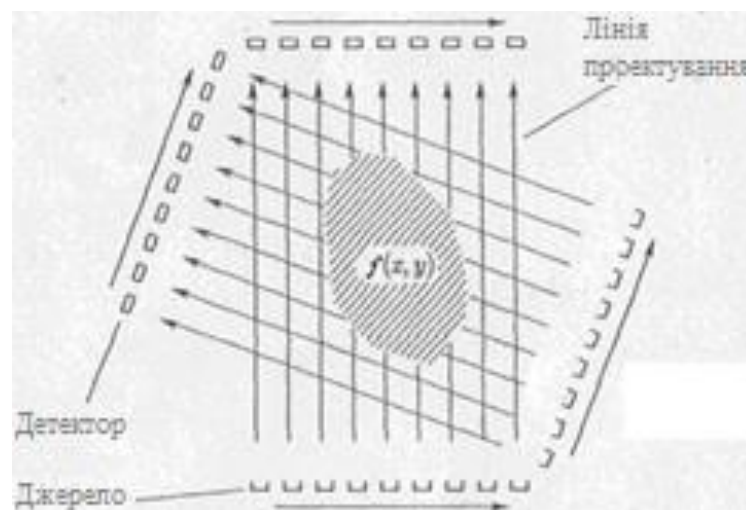


Рисунок 1.22 – Кругова геометрія вимірів з паралельними проекціями [3]

Джерело випромінювання, що формує "олівцем" пучок, проходить дискретно уздовж об'єкта. Синхронно з джерелом з іншого боку об'єкта

рухається детектор випромінювання. Набір відліків, отриманий таким чином, визначає одновимірну функцію, яка називається проекцією. Потім система "Джерело-Детектор" повертається щодо об'єкта на деякий кут φ , і знімається новий набір відліків, що визначає наступну проекцію.

Такі вимірювання повторюються, поки система "Джерело-Детектор" не повернеться на кут 2π . Строго кажучи, досить повороту на кут π , так як потім результати вимірювань стануть повторюватися. За отриманим набору одновимірних проекцій необхідно відновити двовимірний розподіл $f(x, y)$. Оскільки система "Джерело-Детектор" обертається навколо об'єкта, таку схему вимірів називають круговою геометрією вимірювань, а так як для отримання наступного відліку в проекції пучок зміщується паралельно попереднього положення, проекції називають паралельними проекціями.

Нехай тонкий промінь випромінювання з інтенсивністю I_0 потрапляє на шар речовини з розподілом лінійного коефіцієнта поглинання (ослаблення) $f(x)$ вздовж поширення променя. Джерело випромінювання проходить дискретно уздовж об'єкта.

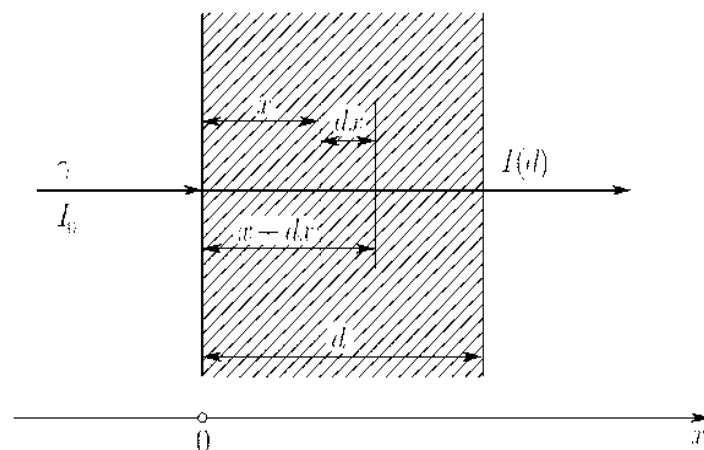


Рисунок 1.24 – Ослаблення випромінювання в середовищі

Синхронно з джерелом з іншого боку об'єкта рухається детектор випромінювання. Набір відліків, отриманий таким чином, визначає

одновимірну функцію, звану проекцією.

Потім система «Джерело-детектор» повертається щодо об'єкта на деякий кут φ , і знімає новий набір відліків, що визначає наступну проекцію. Таку схему вимірів називають круговою геометрією вимірювань, а проекції називають паралельними проекціями.

Початкове співвідношення:

$$\frac{dI(x)}{dx} = -f(x)I(x). \quad (1.1)$$

Рівняння (1.1) – це стаціонарне рівняння переносу випромінювання в неоднорідному середовищі, яке описує процес ослаблення випромінювання в речовині, і являє собою баланс частинок або енергії.

Проінтегрувавши ліву і праву частини (1.1), отримали наступне співвідношення:

$$\int_{I_0}^{I_1} \frac{dI}{I} = - \int_L f(x) dx, \quad (1.2)$$

$$\frac{dI(x)}{dx} = -f(x)I(x). \quad (1.3)$$

Позначимо $-\ln \frac{I_1}{I_0} = \gamma$, де I_0, I_1 – задані величини, які означають початкову та кінцеву інтенсивність випромінювання відповідно.

Тоді отримуємо:

$$\int_{L_k} f(x) dl = \gamma_k. \quad (1.4)$$

Оскільки I_0, I_1 – задані, вважаємо, що права частина (1.2) – також задана.

Отже, в результаті сканування виходять лінійні інтеграли функції f по кожній з прямих L_k . За сукупністю цих інтегралів потрібно відновити f :

$$\int_{L_k} f(x)dl = \gamma_k . \quad (1.5)$$

Співвідношення (1.5) називається перетворенням Радона.

У більшості алгоритмів рішення плоскої задачі РКТ використовують пряме і зворотне перетворення Радона. Їх аналіз показує, що завдання оптимізації кількості проекцій для відновлення функцій по заданих класів (тобто відновлення об'єктів з характеристиками, що описуються функціями по заданих класів) поки що не вирішене: що існуючі комп'ютерні томографи використовують однакову кількість проекцій для відновлення різних об'єктів.

Таким чином, актуальною є задача розробки і дослідження нових методів вирішення плоскої задачі радонівської комп'ютерної томографії (крім рентгенівської), які можуть використовувати нетрадиційні схеми сканування.

1.3.2 Формальна постановка задачі

1.3.2.1 Постановка задачі томографічної реконструкції

Для математичного опису зв'язку проекцій з шуканим розподілом $f(x, y)$ поряд з нерухомою системою φ координат (x, y) введемо обертову систему координат (x', y') рисунок 1.25 [3]:

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi; \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi; \end{cases} \quad (1.6)$$

позначимо через $f_0(x', y')$ розподіл лінійного коефіцієнта ослаблення в системі координат (x', y') , Поверненою відносно нерухокої системи координат (x, y) на кут φ :

$$\begin{aligned} f_\varphi(x', y') &= f(x(x', y', \varphi), y(x', y', \varphi)) = \\ &= f(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, x' \sin \varphi + y' \cos \varphi), \end{aligned} \quad (1.7)$$

зокрема $f_{\varphi=0}(x', y') = f(x', y')$.

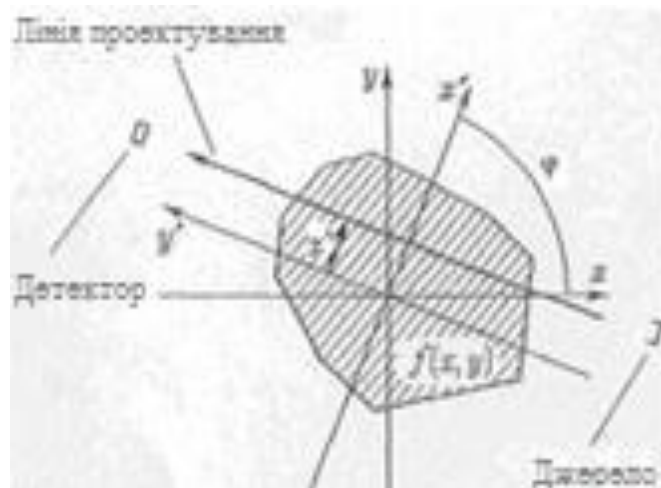


Рисунок 1.25 – Нерухома (x, y) і обертається (x', y') системи координат [3]

Для інтенсивності $I(x', y')$ випромінювання, що пройшов через об'єкт уздовж осі y' , відповідно до (1.7) отримаємо

$$I(x', y') = I_0 \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} f_\varphi(x', y') dy' \right\}. \quad (1.8)$$

При цьому було враховано, що за межами об'єкта $f(x, y) \equiv 0$ проекцією $R(x', y')$ називають таку величину

$$R(x', y') = -\ln \frac{I(x', y')}{I_0} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varphi}(x', y') dy'. \quad (1.9)$$

Таким чином, отримаємо такий вираз для проекції:

$$\begin{aligned} R(x', y') &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varphi}(x', y') dy' = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varphi}(x(x', y', \varphi), y(x', y', \varphi)) dy' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varphi}(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) dy'. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Співвідношення (1.14) називається перетворенням Радона двовимірної функції $f(x, y)$. Відзначимо, що якщо функція $R(x', y')$ знаходиться по $f_{\varphi}(x', y')$, то це пряме перетворення Радона, а якщо $f_{\varphi}(x', y')$ по $R(x', y')$, то зворотне.

Якщо $f(x, y)$ відмінна від нуля всередині кола радіуса r , то (1.14) можна записати у вигляді:

$$R(s, \phi) = \int_{-\sqrt{r^2 - x'^2}}^{\sqrt{r^2 - x'^2}} f(s \cos \phi - y' \sin \phi, s \sin \phi + y' \cos \phi) dy'. \quad (1.11)$$

Отримано вираз для проекції за допомогою інтеграла:

$$\int_{L_k} f(x, y) dl = \gamma_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (1.12)$$

$$L_k : x \cos \phi_k + y \sin \phi_k - s_k = 0, \quad (1.13)$$

де γ_k – задані числа.

Потрібно відновити функцію $f(x, y)$.

1.3.2.2 Математична модель відновлення функції методом скінченних сум Фур'є

У даній роботі функція $f(x, y)$ відшукується у вигляді скінченної суми Фур'є:

$$f(x, y) \approx S_{N,N}(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N CF_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)}, \quad (1.14)$$

де коефіцієнти Фур'є представляються у вигляді:

$$CF_{k,l} = \iint_D f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy. \quad (1.15)$$

Коефіцієнти Фур'є будуть знаходитися за допомогою проекційних даних Радона. Відзначимо, що коефіцієнти k, l в рішенні відповідають параметрам ϕ і s в перетворенні Радона.

Ідея отримання значень для коефіцієнтів Фур'є в зведенні кратного інтеграла до повторного. Отриманий внутрішній інтеграл можна інтерпретувати як проекцію невідомої функції двох змінних вздовж деякого напрямку. На практиці саме уздовж цього напрямку потрібно буде провести сканування комп'ютерним томографом.

Для реалізації цього підходу проводиться заміна в подвійному інтегралі виду:

$$kx + ly = t, \quad -lx + ky = v. \quad (1.16)$$

Залежно від взаємного розташування на числовій осі значень k і l область інтегрування розіб'ється на 3 різних підобласті. В разі $l > k > 0$ область в площині (x, y) визначається наступним чином:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq \frac{k - kx}{l} \right\}, \\
D_2 &= \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1; \frac{k - kx}{l} \leq y \leq \frac{l - kx}{l} \right\}, \\
D_3 &= \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1; \frac{l - kx}{l} \leq y \leq 1 \right\}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

У кожному з наведених інтегралів за цими областями множник $e^{-i2\pi(kx+ly)}$ виноситься за знак внутрішнього інтеграла, що призводить до шуканого результату. Наприклад, для випадку $k > l > 0$ подвійний інтеграл по першій підобласті зведеться до вираження виду:

$$I_1 = \iint_{D_1} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy = \frac{l}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi zl} F_1(zl) dz, \tag{1.18}$$

де F_1 – проекція невідомої функції $f(x, y)$.

Для реалізації методу в отриманих виразах інтегрування замінювалося на підсумовування в наборі дискретних точок відрізка інтегрування. Наприклад, вираз (1.22) при реалізації замінювався на:

$$I_1 = \frac{l}{k^2 + l^2} \cdot \frac{(e^{-i2\pi \frac{1}{m} l} - 1)}{-i2\pi l} \cdot \sum_{q=0}^{m-1} F_1 \left(k, l, l \cdot \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi \frac{q}{m} l}. \tag{1.19}$$

1.4 Постановка задач досліджень

Задана інформація про те, яку функцію необхідно відновити, який метод застосується та що є вихідними даними завдання

$$\int_{L_k} f(x, y) dl = \gamma_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (1.20)$$

$$L_k : x \cos \phi_k + y \sin \phi_k - s_k = 0, \quad (1.21)$$

де γ_k – задані числа.

Потрібно: відновити функцію $f(x, y)$.

Для вирішення даного завдання використовується метод відновлення функції з використанням скінченних сум Фур'є.

Вихідними даними завдання є:

- проекційні дані γ_k , отримані з використанням тестових завдань;
- значення числа розбивки по осях для дискретизації області при графічній ілюстрації та отриманні кількісних характеристик;
- число розбиття відрізка при інтегруванні;
- N – число, відповідне верхньому і нижньому індексу в сумі Фур'є.

В якості близькості відновлюваного до зображення $\vec{\tilde{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ до істинного $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ використовуються наступні похибки: δ_1 – середньоквадратична похибка, δ_2 – абсолютна похибка, δ_3 – максимальна по модулю похибка.

$$\delta_1 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.22)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{x}_i|, \quad (1.23)$$

$$\delta_3 = \min_{i \in [1, n]} |x_i - \tilde{x}_i|. \quad (1.24)$$

В якості критеріїв, що оцінюють швидкість обробки інформації, беруть або час процесора, або вартість машинного часу. Іноді додатково враховують необхідну машинну пам'ять.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Ідея методу

Рішення відшукуємо у вигляді скінченної суми Фур'є

$$f(x, y) \approx S_{N,N}(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N CF_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)}, \quad (2.1)$$

де коефіцієнти Фур'є визначаються як:

$$CF_{k,l} = \iint_D f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy. \quad (2.2)$$

Будемо знаходити їх наближено за допомогою даних Радона (тобто проєкцій – інтегралів вздовж спеціально обраної системи прямих, які перетинають квадрат $D = [0,1]^2$).

Для цього використовуємо заміну змінних в подвійному інтегралі для обчислення коефіцієнтів $CF_{k,l}$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv, \quad (2.3)$$

де $J = J(u, v)$ – функціональний визначник (якобіан):

$$J = J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

При цьому використовуватимемо важливу особливість якобіан:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}}, \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

2.2 Зведення подвійних інтегралів до повторних

Буде досить розглянути підрахунок коефіцієнтів Фур'є виду $CF_{k,l}$ і $CF_{k,-l}$ для розгляду всіх випадків взаємного розташування k, l і 0 на числової осі.

2.2.1 Коефіцієнти $CF_{k,l}$

Для обчислення коефіцієнтів Фур'є $CF_{k,l}$ $k > 0$ і $l > 0$ за допомогою проєкції робимо заміну змінних $kx + ly = t$, $-lx + ky = v$, $x = \frac{kt - lv}{k^2 + l^2}$, $y = \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}$.

В результаті область інтегрування D розіб'ється на три підобласті D_1, D_2, D_3 , коли $k > l$ або $k < l$, і на дві підобласті D_1 , і D_3 , якщо $k = l$ (див. рисунок 2.1, 2.2, 2.3 відповідно).

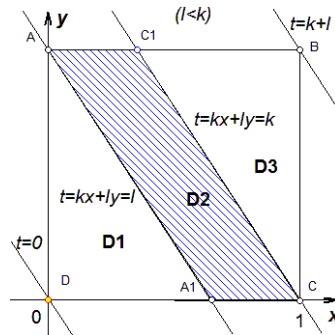


Рисунок 2.1 – Розбиття області D на підобласті D_1, D_2, D_3 при $k > l > 0$

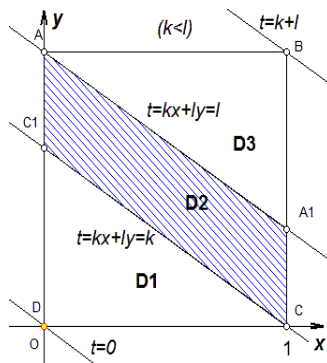


Рисунок 2.2 – Розбиття області D на підобласті D_1, D_2, D_3 при $l > k > 0$

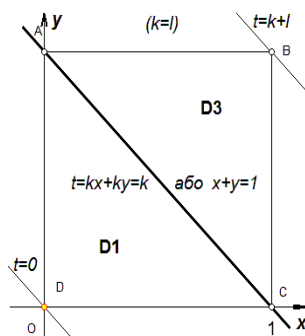


Рисунок 2.3 – Розбиття області D на підобласті D_1, D_3 при $k = l$

2.2.1.1 Випадок $k > l > 0$

Для випадку $k > l > 0$ (див. рисунок 2.1) області, можна визначити так.

$$D_1 = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq \frac{l}{k}; 0 \leq y \leq \frac{l - kx}{l} \right\},$$

$$\tilde{D}_1 = \left\{ (t, v) : 0 \leq t \leq l; -\frac{l}{k}t \leq v \leq \frac{k}{l}t \right\}, \quad (2.6)$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq 1; \frac{l - ly}{k} \leq x \leq \frac{k - ly}{k} \right\},$$

$$\tilde{D}_2 = \left\{ (t, v) : l \leq t \leq k; -\frac{l}{k}t \leq v \leq \frac{k^2 + l^2 - lt}{k} \right\}, \quad (2.7)$$

$$D_3 = \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq 1; \frac{k-ly}{k} \leq x \leq 1 \right\},$$

$$\tilde{D}_3 = \left\{ (t, v) : k \leq t \leq k+l, \frac{-k^2-l^2+kt}{l} \leq v \leq \frac{k^2+l^2-lt}{k} \right\}. \quad (2.8)$$

Тобто, для коефіцієнтів Фур'є $CF_{k,l}$ можна написати:

$$CF_{k,l} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} t = kx + ly \\ v = -lx + ky \end{array} \right. ; x = \frac{kt - lv}{k^2 + l^2}; y = \frac{lt + kv}{k^2 + l^2} \\ \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(t, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} k & l \\ -l & k \end{vmatrix}} = \frac{1}{k^2 + l^2} \end{array} \right| = I_1 + I_2 + I_3, \quad (2.9)$$

$$I_1 = \iint_{D_1} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy = I_{1,k,l},$$

$$I_2 = \iint_{D_2} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy = I_{2,k,l},$$

$$I_3 = \iint_{D_3} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy = I_{3,k,l}.$$

Нижче напишемо формули для обчислення інтегралів I_1, I_2, I_3 по кожній з областей D_1, D_2, D_3 з використанням проєкцій – даних Радона.

Інтеграл I_1 по області D_1 для випадку, коли $k > l > 0$, має такий вигляд:

$$I_1 = \iint_{D_1} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy = \iint_{\tilde{D}_1} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) e^{-i2\pi t} |J| dt dv =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^l \frac{e^{-i2\pi t}}{k^2 + l^2} dt \int_{-\frac{lt}{k}}^{\frac{kt}{l}} f\left(\frac{kt - lv}{k^2 + l^2}, \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}\right) dv = \left. \begin{aligned} &= F_1(k, l, t) = F_1(t) \\ &t = zl; \quad dt = ldz; \\ &t = 0 \Rightarrow z = 0; \quad t = 1 \Rightarrow z = 1 \end{aligned} \right| = \\
&= \frac{l}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi zl} F_1(zl) dz. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

В свою чергу I_2 по області D_2 обчислюється таким чином:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \iint_{D_2} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy = \iint_{\tilde{D}_2} f\left(\frac{kt - lv}{k^2 + l^2}, \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}\right) e^{-i2\pi t} |J| dt dv = \\
&= \frac{k - l}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi[l+z(k-l)]} F_2(l + z(k - l)) dz. \tag{2.11}
\end{aligned}$$

І, нарешті, інтеграл I_3 по області D_3 обчислюється так:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \iint_{D_3} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy = \iint_{\tilde{D}_3} f\left(\frac{kt - lv}{k^2 + l^2}, \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}\right) e^{-i2\pi t} |J| dt dv = \\
&= l \int_0^1 \frac{F_3(k + zl) e^{-i2\pi(k+zl)} dz}{k^2 + l^2}. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

2.2.1.2. Випадок $l > k > 0$

Області D_1, D_2, D_3 для випадку $l > k > 0$ (див. рисунок 2.2) визначаються

так:

$$D_1 = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq \frac{k - kx}{l} \right\},$$

$$\tilde{D}_1 = \left\{ (t, v) : 0 \leq t \leq k; -\frac{lt}{k} \leq v \leq \frac{kt}{l} \right\}, \quad (2.13)$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1; \frac{k - kx}{l} \leq y \leq \frac{l - kx}{l} \right\},$$

$$\tilde{D}_2 = \left\{ (t, v) : k \leq t \leq l; \frac{-k^2 - l^2 + kt}{l} \leq v \leq \frac{kt}{l} \right\}, \quad (2.14)$$

$$D_3 = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1; \frac{l - kx}{l} \leq y \leq 1 \right\},$$

$$\tilde{D}_3 = \left\{ (t, v) : l \leq t \leq k + l, \frac{-k^2 - l^2 + kt}{l} \leq v \leq \frac{k^2 + l^2 - lt}{k} \right\}. \quad (2.15)$$

Тобто, для коефіцієнтів Фур'є $CF_{k,l}$ можна написати

$$CF_{k,l} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} t = kx + ly \\ v = -lx + ky \end{array} \right. ; x = \frac{kt - lv}{k^2 + l^2}; y = \frac{lt + kv}{k^2 + l^2} \\ \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(t, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} k & l \\ -l & k \end{vmatrix}} = \frac{1}{k^2 + l^2}; \end{array} \right| =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3, \quad (2.16)$$

$$I_1 = \iint_{D_1} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy = I_{1,k,l},$$

$$I_2 = \iint_{D_2} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy = I_{2,k,l},$$

$$I_3 = \iint_{D_3} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy = I_{3,k,l}.$$

Інтеграл I_1 по області D_1 матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \iint_{D_1} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy = \iint_{\tilde{D}_1} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) e^{-i2\pi t} |J| dt dv = \\
 &= \frac{1}{k^2+l^2} \int_0^k e^{-i2\pi t} dt \int_{\frac{lt}{k}}^{\frac{kt}{l}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv = \left[\begin{aligned} &= G_1(k, l, t) = G_1(t) \\ &t = kz; \quad dt = kdz; \\ &t = k \Rightarrow z = 1; \quad t = 0 \Rightarrow z = 0 \end{aligned} \right] = \\
 &= \frac{k}{k^2+l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi kz} G_1(kz) dz, \tag{2.17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \iint_{D_2} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy = \iint_{\tilde{D}_2} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) e^{-i2\pi t} |J| dt dv = \\
 &= \frac{l-k}{k^2+l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi(k+z(l-k))} G_2(k+z(l-k)) dz. \tag{2.18}
 \end{aligned}$$

Третій інтеграл має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \iint_{D_3} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy = \iint_{\tilde{D}_3} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) e^{-i2\pi t} |J| dt dv = \\
 &= \frac{k}{k^2+l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi(l+kz)} G_3(l+kz) dz. \tag{2.19}
 \end{aligned}$$

Випадок $k > 0, l > 0$ і $k = l$ зводиться до використання попередніх формул з підстановкою значення $k = l$ (див. рисунок 2.3).

2.2.2 Коефіцієнти $CF_{k,-l}$

Для коефіцієнтів Фур'є (2.2) робимо заміну змінних $kx - ly = v$, $lx + ky = t$,
 $x = \frac{kv + lt}{k^2 + l^2}$, $y = \frac{kt - lv}{k^2 + l^2}$. У результаті область інтегрування D розіб'ється на три
 підобласті D_1 , D_2 , D_3 , коли $k > l$ або $k < l$, l на дві підобласті D_1 , і D_3 , якщо
 $k = l$ (див. рис. 2.4-2.6 відповідно)

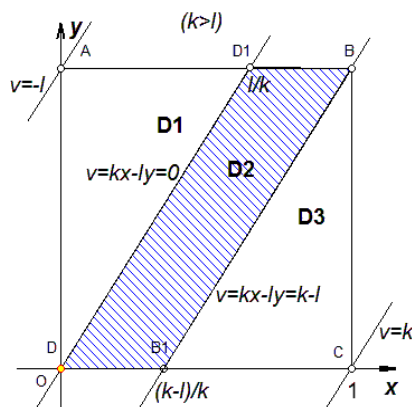


Рисунок 2.4 – Розбиття області D на під області D_1 , D_2 , D_3
 при обчисленні $CF_{k,-l}$, якщо $k > l > 0$

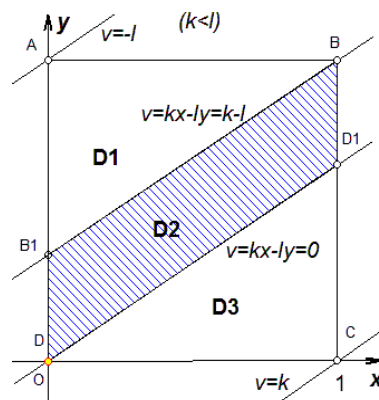


Рисунок 2.5 – Розбиття області D на під області D_1 , D_2 , D_3
 при обчисленні $CF_{k,-l}$, якщо $l > k > 0$

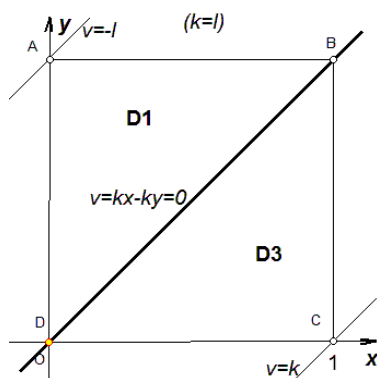


Рисунок 2.6 – Розбиття області D на під області D_1 , D_2 , D_3

при обчисленні $CF_{k,-l}$, якщо $k = l$

2.2.2.1 Випадок $k > l > 0$

Області для випадку $k > l > 0$ (див. рисунок 2.4), можна визначити наступним чином

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq 1; 0 \leq x \leq \frac{ly}{k} \right\}, \\
 \tilde{D}_1 &= \left\{ (v, t) : -l \leq v \leq 0; -\frac{kv}{l} \leq t \leq \frac{k^2 + l^2 + lv}{k} \right\}, \\
 D_2 &= \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq 1; 0 \leq kx - ly \leq k - l \right\}, \\
 \tilde{D}_2 &= \left\{ (v, t) : 0 \leq v \leq k - l; \frac{lv}{k} \leq t \leq \frac{k^2 + l^2 + lv}{k} \right\}, \\
 D_3 &= \left\{ (x, y) : k - l \leq kx - ly \leq k; 0 \leq y \leq \frac{kx - kl + l}{l} \right\}, \\
 \tilde{D}_3 &= \left\{ (v, t) : k - l \leq v \leq k; \frac{lv}{k} \leq t \leq \frac{k^2 + l^2 - kv}{l} \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Тобто, для коефіцієнтів Фур'є $CF_{k,-l}$ можна написати

$$CF_{k,-l} = \iint_{00}^{11} f(x, y) e^{-i2\pi(kx-ly)} dx dy =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} v = kx - ly \\ t = lx + ky \end{array} \right. ; \quad x = \frac{kv + lt}{k^2 + l^2}; \quad y = \frac{kt - lv}{k^2 + l^2}; \\ \frac{\partial(x, y)}{\partial(v, t)} = \frac{1}{\frac{\partial(v, t)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} k & -l \\ l & k \end{vmatrix}} = \frac{1}{k^2 + l^2} \end{array} \right| = I_1 + I_2 + I_3, \quad (2.21)$$

$$I_1 = \iint_{D_1} f(x, y) e^{-i2\pi(kx-ly)} dx dy = I_{1,k,l},$$

$$I_2 = \iint_{D_2} f(x, y) e^{-i2\pi(kx-ly)} dx dy = I_{2,k,l},$$

$$I_3 = \iint_{D_3} f(x, y) e^{-i2\pi(kx-ly)} dx dy = I_{3,k,l}.$$

На наступному кроці напишемо формули для обчислення інтегралів I_1 , I_2 , I_3 по кожній з областей D_1 , D_2 , D_3 з використанням проєкційних даних Радона.

Інтеграл I_1 по області D_1 для випадку, коли $k > l > 0$, має такий вигляд:

$$I_1 = \iint_{D_1} f(x, y) e^{-i2\pi(kx-ly)} dx dy = \iint_{\tilde{D}_1} f\left(\frac{kv + lt}{k^2 + l^2}, \frac{kt - lv}{k^2 + l^2}\right) e^{-i2\pi v} |J| dv dt =$$

$$= \frac{1}{k^2 + l^2} \int_{-l}^0 e^{-i2\pi v} dv \int_{-\frac{kv}{l}}^{\frac{k^2 + l^2 + lv}{k}} f\left(\frac{kv + lt}{k^2 + l^2}, \frac{kt - lv}{k^2 + l^2}\right) dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \int_{-\frac{kv}{l}}^{\frac{k^2 + l^2 + lv}{k}} f\left(\frac{kv + lt}{k^2 + l^2}, \frac{kt - lv}{k^2 + l^2}\right) dt = \\ = \phi_1(k, l, v) = \phi_1(v) \\ v = -lz; \quad dv = -ldz; \\ v = -l \Rightarrow z = 1; \quad v = 0 \Rightarrow z = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{l}{k^2 + l^2} \int_0^1 \phi_1(z(-l)) e^{-i2\pi z(-l)} dz. \quad (2.22)$$

У свою чергу другий інтеграл матиме вигляд:

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{D_2} f(x, y) e^{-i2\pi(kx-ly)} dx dy = \iint_{\tilde{D}_2} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) e^{-i2\pi v} |J| dv dt = \\ &= \frac{k-l}{k^2+l^2} \int_0^1 \phi_2(z(k-l)) e^{-i2\pi z(k-l)} dz. \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_{D_3} f(x, y) e^{-i2\pi(kx-ly)} dx dy = \iint_{\tilde{D}_3} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) e^{-i2\pi v} |J| dv dt = \\ &= \frac{l}{k^2+l^2} \int_0^1 \phi_3(k-l+zl) e^{-i2\pi(k-l+zl)} dz. \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.2.2.2 Випадок $l > k > 0$

Розглянемо обчислення коефіцієнтів Фур'є $CF_{k,-l} = \iint_{00}^{11} f(x, y) e^{-i2\pi(kx-ly)} dx dy$ для випадку, коли $l > k > 0$ (див. рисунок 4.5).

Ці області можна визначити наступним чином:

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1; \frac{kx-k+l}{l} \leq y \leq 1 \right\}, \\ \tilde{D}_1 &= \left\{ (v, t) : -l \leq v \leq k-l; -\frac{kv}{l} \leq t \leq \frac{k^2+l^2+lv}{k} \right\}, \\ D_2 &= \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1; \frac{kx}{l} \leq y \leq \frac{kx-k+l}{l} \right\}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\tilde{D}_2 = \left\{ (v, t) : k - l \leq v \leq 0; -\frac{kv}{l} \leq t \leq \frac{k^2 + l^2 - kv}{l} \right\},$$

$$D_3 = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq \frac{kx}{l} \right\},$$

$$\tilde{D}_3 = \left\{ (v, t) : 0 \leq v \leq k; \frac{lv}{k} \leq t \leq \frac{k^2 + l^2 - kv}{l} \right\}.$$

Тобто, для коефіцієнтів Фур'є $CF_{k,-l}$ можна написати

$$CF_{k,-l} = \iint_{00}^{11} f(x, y) e^{-i2\pi(kx-ly)} dx dy =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} v = kx - ly \\ t = lx + ky \end{array} \right. ; \quad x = \frac{kv + lt}{k^2 + l^2}; \quad y = \frac{kt - lv}{k^2 + l^2}; \\ \frac{\partial(x, y)}{\partial(v, t)} = \frac{1}{\frac{\partial(v, t)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} k & -l \\ l & k \end{vmatrix}} = \frac{1}{k^2 + l^2} \end{array} \right| = I_1 + I_2 + I_3, \quad (2.26)$$

$$I_1 = \iint_{D_1} f(x, y) e^{-i2\pi(kx-ly)} dx dy = I_{1,k,l},$$

в свою чергу

$$I_2 = \iint_{D_2} f(x, y) e^{-i2\pi(kx-ly)} dx dy = I_{2,k,l},$$

$$I_3 = \iint_{D_3} f(x, y) e^{-i2\pi(kx-ly)} dx dy = I_{3,k,l}.$$

Обчислюємо ці інтеграли I_1, I_2, I_3 . З відповідних областей D_1, D_2, D_3

$$I_1 = \iint_{D_1} f(x, y) e^{-i2\pi(kx-ly)} dx dy = \iint_{\tilde{D}_1} f\left(\frac{kv + lt}{k^2 + l^2}, \frac{kt - lv}{k^2 + l^2}\right) e^{-i2\pi v} |J| dv dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k^2 + l^2} \int_{-l}^{k-l} e^{-i2\pi v} dv \int_{-\frac{kv}{l}}^{\frac{k}{l}} f\left(\frac{kv + lt}{k^2 + l^2}, \frac{kt - lv}{k^2 + l^2}\right) dt = \\
&= \left. \begin{aligned}
&\frac{k^2 + l^2 + lv}{l} \int_{-\frac{kv}{l}}^{\frac{k}{l}} f\left(\frac{kv + lt}{k^2 + l^2}, \frac{kt - lv}{k^2 + l^2}\right) dt = \\
&= \omega_1(k, l, v) = \omega_1(v) \\
&v = kz - l; \quad dv = kdz; \\
&v = -l \Rightarrow z = 0; \quad v = k - l \Rightarrow z = 1
\end{aligned} \right| = \\
&= \frac{k}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi(kz-l)} \omega_1(kz - l) dz. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Запишемо другий і третій інтеграли:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \iint_{D_2} f(x, y) e^{-i2\pi(kx - ly)} dx dy = \iint_{\tilde{D}_2} f\left(\frac{kv + lt}{k^2 + l^2}, \frac{kt - lv}{k^2 + l^2}\right) e^{-i2\pi v} |J| dv dt = \\
&= \frac{l - k}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi z(k-l)} \omega_2[z(k-l)] dz, \tag{2.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \iint_{D_3} f(x, y) e^{-i2\pi(kx - ly)} dx dy = \iint_{\tilde{D}_3} f\left(\frac{kv + lt}{k^2 + l^2}, \frac{kt - lv}{k^2 + l^2}\right) e^{-i2\pi v} |J| dv dt = \\
&= \frac{k}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi kz} \omega_3(kz) dz. \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Випадок коли $k = l$ зводиться до використання попередніх формул з підстановкою значення $k = l$ (див. рисунок 2.6).

Відзначимо, що написані вище функції $F_\mu, G_\mu, \phi_\mu, \omega_\mu, \mu = 1, 2, 3$, є проєкціями, отриманими інтеграцією функції $f(x, y)$ вздовж прямих, які перетинають квадрат $[0, 1]^2$ і проходять паралельно прямим $kx + ly = t$.

Для прискорення обробки даних нашим методом обчислювалися лише коефіцієнти $CF_{k,l}$ і $CF_{k,-l}$, а інші $(CF_{-k,-l}, CF_{-k,l})$ були взяті як пов'язані до них.

2.3 Обчислення повторних інтегралів

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \iint_{D_1} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy = \iint_{D_1} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) e^{-i2\pi(kx+ly)} |I| dt dv = \\
 &= \int_0^l \frac{e^{-i2\pi(kx+ly)}}{k^2+l^2} \left[\int_{\frac{lt}{k}}^{\frac{kt}{l}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv \right] dt = \\
 &= \left[\int_{\frac{lt}{k}}^{\frac{kt}{l}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv = F_1(k, t, l) = F_1(t) \right. \\
 &\quad \left. \begin{aligned} t &= zl, dt = ldz \\ t = 0 &\Rightarrow z = 0 \\ t = l &\Rightarrow z = 1 \end{aligned} \right] = \\
 &= \frac{l}{k^2+l^2} \int_0^l e^{-i2\pi(kx+ly)} F_1(k, l, l \cdot z) dz. \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

Отриманий інтеграл замінюємо на суму інтегралів, використовуючи властивість адитивності. З цією метою відрізок $[0,1]$ розбиваємо на m часткових відрізків точками z_0, z_1, \dots, z_{m-1} , тобто точками $z_q, q = \overline{0, m-1}$:

$$I_1 = \frac{l}{k^2+l^2} \sum_{q=0}^{m-1} \int_{z_q}^{z_{q+1}} e^{-i2\pi(kx+ly)} F_1(k, l, l \cdot z) dz. \tag{2.31}$$

Функцію $F_1(k, l, l^* z)$ замінюємо кусково-постійною функцією:

$$F_1(k, l, l^* z) \approx \sum_{q=0}^{m-1} F_1(k, l, l \cdot \frac{z_q + z_{q+1}}{2}) \cdot H_q(z),$$

$$H_q(z) = \begin{cases} 1, z \in [z_q; z_{q+1}], \\ 0, z \notin [z_q; z_{q+1}]. \end{cases} \quad (2.32)$$

Остання формула означає, що на кожному частковому відрізку $[z_q, z_{q+1}]$, функція замінюється значенням цієї функції в середній точці відрізка.

Тоді після винесення константи, інтеграл I_1 перетвориться до виду:

$$I_1 = \frac{l}{k^2 + l^2} \sum_{q=0}^{m-1} F_1(k, l, l \cdot \frac{z_q + z_{q+1}}{2}) \int_{z_q}^{z_{q+1}} e^{-i2\pi z l} dz. \quad (2.33)$$

Далі обчислюємо інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_{z_q}^{z_{q+1}} e^{-i2\pi z l} dz &= \frac{1}{-i2\pi l} e^{-i2\pi z l} \Big|_{z_q}^{z_{q+1}} = \frac{1}{-i2\pi l} (e^{-i2\pi z_{q+1} l} - e^{-i2\pi z_q l}) = \\ &= \left| \begin{array}{l} z_q = \frac{q}{m} \\ z_{q+1} = \frac{q+1}{m} \end{array} \right| = \frac{1}{-i2\pi l} (e^{-i2\pi \frac{q+1}{m} l} - e^{-i2\pi \frac{q}{m} l}) = \\ &= \frac{(e^{-i2\pi \frac{1}{m} l} - 1) e^{-i2\pi \frac{q}{m} l}}{-i2\pi l}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Підставами отриманий результат в I_1 :

$$I_1 = \frac{l}{k^2 + l^2} \cdot \frac{(e^{-i2\pi\frac{1}{m}l} - 1)}{-i2\pi l} \cdot \sum_{q=0}^{m-1} F_1\left(k, l, l \cdot \frac{z_q + z_{q+1}}{2}\right) e^{-i2\pi\frac{q}{m}l}. \quad (2.35)$$

Відмітимо, що:

$$\frac{z_q + z_{q+1}}{2} = \left(\frac{q}{M} + \frac{q+1}{M}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{q+0.5}{M}. \quad (2.36)$$

Таким чином,

$$I_1 = \frac{l}{k^2 + l^2} \cdot \frac{(e^{-i2\pi\frac{1}{m}l} - 1)}{-i2\pi l} \cdot \sum_{q=0}^{m-1} F_1\left(k, l, l \cdot \frac{q+0,5}{M}\right) e^{-i2\pi\frac{q}{m}l}. \quad (2.37)$$

Саме в такому вигляді використовуються формули для обчислення інтегралів в програмній реалізації в Mathcad.

Абсолютно аналогічно обчислюються інші інтеграли.

3 ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ ПРО КРАТНІ РЯДИ ФУР'Є ТА ФЕЙЄРА

3.1 Комплексна форма рядів Фур'є

Розглянемо довільну функцію з періодом 2π , абсолютно інтегровану у будь-якому кінцевому проміжку, та зв'язаний з нею ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx. \quad (3.1)$$

Коефіцієнти ряду Фур'є визначаються за формулами

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos mudu \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin mudu \quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Якщо замінити тепер $\cos mu$ та $\sin mu$ їх виразами через показникову функцію від чистого уявного аргументу

$$\begin{aligned} \cos mx &= \frac{1}{2} (e^{mxi} + e^{-mxi}), \\ \sin mx &= \frac{1}{2i} (e^{mxi} - e^{-mxi}) = \frac{i}{2} (e^{-mxi} - e^{mxi}), \end{aligned}$$

то отримаємо ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_m - b_m i) e^{mxi} + \frac{1}{2} (a_m + b_m i) e^{-mxi}.$$

Його коротше можна записати так:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{kxi}, \quad (3.3)$$

вважаючи

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad (3.4)$$

$$c_m = \frac{1}{2} (a_m - b_m i), \quad (3.5)$$

$$c_{-m} = \frac{1}{2} (a_m + b_m i), \quad (3.6)$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots), \quad (3.7)$$

так що

$$c_{-m} = \bar{c}_m. \quad (3.8)$$

Це і є комплексна форма ряду Фур'є функції $f(x)$. Якщо дотримані умови збіжності ряду (3.1) до функції $f(x)$, то до тієї ж суми збігається ряд (3.3), якщо тільки процес підсумовування його розуміти як пошук границі при $n \rightarrow +\infty$ симетрично складеної суми

$$\sum_{m=-n}^n c_m e^{mxi}.$$

Втім, якщо знаходяться порізно ряди

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{mxi},$$

$$\sum_{m=-1}^{\infty} c_{-m} e^{-mxi},$$

то згадана границя отримується шляхом складання їх сум.

Коефіцієнти c_m розкладу (3.3), обумовлені формулами (3.4)-(3.7), якщо урахувати формули Ейлера-Фур'є (3.2), можуть бути записані однаково:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-nui} du \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (3.9)$$

Ці коефіцієнти могли б бути отримані і безпосередньо, подібно коефіцієнтам a_m та b_m , якщо, допустивши, що функція $f(x)$ розкладається у ряд (3.3), помножити обидві частини рівності на e^{-nxi} та проінтегрувати від $-\pi$ до π , причому справа виконати інтегрування почленно.

Якщо маємо комплексну функцію

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x),$$

де f_1, f_2 – дійсні функції розглянутого типу, то звісно рядом Фур'є функції f назвати формальну суму рядів Фур'є функцій f_1 та f_2 , із яких другий попередю почленно помножений на i . У комплексній формі ряд Фур'є функції f має вигляд (3.3), де коефіцієнти c_n , як і тільки що, виражаються формулами (3.9).

Іноді розклад функції в ряд Фур'є звичайно та безпосередньо отримується саме у комплексній формі. У якості прикладу візьмемо твірну функцію для функції Бесселя та її розкладання:

$$e^{\frac{a}{2}(z-z^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(a) z^n.$$

Неважко бачити, що цей розклад має місце для всіх комплексних значень z , відмінних від нуля. Позначивши тут $z = e^{ix}$, знайдемо:

$$e^{ai \sin x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(a) e^{nxi}, \quad (3.10)$$

комплексна функція

$$e^{ai \sin x} = \sin(a \cos x) + i \sin(a \sin x), \quad (3.11)$$

виявилася розкладеною у ряд типу (3.3), який збігається рівномірно відносно x (за властивістю степеневого ряду) і тому явно буде її рядом Фур'є.

Враховуючи, що

$$J_{-m}(a) = (-1)^m J_m(a),$$

перепишемо отриманий розклад у вигляді:

$$\begin{aligned} & J_0(a) + \sum_{m=1}^{\infty} J_m(a) \left[e^{mxi} + (-1)^m e^{-mxi} \right] = \\ & = J_0(a) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(a) \cos 2kx + 2i \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(a) \sin(2k-1)x. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Якщо прирівняти окремо дійсні та уявні частини виразів (3.11) та (3.12), то прийдемо до цікавих розкладів

$$\cos(a \sin x) = J_0(a) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(a) \cos 2kx,$$

$$\sin(a \sin x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(a) \sin(2k-1)x.$$

Нарешті, якщо застосувати до обчислення коефіцієнтів розкладу (3.10) формули (3.9), то отримуємо відомі інтегральні вирази для бesselевих функцій:

$$J_n(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a \sin x - nx)i} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(a \sin x - nx) dx,$$

які нам не зустрічалися.

3.2 Спряжений ряд

Тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx, \quad (3.13)$$

з довільними дійсними коефіцієнтами можна формально розглядати, як дійсну частину степеневого ряду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m - b_m i) z^m, \quad (3.14)$$

розташованого по степеням комплексної змінної z , при $z = e^{xt}$.

Дійсно, тоді

$$z^m = e^{mxi} = \cos mx + i \sin mx,$$

та

$$(a_m - b_m i) z^m = (a_m \cos mx + b_m \sin mx) + i(-b_m \cos mx + a_m \sin mx).$$

Уявна ж частина формально представляється рядом

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-b_m \cos mx + a_m \sin mx). \quad (3.15)$$

Ряд (3.15) називається спряженим із рядом (3.13).

Особливий інтерес представляє ряд, спряжений із рядом Фур'є деякої (маючої період 2π і абсолютно інтегрованої) функції $f(x)$. Зокрема, можна паралельно з питанням про збіжність самого ряду Фур'є (3.13) поставити і питання про збіжність спряженого з ним ряду. Втім, в останньому випадку додатковою складністю служить та обставина, що наперед неясно, якої суми чекати від спряженого ряду.

3.3 Кратні ряди Фур'є

Можна розглядати ряди Фур'є і для деяких змінних. Щоб дати про це уявлення, достатньо обмежитися випадком функції двох змінних. Нехай для всіх дійсних значень x та y задана функція $f(x, y)$. Ми припустимо її період 2π як по x , та і по y , і інтегруючою (у власному або невластному сенсі) у квадраті

$$(Q) = [-\pi, \pi; -\pi, \pi].$$

Підлягаючи розкладанню (3.3) запишемо для неї двократний ряд

$$f(x, y) \sim \sum_{n, m=-\infty}^{+\infty} \gamma_{n, m} e^{(nx+my)i}, \quad (3.16)$$

де коефіцієнти $\gamma_{\nu, \mu}$ визначаються формулами, аналогічними (3.9)

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-nui} du, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$\gamma_{\nu, \mu} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) e^{-(\nu x + \mu y)i} dx dy, \quad (\nu, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Це і є ряд Фур'є функції $f(x, y)$ у комплексній формі. Його коефіцієнти могли бути отримані звичайним способом, якщо, замінюючи знак \sim у записаному вище співвідношенні на $=$, помножити обидві частини рівності на $e^{-(nx+my)i}$ та проінтегрувати по квадрату (Q) , виконуючи для ряду це інтегрування почленно.

У дійсній формі ряд Фур'є виглядає на цей раз досить громіздко. Якщо у комплексному ряді об'єднати спряжені члени, то отримаємо:

$$f(x, y) \sim \sum_{n, m=0}^{\infty} [a_{n, m} \cos nx \cos my + b_{n, m} \cos nx \sin my + c_{n, m} \sin nx \cos my + d_{n, m} \sin nx \sin my], \quad (3.17)$$

де

$$a_{0,0} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) dx dy,$$

$$a_{n,0} = \frac{1}{2\pi^2} \iint_{(Q)} f(x,y) \cos nx dx dy \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$a_{0,m} = \frac{1}{2\pi^2} \iint_{(Q)} f(x,y) \cos mx dx dy \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

$$b_{0,m} = \frac{1}{2\pi^2} \iint_{(Q)} f(x,y) \sin mx dx dy \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

$$c_{n,0} = \frac{1}{2\pi^2} \iint_{(Q)} f(x,y) \sin nx dx dy \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

і, нарешті, при $m, n = 1, 2, 3, \dots$

$$a_{n,m} = \frac{1}{\pi^2} \iint_{(Q)} f(x,y) \cos nx \cos my dx dy, \quad (3.18)$$

$$b_{n,m} = \frac{1}{\pi^2} \iint_{(Q)} f(x,y) \cos nx \sin my dx dy, \quad (3.19)$$

$$c_{n,m} = \frac{1}{\pi^2} \iint_{(Q)} f(x,y) \sin nx \cos my dx dy, \quad (3.20)$$

$$d_{n,m} = \frac{1}{\pi^2} \iint_{(Q)} f(x,y) \sin nx \sin my dx dy. \quad (3.21)$$

Взагалі, зазвичай ряд (3.17) пишуть у вигляді:

$$f(x,y) \sim \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{n,m} [a_{n,m} \cos nx \cos my + b_{n,m} \cos nx \sin my + \\ + c_{n,m} \sin nx \cos my + d_{n,m} \sin nx \sin my],$$

розуміючи під множником $\lambda_{n,m}$ четверть, якщо $n = m = 0$, половину, якщо

хоча б один із знаків n, m дорівнює нулю, і одиницю, якщо не один із них не нуль. Коефіцієнти $a_{n,m}, b_{n,m}, c_{n,m}, d_{n,m}$ розраховуються за формулами (3.18)-(3.21).

3.4 Ряди Фейєра

Нехай $f(x)$ є неперервною та 2π -періодичною функцією. Розглянемо послідовність $S_n(x)$ часткових сум ряду Фур'є функції $f(x)$. Визначимо суми Фейєра як середнє арифметичне сум $S_0(x), S_1(x), \dots, S_n(x)$:

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + \dots + S_n(x)}{n+1}. \quad (3.22)$$

Теорема (Фейєра). Послідовність $\sigma_n(x)$ сум Фейєра 2π -періодичної неперервної функції $f(x)$ рівномірно збігається до функції $f(x)$.

Скористаємося виразом для часткової суми ряду Фур'є через ядро Діріхле:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt, \quad (3.23)$$

де

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \dots + \cos nt = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t}. \quad (3.24)$$

Підставляючи вираз (3.23) у формулу (3.22) для суми Фейєра, отримаєм

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)F_n(t)dt, \quad (3.25)$$

де

$$F_n(t) = \frac{D_0(t) + \dots + D_n(t)}{n+1}. \quad (3.26)$$

Функцію $F_n(t)$ назвемо ядром Фейєра. Для доведення теореми існують наступні властивості ядра Фейєра:

а) $F_n(t)$ – парна, 2π -періодична та неперервна функція;

б) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = 1$;

в) $F_n(t) \geq 0$;

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\delta \leq t \leq \pi} F_n(t) = 0$ для будь-якого $\delta \in (0, \pi)$.

Властивості 1) та 2) випливають з формули (3.26) і відповідних властивостей ядра Діріхле. Доведемо властивість 3).

Підставляючи у формулу (3.27) для ядра Фейєра вираз (3.24) для ядер Діріхле, отримаємо

$$\begin{aligned} (n+1)F_n(t) &= D_0(t) + \dots + D_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(k + \frac{1}{2})}{2 \sin \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \sum_{k=0}^n 2 \sin \frac{x}{2} \sin(k + \frac{1}{2})x = \frac{1 - \cos(n+1)x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Доведемо властивість 4). З рівності (3.27) випливає, що

$$\sup F_n(x) \leq \frac{2}{4 \sin^2 \frac{\delta}{2}} \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, 0 < \delta < \pi.$$

Оцінимо тепер $\sigma_n(x) - f(x)$. Skorиставшись властивостями 2) та 3) ядра Фейєра, отримуємо, що

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) F_n(t) dt, \\ |\sigma_n(x) - f(x)| &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Неперервна на R та 2π -періодична функція рівномірно неперервна на R . Справді, в силу теореми Кантора функція $f(x)$ рівномірно неперервна на відрітку $[-2\pi, 2\pi]$. Тому для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для будь-яких $x, t \in [-2\pi, 2\pi]$ таких, що $|x - t| < \delta$, виконана нерівність $f(x) - f(t) < \varepsilon$.

Нехай ξ та η – довільні числа такі, що $|\xi - \eta| < \delta < \pi$. Тоді для будь-якого $\xi \in R$ знайдеться ціле число k таке, що $\xi - 2k\pi = x \in [-\pi, \pi]$. Так як при умові $|\xi - \eta| < \delta < \pi$, то $t = \eta - 2k\pi \in [-2\pi, 2\pi]$, і тому

$$|f(\xi) - f(\eta)| = |f(\xi - 2k\pi) - f(\eta - 2k\pi)| = |f(x) - f(t)| < \varepsilon,$$

що доводить рівномірну неперервність функції $f(x)$ на R .

Скористаємося рівномірною неперервністю функції $f(x)$ на R і для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдемо $\delta > 0$ таке, що для будь-якого $x \in R$ та при будь-якому

$|t| < \delta$ виконана рівність

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Розіб'ємо відрізок інтегрування за формулою (3.28) на три відрізка: $[-\pi, -\delta]$, $[-\delta, \delta]$, $[\delta, \pi]$. Скориставшись властивостями 2) та 3) ядра Фейєра, отримуємо, що

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{2} F_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.29)$$

Так як функція $f(x)$ неперервна на R і має період 2π , то вона обмежена на R . Нехай $|f(x)| < M$. Скористаємося властивістю 4) ядра Фейєра і знайдемо таке N , що для всіх $n > N$ виконана нерівність

$$\max_{t \in [\delta, \pi]} F_n(t) < \frac{\varepsilon}{8M}.$$

Тоді для всіх $n > N$ справедлива нерівність

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} (|f(x+t)| + |f(x)|) F_n(t) dt \leq \\ &\leq \frac{2M}{\pi} (\pi - \delta) \max_{t \in [\delta, \pi]} F_n(t) < 2M \frac{\varepsilon}{8M} = \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Аналогічно для всіх $n > N$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (3.31)$$

З нерівностей (3.28)-(3.31) випливає, що для будь-якого $x \in R$ і для всіх $n > N$ виконана нерівність

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

яке означає, що послідовність сум Фейера $\sigma_n(x)$ рівномірно на R збігається до функції $f(x)$.

4 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

4.1 Mathcad як система комп'ютерної математики

Mathcad – це популярна система комп'ютерної математики, призначена для автоматизації вирішення масових математичних задач в різних областях науки, техніки та освіти.

Mathcad містить сотні операторів і вбудованих функцій для вирішення різних технічних завдань. Програма дозволяє виконувати чисельні і символні обчислення, проводити операції з скалярними величинами, векторами і матрицями, автоматично переводити одні одиниці вимірювання в інші.

Серед можливостей Mathcad можна виділити наступні:

- розв'язання диференціальних рівнянь, в тому числі і чисельними методами;
- побудова двовимірних і тривимірних графіків функцій (в різних системах координат, контурні, векторні і так далі);
- використання грецького алфавіту як в рівняннях, так і в тексті;
- виконання обчислень в символному режимі;
- виконання операцій з векторами і матрицями;
- символний розв'язок систем рівнянь;
- апроксимація кривих;
- виконання підпрограм;
- пошук коренів многочленів і функцій;
- проведення статистичних розрахунків і робота з розподілом ймовірностей;
- пошук власних чисел і векторів;
- обчислення з одиницями вимірювання.

Якщо врахувати усе вище перераховане, то можна сказати, що Mathcad повністю підходить для програмної реалізації метода, який був описаний у розділі 2. Так як дана робота стосується теми математичного моделювання томо-

графічної реконструкції, то найбільш важливою вимогою є можливість графічного відображення даних у різних проекціях.

В даній роботі серед версій програми була обрана версія Mathcad 15.

4.2 Опис програми

Складена програма виконує відновлення функції по деякій заданій функції. Відповідно до завдання, відновлення функцій будуються з носіями у областях з накладаннями двох кругів, круга та двох еліпсів.

Вхідні дані програми:

- деяка функція $f(x, y)$ задана на області $D = [0,1] \times [0,1]$;
- (a, b) – координати центрів кругів, еліпсів та квадратів;
- σ – півосі еліпсів;
- r – радіус кругів;
- aa – довжина півсторони квадратів;
- α – кут повороту для еліпсів;
- K – кількість кругів, еліпсів та квадратів;
- PR – перемикач;

Виконується побудова зображень поверхні з використанням таблиці значень функції.

- m – максимальне значення функції;
- $knorm$ – нормувальний множник для отримання максимального значення функції;
- $\tilde{f}(x, y)$ – нормована функція, яка підлягає відновленню.

У результаті було отримано зображення поверхні $z = f(x, y)$ з використанням таблиці значень функції $f(x, y)$ та зображення поверхні $z = f(x, y)$ з безпосереднім використанням функції $f(x, y)$.

Інформація для побудови матриці коефіцієнтів Фур'є:

- T – лічильник часу роботи програми;
- N – число, пов'язане із кількістю доданків у сумі Фур'є;
- NNN – число доданків у сумі Фур'є;
- por – порядок матриці коефіцієнтів;

Далі знаходження коефіцієнтів Фур'є з використанням проєкційних даних:

- M – число, що дає розбивку відрізка на M частин;
- t, v – розбивка відрізка вздовж осі OX та OY на M частин;
- X_t, Y_v – точки розбиття відрізка вздовж осі OX та OY на M частин;
- γ_{1t} – проєкційні дані вздовж відрізків, паралельних осі OY ;
- γ_{2v} – проєкційні дані вздовж відрізків, паралельних осі OX ;

У результаті роботи програми, на виході ми отримуємо графік заданої функції, графік її ліній рівня, графік відновленої функції, графік ліній рівня відновленої функції та півтонове зображення. Також ми маємо змогу подивитися на отримані похибки.

Результат приводиться як графічно, так і в матричному вигляді.

У результаті роботи, реалізували алгоритм знаходження коефіцієнтів Фур'є.

Отже, ми можемо порівняти отримані результати.

5 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

5.1 Кількісні характеристики

Для визначення точності результатів обчислень застосовуються такі похибки: максимальна по модулю похибка δ_1 , середньоквадратична похибка δ_2 та середня абсолютна похибка δ_3 .

У наведених нище прикладах реалізації алгоритма прийняті такі позначення: N – число, відповідне верхньої границі у сумі Фур'є; $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – похибки відповідно.

Далі представлені результати обчислень:

- при $N = 8$, що відповідає порядку матриці коефіцієнтів Фур'є $(2N + 1) = 17$ та числу доданків у сумі Фур'є $(2N + 1)^2 = 289$;
- при $N = 16$, що відповідає порядку матриці коефіцієнтів Фур'є $(2N + 1) = 33$ та числу доданків у сумі Фур'є $(2N + 1)^2 = 1089$;
- при $N = 32$, що відповідає порядку матриці коефіцієнтів Фур'є $(2N + 1) = 65$ та числу доданків у сумі Фур'є $(2N + 1)^2 = 4225$.

Наведені графічні ілюстрації та таблиці з кількісними характеристиками.

5.2 Результати розв'язку задачі для функції з носієм у області з накладанням двох еліпсів

Розглянемо експеримент з накладанням двох об'єктів

$$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y),$$

де

$$f_1(x, y) = \left[- \left[\frac{x - a_1}{\sigma_{11}} + \frac{y - b_1}{\sigma_{12}} - 1 \right] \right]^2, \text{ якщо } \frac{x - a_1}{\sigma_{11}} + \frac{y - b_1}{\sigma_{12}} \leq 1,$$

$$f_2(x, y) = \left[- \left[\frac{x - a_2}{\sigma_{21}} + \frac{y - b_2}{\sigma_{22}} - 1 \right] \right]^2, \text{ якщо } \frac{x - a_2}{\sigma_{21}} + \frac{y - b_2}{\sigma_{22}} \leq 1,$$

де

$(a_1; b_1) = (0, 5; 0, 5)$ – центр першого еліпса;

$\sigma_{11} = 0,12, \sigma_{12} = 0,46$ – півосі першого еліпса;

$(a_2; b_2) = (0, 5; 0, 5)$ – центр другого еліпса;

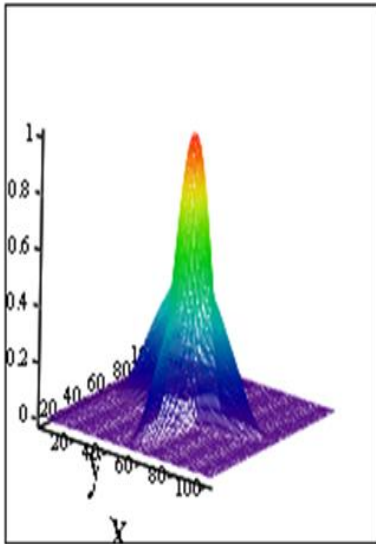
$\sigma_{21} = 0,46, \sigma_{22} = 0,12$ – півосі другого еліпса.

Значення похибок та часу роботи програми у мінутах t наведено у таблиці 5.1

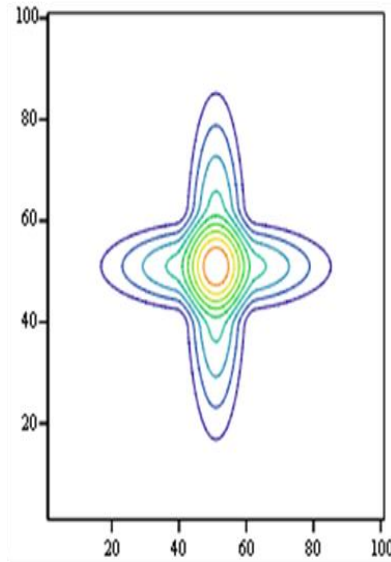
Таблиця 5.1 – Результати обчислень задачі 5.2

N	δ_1	δ_2	δ_3	t
8	0,029	$4,905 \cdot 10^{-3}$	$2,96 \cdot 10^{-3}$	4,9
16	0,007	$8,71 \cdot 10^{-4}$	$5,202 \cdot 10^{-4}$	17,6
32	0,002	$2,235 \cdot 10^{-4}$	$1,301 \cdot 10^{-4}$	63,3

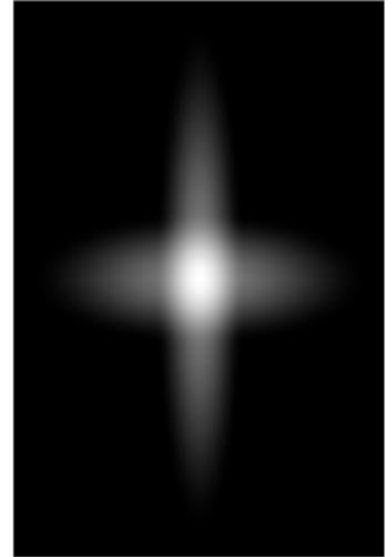
При збільшенні числа N час роботи програми збільшувався.



а)



б)

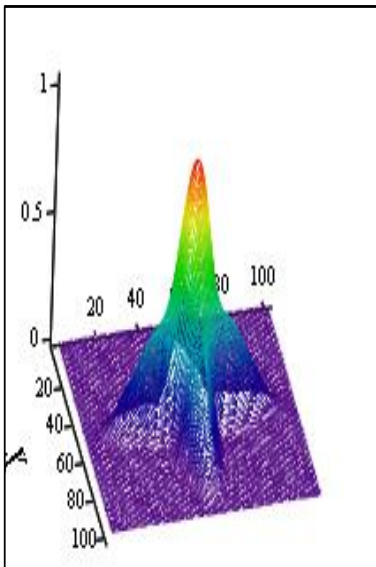


в)

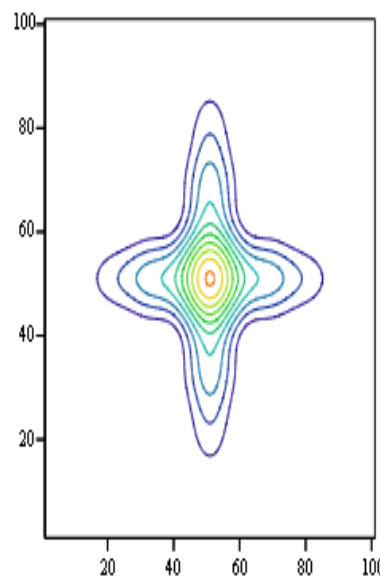
а) – графік заданої функції; б) – лінії рівня заданої функції;

в) – півтонове зображення

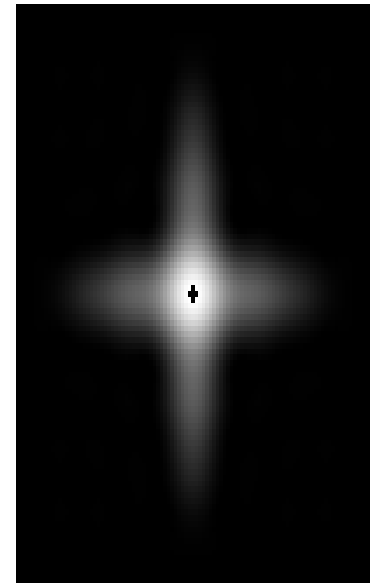
Рисунок 5.1 – Задана функція



а)



б)



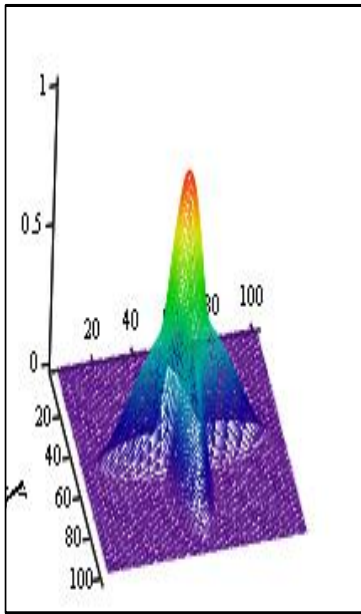
в)

BZF

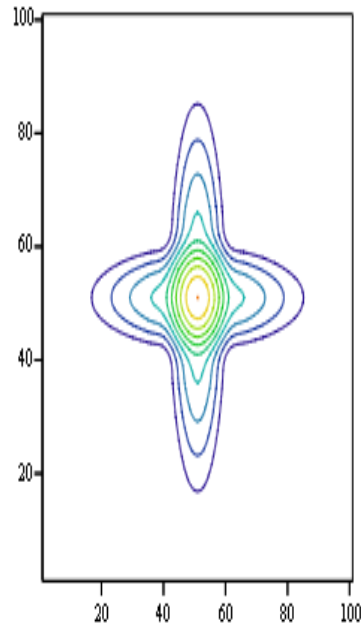
а) – графік відтвореної функції; б) – лінії рівня відтвореної функції;

в) – півтонове зображення

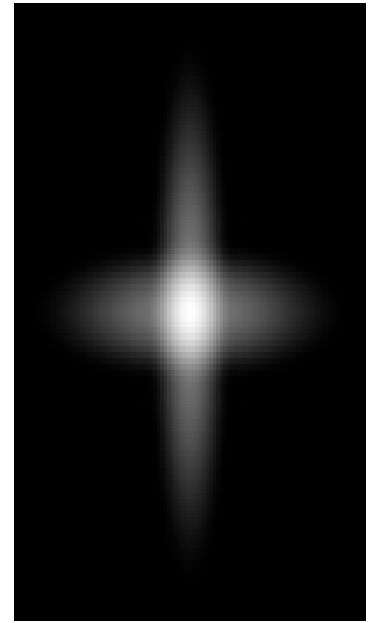
Рисунок 5.2 – Розв'язок задачі 5.2 для $N = 8$



а)



б)



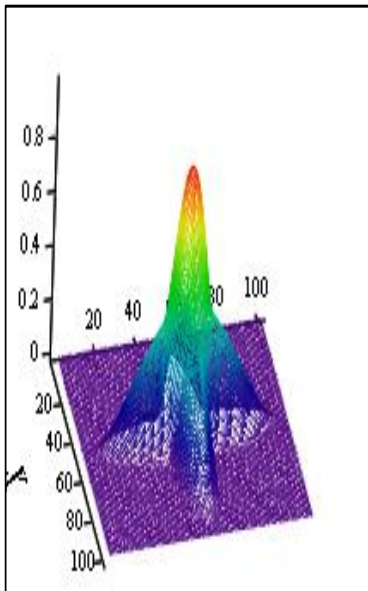
в)

BZF

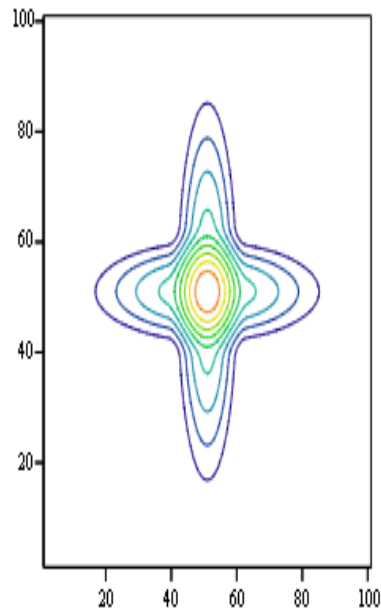
а) – графік відтвореної функції, б) – лінії рівня відтвореної функції,
в) – півтонове зображення.

BZF

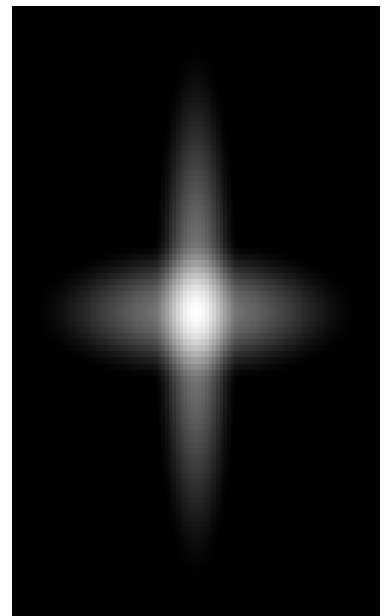
BZF:KK

Рисунок 5.3 – Розв'язок задачі 5.2 для $N = 16$ 

а)



б)



в)

BZF

а) – графік відтвореної функції; б) – лінії рівня відтвореної функції;
в) – півтонове зображення

BZF

BZF:KK

Рисунок 5.4 – Розв'язок задачі 5.2 для $N = 32$

5.3 Результати розв'язку задачі для функції з носієм у області з накладанням круга, еліпса та квадрата

5.3.1 Випадок для неперервної функції

Розглянемо експеримент з накладанням трьох об'єктів для неперервної функції

$$g(x, y) = g_1(x, y) + g_2(x, y) + g_3(x, y),$$

де

$$g_1(x, y) = \frac{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2}{r_1^2}, \text{ якщо } (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 \leq r_1^2,$$

$$g_2(x, y) = \left[- \left[\frac{x - a_2}{\sigma_{11}} + \frac{y - b_2}{\sigma_{12}} - 1 \right] \right]^2, \text{ якщо } \frac{x - a_2}{\sigma_{11}} + \frac{y - b_2}{\sigma_{12}} \leq 1,$$

$$g_3(x, y) = \frac{[aa^2 - (x - a_3)^2]^2 \cdot [aa^2 - (y - b_3)^2]^2}{aa^8}, \text{ якщо } |x - a_3| < aa \wedge |y - b_3| < aa,$$

де

$(a_1; b_1) = (0, 3; 0, 4)$ – центр круга;

$r_1 = 0,16$ – радіус круга;

$(a_2; b_2) = (0, 45; 0, 6)$ – центр еліпса;

$\sigma_{11} = 0,25$, $\sigma_{12} = 0,15$ – півосі еліпса;

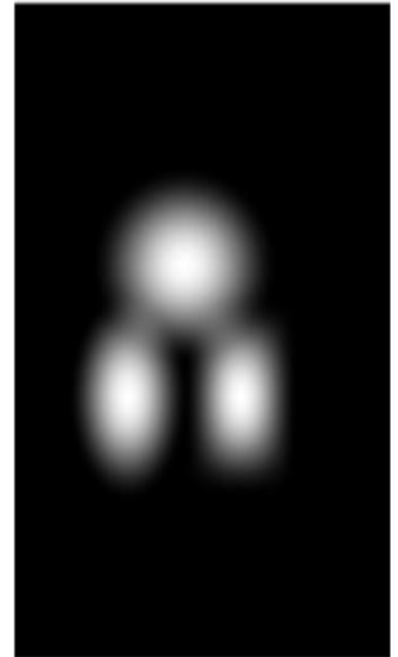
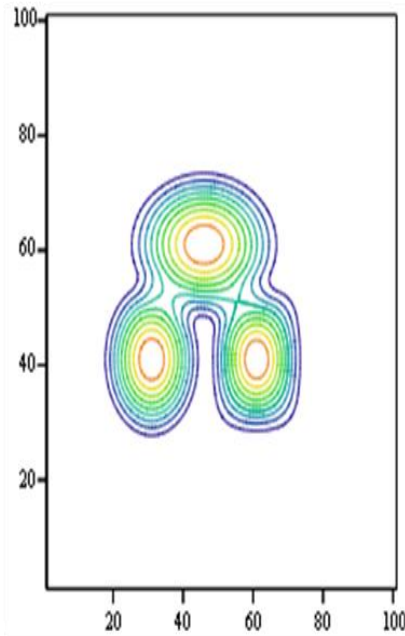
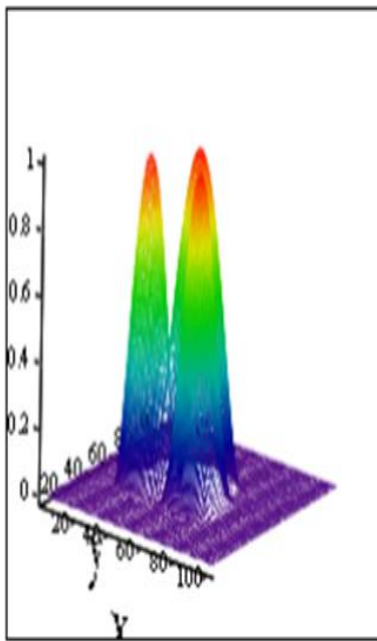
$(a_3; b_3) = (0, 6; 0, 4)$ – центр квадрата;

$aa = 0,15$ – довжина пів сторони квадрата.

Таблиця 5.2 – Результати обчислень задачі 5.3.1

N	δ_1	δ_2	δ_3	t
8	0,024	$4,758 \cdot 10^{-3}$	$3,08 \cdot 10^{-3}$	6,43
16	0,006	$1,024 \cdot 10^{-3}$	$5,853 \cdot 10^{-4}$	24,5
32	0,005	$3,248 \cdot 10^{-4}$	$1,965 \cdot 10^{-4}$	101,0

При збільшенні числа N час роботи програми збільшувався.



а)

б)

в)

а) – графік заданої функції; б) – лінії рівня заданої функції;

в) – півтонове зображення

Рисунок 5.5 – Задана функція

де

$(a_1; b_1) = (0, 3; 0, 4)$ – центр круга;

$r_1 = 0,16$ – радіус круга;

$(a_2; b_2) = (0, 45; 0, 6)$ – центр еліпса;

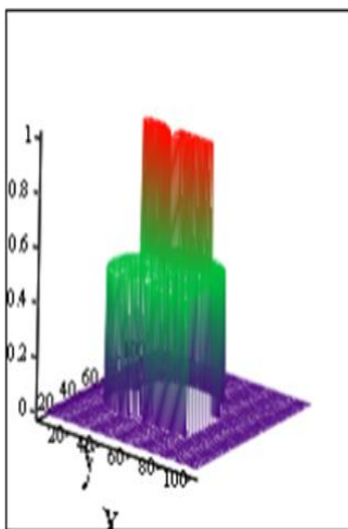
$\sigma_{11} = 0,25, \sigma_{12} = 0,15$ – півосі еліпса;

$(a_3; b_3) = (0, 6; 0, 4)$ – центр квадрата;

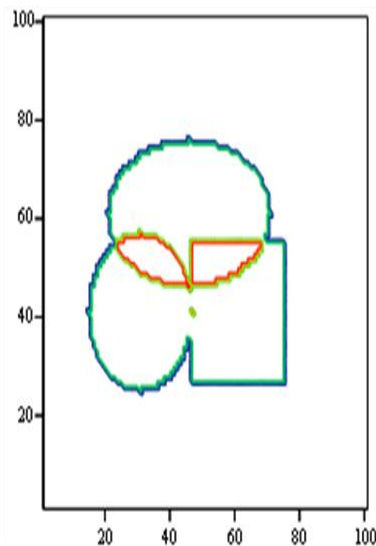
$aa = 0,15$ – довжина пів сторони квадрата.

Таблиця 5.3 – Результати обчислень задачі 5.3.2

N	δ_1	δ_2	δ_3	t
8	0,538	0,068	0,036	21,9
16	0,493	0,05	0,023	80,9
32	0,474	0,041	0,016	314,0



а)



б)

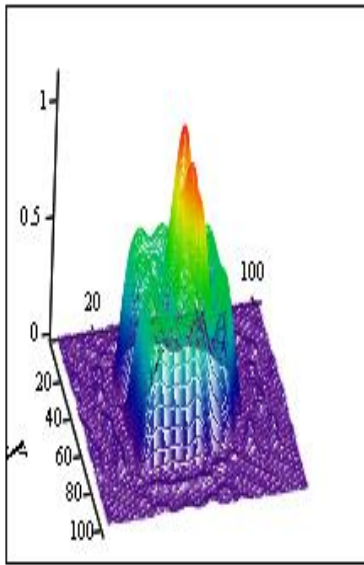


в)

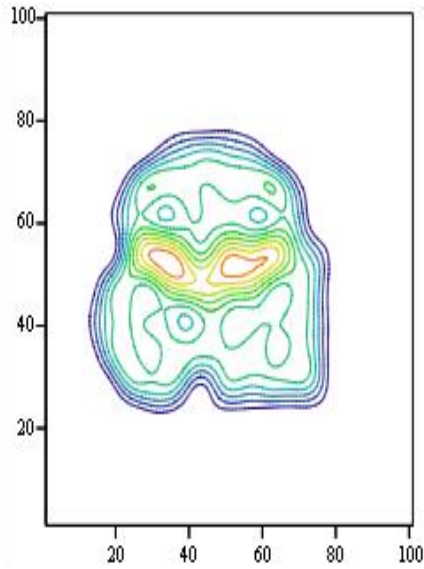
а) – графік заданої функції; б) – лінії рівня заданої функції;

в) – півтонове зображення

Рисунок 5.7 – Задана функція



а)



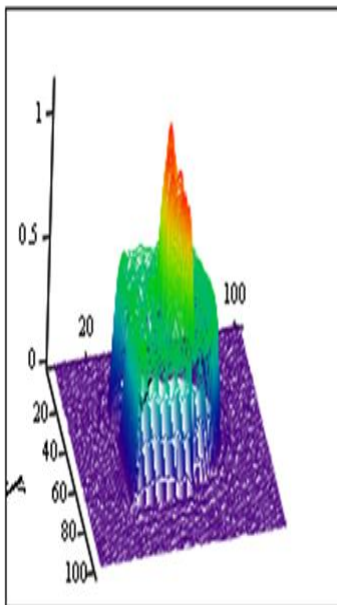
б)



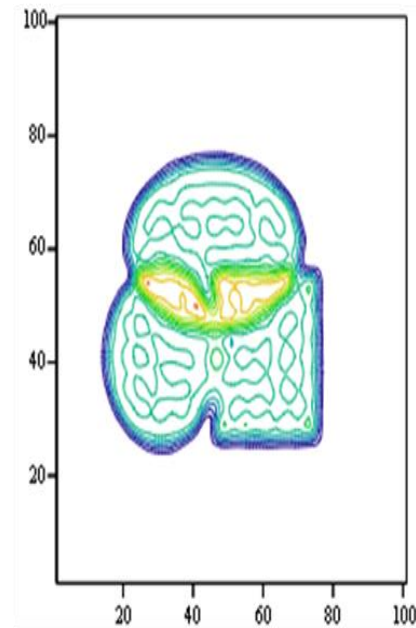
в)

а) – графік відтвореної функції; б) – лінії рівня відтвореної функції;
в) – півтонове зображення

Рисунок 5.8 – Розв'язок задачі 5.3.2 для $N = 8$



а)



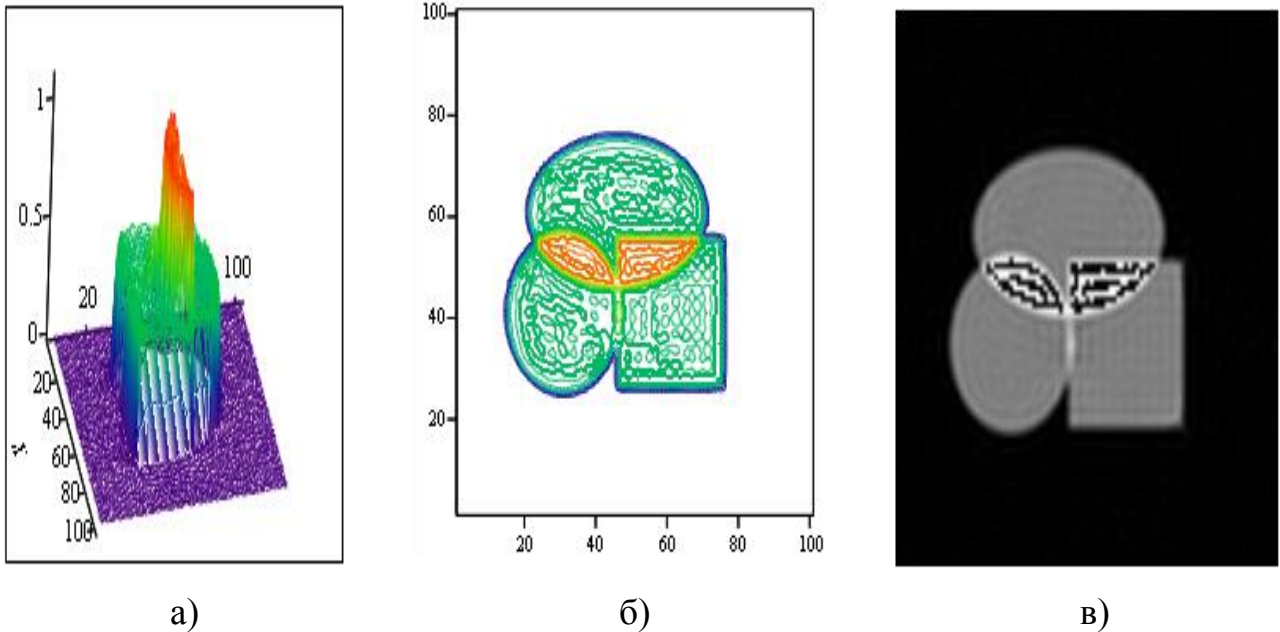
б)



в)

а) – графік відтвореної функції; б) – лінії рівня відтвореної функції;
в) – півтонове зображення

Рисунок 5.9 – Розв'язок задачі 5.3.2 для $N = 16$



а) – графік відтвореної функції; б) – лінії рівня відтвореної функції;
в) – півтонове зображення

Рисунок 5.10 – Розв’язок задачі 5.3.2 для $N = 32$

5.4 Результати розв’язку задачі для функції з носієм у області з накладанням двох кругів та двох еліпсів

Розглянемо експеримент з накладанням чотирьох об’єктів

$$h(x, y) = h_1(x, y) + h_2(x, y),$$

$$h_1(x, y) = \sum_{i=1}^2 \frac{(x - a_{1i})^2 + (y - b_{1i})^2}{r_i^2}, \text{ якщо } (x - a_{1i})^2 + (y - b_{1i})^2 \leq r_i^2,$$

$$h_2(x, y) = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{(x - a_{2i})^2}{\sigma_{i1}^2} + \frac{(y - b_{2i})^2}{\sigma_{i2}^2} - 1 \right]^2, \text{ якщо } \frac{(x - a_{2i})^2}{\sigma_{i1}^2} + \frac{(y - b_{2i})^2}{\sigma_{i2}^2} \leq 1,$$

де

$(a_{11}; b_{11}) = (0, 2; 0, 25)$ – центр першого круга;

$r_i = 0,17$ – радіус круга;

$(a_{12}; b_{12}) = (0, 2; 0, 45)$ – центр другого круга;

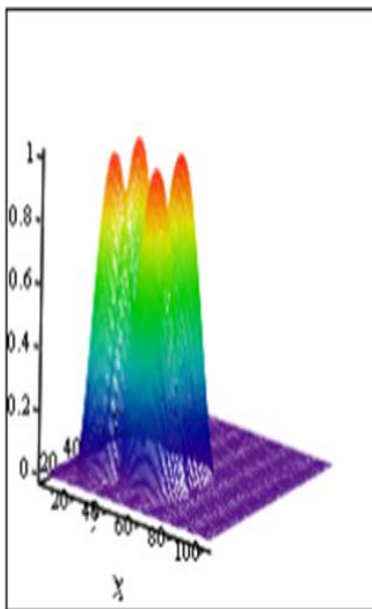
$(a_{21}; b_{21}) = (0, 46; 0, 25)$ – центр першого еліпса;

$\sigma_{i1} = 0,21$, $\sigma_{i2} = 0,15$ – півосі еліпса;

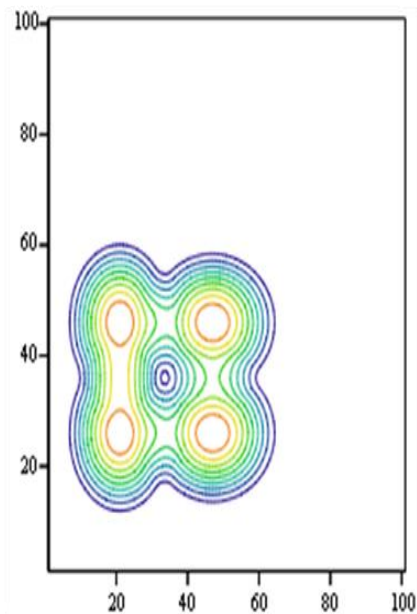
$(a_{22}; b_{22}) = (0, 46; 0, 45)$ – центр другого еліпса.

Таблиця 5.4 – Результати обчислень задачі 5.4

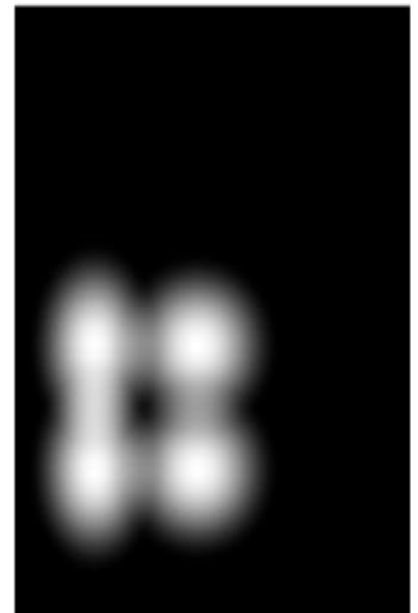
N	δ_1	δ_2	δ_3	t
8	0,047	$6,295 \cdot 10^{-3}$	$4,126 \cdot 10^{-3}$	6,3
16	0,006	$1,043 \cdot 10^{-3}$	$6,671 \cdot 10^{-4}$	24,4
32	0,004	$3,716 \cdot 10^{-4}$	$2,486 \cdot 10^{-4}$	202,0



а)



б)

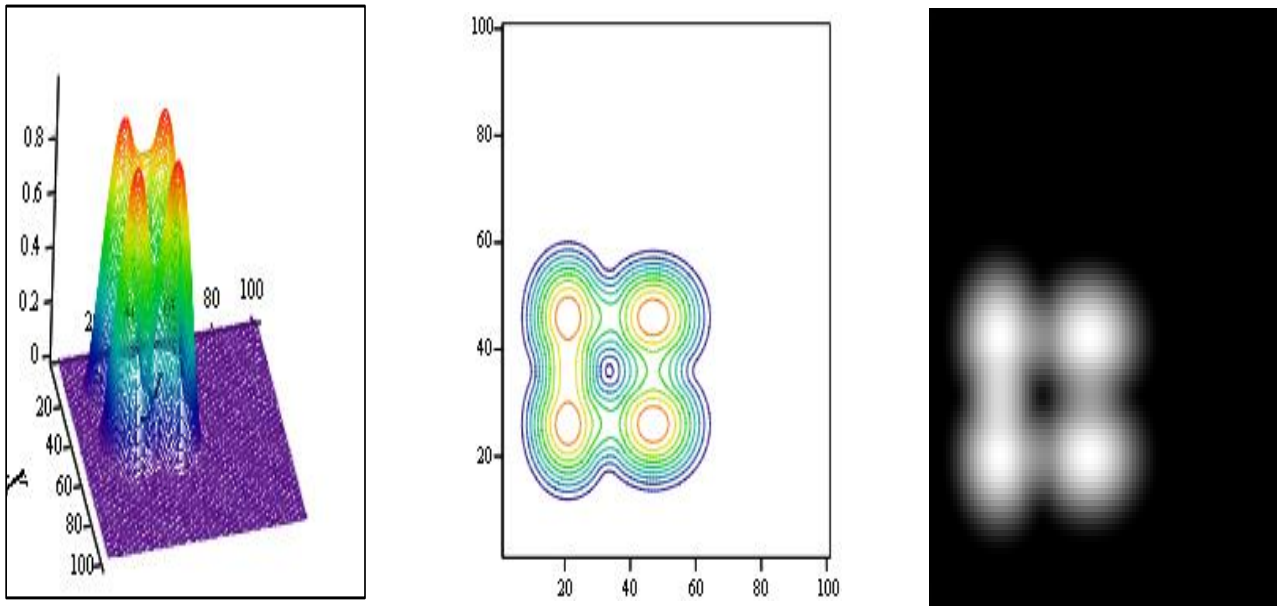


в)

а) – графік заданої функції; б) – лінії рівня заданої функції;

в) – півтонове зображення

Рисунок 5.11 – Задана функція



а) – графік відтвореної функції; б) – лінії рівня відтвореної функції; в) – півтонове зображення

Рисунок 5.12 – Розв’язок задачі 3 для $N = 32$

5.5 Результати розв’язку задачі для функції з носієм у області з накладанням чотирьох кругів

Розглянемо експеримент з накладанням чотирьох об’єктів

$$j(x, y) = j_1(x, y),$$

де

$$j_1(x, y) = \sum_{i=1}^4 \frac{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}{r_i^2}, \text{ якщо } (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 \leq r_i^2,$$

де

$(a_1; b_1) = (0, 5; 0, 3)$ – центр першого круга;

$(a_2; b_2) = (0, 7; 0, 5)$ – центр другого круга;

$(a_3; b_3) = (0, 5; 0, 7)$ – центр третього круга;

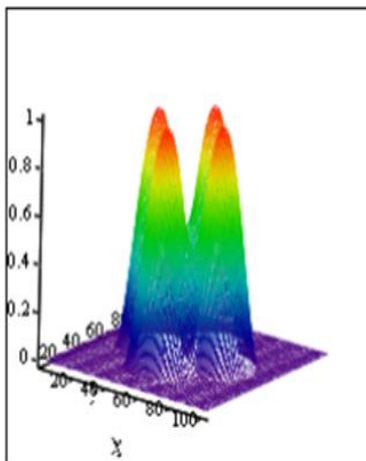
$(a_4; b_4) = (0, 3; 0, 5)$ – центр четвертого круга;

$r_i = 0,19$ – радіус круга.

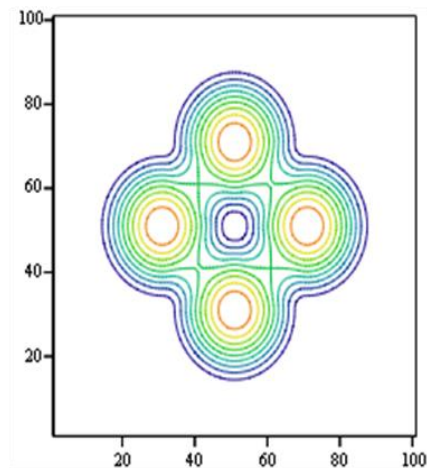
Таблиця 5.5 – Результати обчислень задачі 5.5

N	δ_1	δ_2	δ_3	t
8	0,018	$4,117 \cdot 10^{-3}$	$2,868 \cdot 10^{-3}$	4,86
16	0,005	$8,62 \cdot 10^{-4}$	$5,931 \cdot 10^{-4}$	17,9
32	0,014	$5,187 \cdot 10^{-4}$	$2,539 \cdot 10^{-4}$	94,5

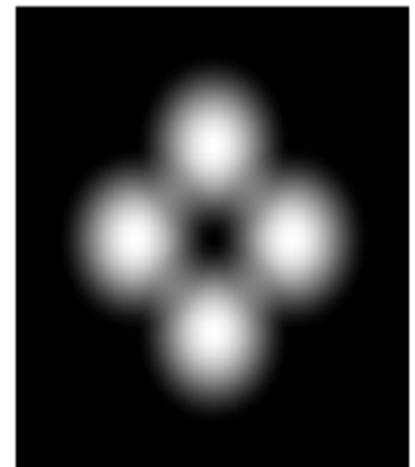
При збільшенні числа N час роботи програми збільшувався.



а)



б)

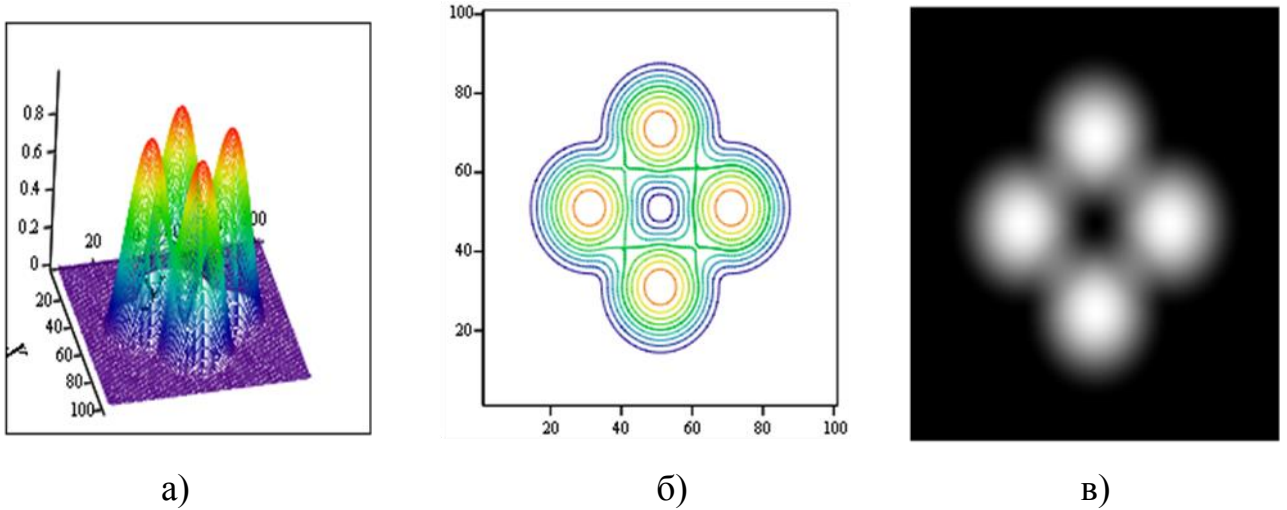


в)

а) – графік заданої функції; б) – лінії рівня заданої функції;

в) – півтонове зображення

Рисунок 5.13 – Задана функція



а) – графік відтвореної функції; б) – лінії рівня відтвореної функції;
в) – півтонове зображення

Рисунок 5.14 – Розв’язок задачі 5.5 для $N = 32$

5.6 Результати розв’язку задачі для функції з носієм у області з накладанням чотирьох еліпсів

Розглянемо експеримент з накладанням чотирьох об’єктів

$$k(x, y) = k_1(x, y)$$

де

$$k_1(x, y) = \sum_{i=1}^4 \left[- \left[\frac{x - a_1}{\sigma_{i1}}^2 + \frac{y - b_1}{\sigma_{i2}}^2 - 1 \right] \right]^2, \text{ якщо } \frac{x - a_1}{\sigma_{i1}}^2 + \frac{y - b_1}{\sigma_{i2}}^2 \leq 1,$$

$$x = x1 \cdot \cos(\alpha_i) - y1 \cdot \sin(\alpha_i),$$

$$y = x1 \cdot \sin(\alpha_i) + y1 \cdot \cos(\alpha_i),$$

де

$(a_1; b_1) = (0; 0,5)$ – центр першого еліпса;

$\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ – кут повороту для першого еліпса;

$(a_2; b_2) = (-0,75; -0,25)$ – центр другого еліпса;

$\alpha_2 = \frac{3\pi}{4}$ – кут повороту для другого еліпса;

$(a_3; b_3) = (0; -1)$ – центр третього еліпса;

$\alpha_3 = \frac{5\pi}{4}$ – кут повороту для третього еліпса;

$(a_4; b_4) = (0,75; -0,25)$ – центр четвертого еліпса;

$\alpha_4 = \frac{7\pi}{4}$ – кут повороту для четвертого еліпса;

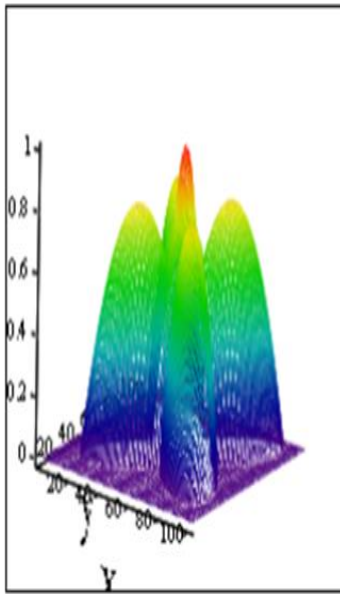
$\sigma_{i1} = 0,15$, $\sigma_{i2} = 0,3$ – півосі еліпса.

Значення похибок та часу роботи програми у мінутах зазначено у таблиці 5.6.

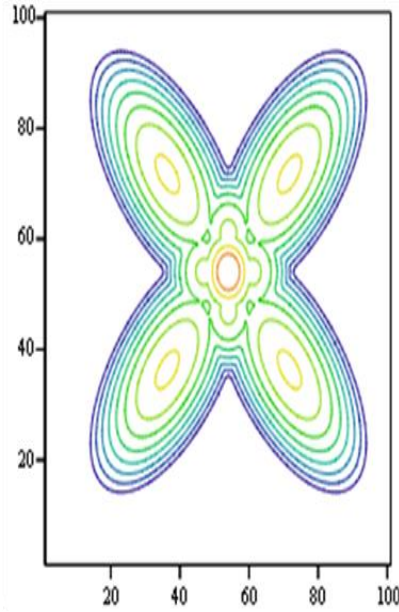
Таблиця 5.6 – Результати обчислень задачі 5.6

N	δ_1	δ_2	δ_3	t
8	0,089	0,015	0,01	8,1
16	0,04	$5,41 \cdot 10^{-3}$	$4,837 \cdot 10^{-3}$	31,0
32	0,017	$2,127 \cdot 10^{-3}$	$1,28 \cdot 10^{-3}$	118,0

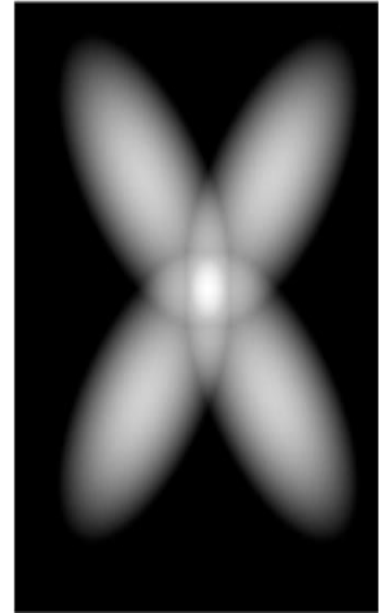
При збільшенні числа N час роботи програми збільшується.



а)



б)

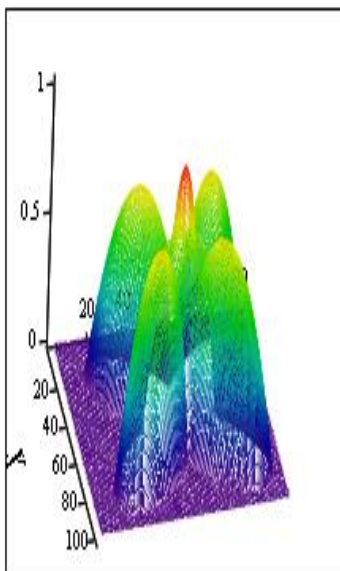


в)

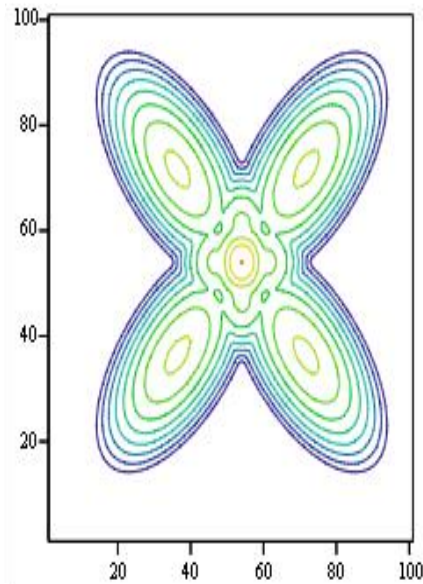
а) – графік заданої функції; б) – лінії рівня заданої функції;

в) – півтонове зображення

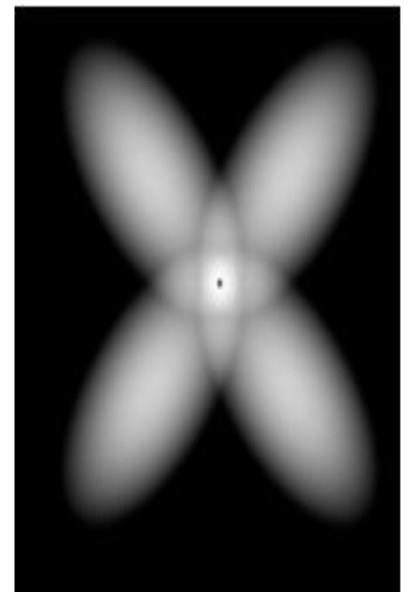
Рисунок 5.15 – Задана функція



а)



б)



в)

а) – графік відтвореної функції; б) – лінії рівня відтвореної функції;

в) – півтонове зображення

Рисунок 5.16 – Розв'язок задачі 6.5 для $N = 32$

5.7 Результати розв'язку задачі для функції з носієм у області з накладанням одного квадрата, одного еліпса та трьох кругів

Розглянемо експеримент з накладанням п'яти об'єктів

$$l(x, y) = l_1(x, y) + l_2(x, y) + l_3(x, y),$$

$$l_1(x, y) = \frac{[aa^2 - (x - a_1)^2]^2 \cdot [aa^2 - (y - b_1)^2]^2}{aa^8}, \text{ якщо } |x - a_1| < aa \wedge |y - b_1| < aa,$$

$$l_2(x, y) = \left[- \left[\frac{x - a_2}{\sigma_{21}^2} + \frac{y - b_2}{\sigma_{22}^2} - 1 \right] \right]^2, \text{ якщо } \frac{x - a_2}{\sigma_{21}^2} + \frac{y - b_2}{\sigma_{22}^2} \leq 1,$$

$$l_3(x, y) = \sum_{i=1}^3 \frac{(x - a_{3i})^2 + (y - b_{3i})^2}{r_i^2}, \text{ якщо } (x - a_{3i})^2 + (y - b_{3i})^2 \leq r_i^2,$$

де

$$(a_1; b_1) = (0, 55; 0, 5) \text{ – центр квадрата;}$$

$$aa = 0, 2 \text{ – довжина пів сторони квадрата;}$$

$$(a_2; b_2) = (0, 3; 0, 37) \text{ – центр еліпса;}$$

$$\sigma_{21} = 0, 2, \sigma_{22} = 0, 1 \text{ – півосі еліпса;}$$

$$(a_{3i}; b_{3i}) = (0, 33; 0, 65) \text{ – центр першого круга;}$$

$$(a_{4i}; b_{4i}) = (0, 74; 0, 33) \text{ – центр другого круга;}$$

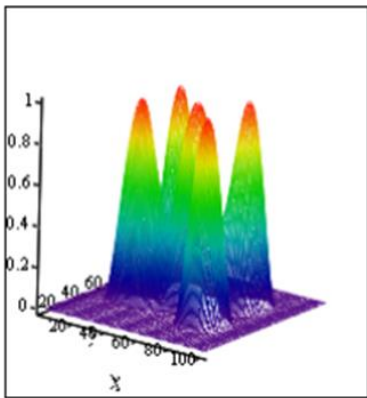
$$(a_{5i}; b_{5i}) = (0, 74; 0, 68) \text{ – центр третього круга;}$$

$$r_i = 0, 15 \text{ – радіус круга.}$$

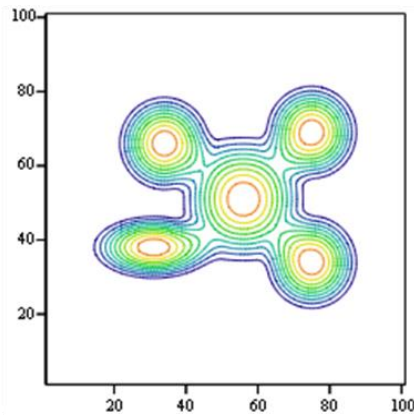
Значення похибок та часу роботи програми у мінутах зазначено у таблиці

Таблиця 5.7 – Результати обчислень задачі 5.7

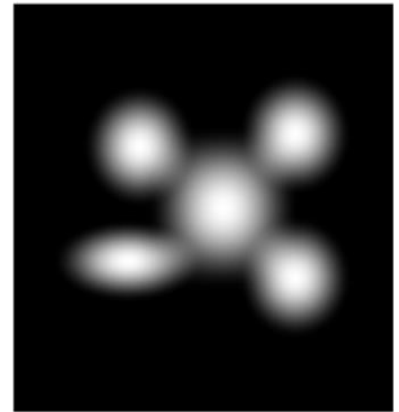
N	δ_1	δ_2	δ_3	t
8	0,043	$8,558 \cdot 10^{-3}$	$6,076 \cdot 10^{-3}$	9,66
16	0,014	$1,745 \cdot 10^{-3}$	$1,107 \cdot 10^{-3}$	37,5
32	0,01	$5,95 \cdot 10^{-4}$	$3,506 \cdot 10^{-4}$	148,0



а)



б)

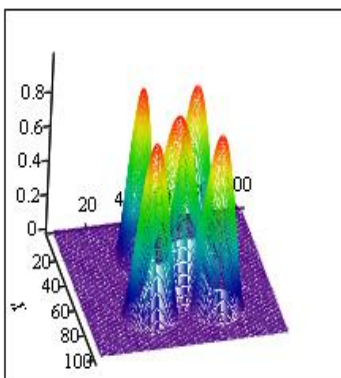


в)

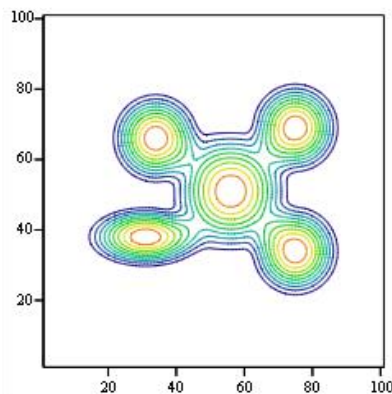
а) – графік заданої функції; б) – лінії рівня заданої функції;

в) – півтонове зображення

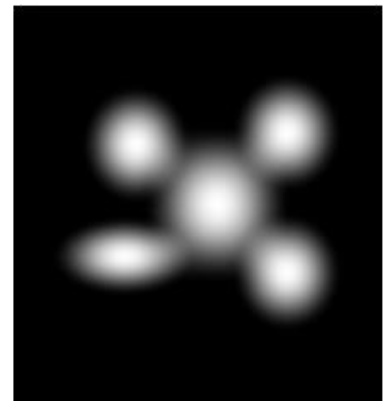
Рисунок 5.17 – Задана функція



а)



б)



в)

а) – графік відтвореної функції; б) – лінії рівня відтвореної функції;

в) – півтонове зображення

Рисунок 5.18 – Розв'язок задачі 6.6 для $N = 32$

5.8 Результати розв'язку задачі для функції з носієм у області з накладанням восьми кругів

Розглянемо експеримент для функції з носієм у області з накладанням восьми об'єктів

$$d(x, y) = d_1(x, y),$$

де

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^8 \frac{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}{r_i^2}, \text{ якщо } (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 \leq r_i^2,$$

де

$(a_1; b_1) = (0, 5; 0, 2)$ – центр першого круга;

$(a_2; b_2) = (0, 8; 0, 5)$ – центр другого круга;

$(a_3; b_3) = (0, 5; 0, 8)$ – центр третього круга;

$(a_4; b_4) = (0, 2; 0, 5)$ – центр четвертого круга;

$(a_5; b_5) = (0, 65; 0, 35)$ – центр п'ятого круга;

$(a_6; b_6) = (0, 65; 0, 65)$ – центр шостого круга;

$(a_7; b_7) = (0, 35; 0, 65)$ – центр сьомого круга;

$(a_8; b_8) = (0, 35; 0, 35)$ – центр восьмого круга;

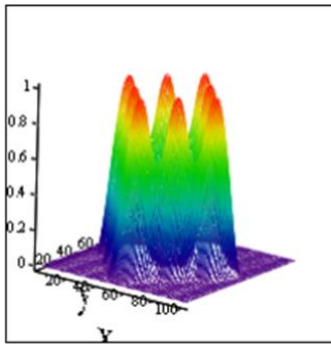
$r_i = 0,16$ – радіус круга.

Значення похибок та часу роботи програми у мінутах t наведено у таблиці 5.8.

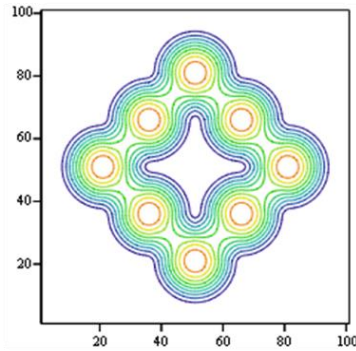
Таблиця 5.8 – Результати обчислень задачі 5.8

N	δ_1	δ_2	δ_3	t
8	0,043	$7,982 \cdot 10^{-3}$	$5,717 \cdot 10^{-3}$	7,26
16	0,012	$1,837 \cdot 10^{-3}$	$1,269 \cdot 10^{-3}$	28,1
32	0,006	$5,616 \cdot 10^{-4}$	$3,755 \cdot 10^{-4}$	114,0

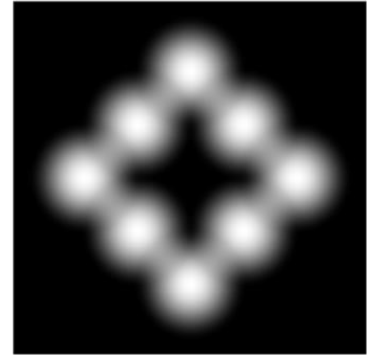
При збільшенні числа N час роботи програми збільшувався.



а)



б)

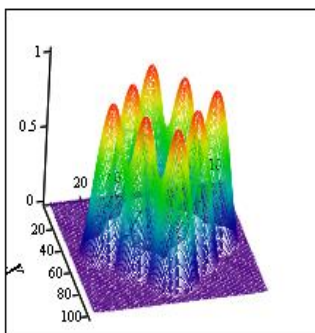


в)

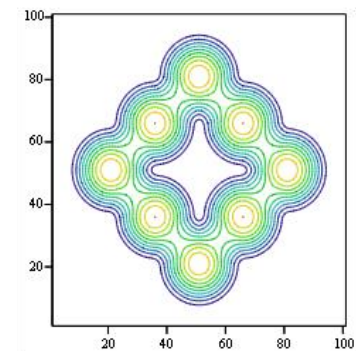
а) – графік заданої функції; б) – лінії рівня заданої функції;

в) – півтонове зображення

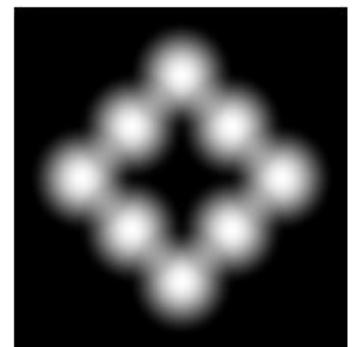
Рисунок 5.19 – Задана функція



а)



б)



в)

а) – графік відтвореної функції; б) – лінії рівня відтвореної функції;

в) – півтонове зображення

Рисунок 5.20 – Розв'язок задачі 5.8 для $N = 32$

6 АНАЛІЗ МОЖЛИВИХ ЗАСТОСУВАНЬ

Аналізуючи зображення, отримані на рисунках 5.1 – 5.20 можна зробити висновок, що зображення відновлені достатньо точно, окрім того випадку, де у якості відновлювальної функції було взято константу. Графіки заданих функцій та графіки відтворених функцій майже збігаються.

Аналізуючи дані, що наведені в таблицях 5.1 – 5.8 можна зробити висновок, що зображення відновлено з високою точністю в рамках задач комп'ютерної томографії, якщо не брати до уваги випадок для розривної функції.

Як бачимо, якщо збільшити параметр N , то похибка зменшується, але при цьому час виконання програми збільшується.

Варто відмітити, що при збільшенні кількості об'єктів, у яких задана функція, час виконання програми зростає.

Час виконання роботи програми також залежить і від того, у якості чого буде взято відновлювальну функцію.

ВИСНОВКИ

В результаті виконання атестаційної роботи було проведено дослідження та аналіз системи складної організаційної структури «Лікувально-діагностична клініка». Розроблені морфологічна, інформаційна, функціональна моделі і побудована модель розв'язку проблеми.

В даній роботі були розроблені ефективні алгоритми відновлення функцій з використанням метода, який заснований на представленні шуканих функцій у вигляді скінченних сум Фур'є. Реалізований програмний продукт поставленої задачі.

Під час досліджень було відновлено вісім тестових функцій з носіями у областях з накладаннями кругів, еліпсів та квадратів. Також для кожної задачі були розраховані похибки отриманих результатів при різних значеннях параметра N .

Аналіз результатів показує, що при збільшенні числа N , відповідного верхньої границі у сумі Фур'є, похибки зменшуються. Це характерно для всіх видів похибок. Час реалізації алгоритму зростає з підвищенням числа N . Чим складніше область, тим більше часу для реалізації алгоритму. Якщо відновлювальна функція розривна, то час роботи програми буде довшим.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Литвин О. М. Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії // Системний аналіз, управління і інформаційні технології: Вісник Харківського держ. політех. ун-ту : зб. наукових праць. 2000. Вип. 125. С. 27–35.
2. Литвин О. М., Кулик С. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням вейвлетів // Проблеми машинобудування. 2008. № 2. С. 56–65.
3. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові розділи : навч. посіб. Київ. : Наукова думка, 2005. 332 с.
4. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. Москва : Мир, 1990. 280 с.
5. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. Москва : Мир, 1983. 352 с.
6. Нуссбаумэр Г. Быстрые преобразования Фурье и алгоритмы вычисления сверток / пер. с англ. Москва : Радио и связь, 1985. 248 с.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. Москва : Наука, 1966. 656 с.
8. Будаков Б. М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. Москва : Наука, 1965. 607 с.
9. Троицкий И. Н. Статистическая теория томографии. Москва : Радио и связь, 1989. 240 с.
10. Терещенко С. А. Методы вычислительной томографии. Москва : Физматлит, 2004. 320 с.
11. Кирьянов Д. В. Mathcad 15. Mathcad Prime 1.0. Санкт-Петербург. “БХВ-Петербург”, 2012. 432 с.