Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

АТЕСТАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Модель оптимізації використання мисливських ресурсів
(тема)

Виконав:
студент _2_ курсу, групи _ПМм-18-1
Ніколаєнко В. А.
(прізвище, ініціали)
Спеціальність
113 Прикладна математика
(код і повна назва спеціальності)
Тип програми _освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма
Прикладна математика
(повна назва освітньої програми)
Керівник доц. Наумейко І. В.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ _____ Тевяшев А.Д.
(підпис) (прізвище, ініціали)

2019 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет _інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
Кафедра _прикладної математики
Рівень вищої освіти _другий (магістерський)
Спеціальність _113 Прикладна математика
(код і повна назва)
Тип програми _освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма _Прикладна математика
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____
(підпис)
"____" _____ 2019 р.

ЗАВДАННЯ
НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Ніколаєнку Владиславу Артуровичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Модель оптимізації використання мисливських ресурсів

затверджена наказом по університету від 31 жовтня 2019 р. № 1600 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 9 грудня 2019 р.

3. Вихідні дані до роботи модель Вольтерри та її параметри, метод Рунге-Кутти, література з методів чисельного диференціювання та динамічних систем

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі
1. Системний аналіз проблеми математичного моделювання екологічного біоценозу за допомогою системи Вольтерри
2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання задачі
3. Програмна реалізація
4. Результати обчислювального експерименту

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій (слайдів)

1. Актуальність теми роботи
2. Постановка задачі
3. Системний аналіз проблеми
4. Метод чисельного аналізу
5. Результати обчислювального експерименту

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення літератури за темою роботи	вересень 2019 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	жовтень – листопад 2019 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	листопад – грудень 2019 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	листопад – грудень 2019 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	грудень 2019 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	грудень 2019 р.	виконано

Дата видачі завдання _2_ вересня 2019 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ доц. Наумейко І. В.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 53 с., 7 табл., 9 рис., 2 дод., 40 джерел.

ЕКОЛОГІЧНА СИСТЕМА, МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, ПОЛЮВАННЯ, ОПТИМІЗАЦІЯ.

Об’єкт дослідження – взаємодія біологічних популяцій в замкненій екологічній системі.

Мета роботи – отримати розв’язок задачі оптимізації мисливського процесу.

Методи дослідження – системний аналіз, чисельні методи оптимізації, чисельні методи рішення диференціальних рівнянь.

Для опису мисливського господарства в першому наближенні використана модель Вольтерра. Поставлено та розв’язано задачу оптимізації мисливських трофеїв при дотриманні екологічних умов. Надалі уточнення моделі може бути в напрямку обліку декількох періодів полювання протягом біологічного циклу і навіть безперервного полювання.

ABSTRACT

Introductory note: 53 pages, 7 tables, 9 figures, 2 appendixes, 40 sources.

ENVIRONMENTAL SYSTEM, MATHEMATICAL MODEL, HUNTING, OPTIMIZATION.

The object of research is interaction of biological populations in a closed ecological system.

The purpose of this work is to get a solution to the problem of optimizing the hunting process.

Methods of work – system analysis, numerical methods of optimization, numerical methods of solving differential equations.

To describe the hunting economy in the first approximation the Volterra's model is use. The task of optimizing the hunting trophies with respect to environmental conditions is set and solved. Further refinement of the model may be in the direction of accounting for several hunting periods during the biological cycle and even continuous hunting.

ЗМІСТ

ВСТУП

В даний час математичне моделювання широко застосовується для вирішення багатьох актуальних завдань екології та біології [2]. Довгострокові екологічні прогнози, дослідження антропогенного впливу на навколишнє середовище, моделі походження життя, вивчення людського організму, завдання генетики – це далеко не повний перелік завдань, вирішення яких в даний час неможливо без застосування математичного моделювання.

Одним з важливих напрямків в цих дослідженнях є математичне моделювання біологічних популяцій. Воно застосовується для вирішення таких завдань, як збереження зникаючих і рідкісних видів, прогнозування чисельності промислових популяцій і розробка оптимальних стратегій промислу, вивчення впливу антропогенних факторів на чисельність біологічних видів, і інших [6].

Об’єкт дослідження – взаємодія біологічних популяцій в замкненій екологічній системі.

Мета роботи – отримати розв’язок задачі оптимізації мисливського процесу.

Методи дослідження – системний аналіз, чисельні методи оптимізації, чисельні методи диференціювання.

Завдання дослідження на системний аналіз – зробити вербальний опис системи, розробити функціональну та інформаційну модель системи, також побудувати ієрархічну модель вибору мови програмування та написати постановку оптимізаційної задачі.

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ЗАМКНЕНОЇ МИСЛИВСЬКОЇ СИСТЕМИ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз екологічної системи, яка підлягає моделі Вольтерри

1.1.1 Вербальна модель системи

В якості системи, що досліджується, розглядатимемо складну систему «Аналіз моделі Вольтерри».

Метафункція системи – аналіз моделі Вольтерри засобами мови програмування для вирішення даної задачі.

Призначення системи: прогнозування поведінки системи при заданих початкових умовах.

Дана система складається з двох підсистем:

а) апарат керування:

1) дослідник;

2) прикладне програмне забезпечення;

б) теоретична та обчислювальна база:

1) знання мови програмування;

2) математичний апарат;

3) початкові дані.

Система «Аналіз моделі Вольтерри» відноситься до цілеспрямованих систем, для яких призначення визначається їх можливістю (властивістю) сприймати потреби та виконувати певні дії для їх задоволення. Отже, призначенням моделі є надання математичної моделі та її аналіз. Для реалізації цілі системи використовуються різноманітні ресурси. До них відносяться: інформаційні, обчислювальні, часові.

Головний вихід системи – аналіз результатів. На вхід системи подаються дані про взаємодію видів, які беруть участь у еволюції системи. За допомогою

мови програмування та безпосередньо за участі дослідника, керуючись інформаційною базою, здійснюється реалізація процесу моделювання.

Модель системи типу «чорний ящик» наведена на рисунку 1.1.

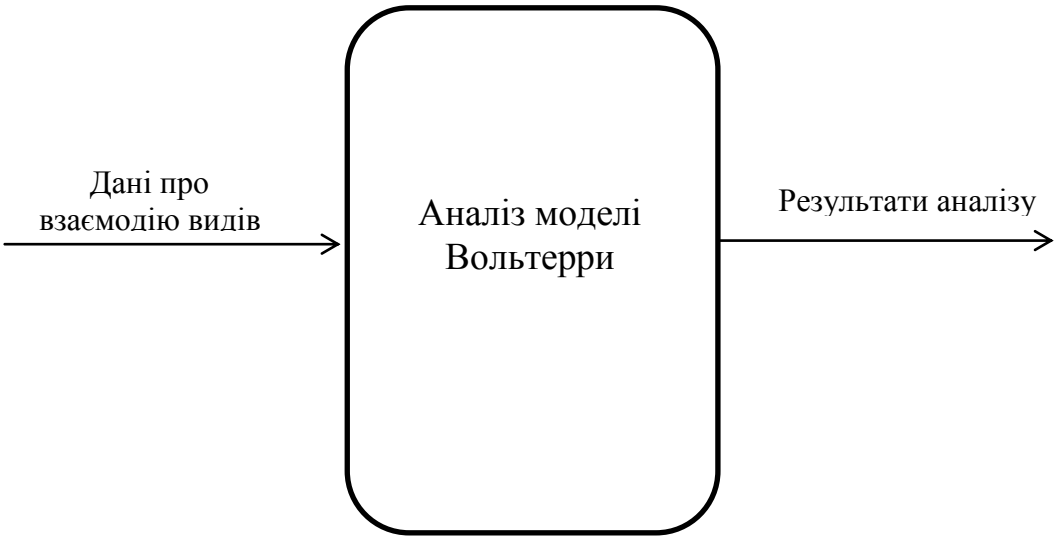

Рисунок 1.1 – Модель системи типу «чорний ящик»

1.1.2 Функціональна модель системи

Представимо розглянуту систему у вигляді функціональної моделі IDEF0. Для цього будемо використовувати програмний продукт BPWin 4.0. При моделюванні необхідно виділити головну функцію системи – метафункцію, а потім декомпозувати її на кілька підфункцій. При цьому на кожен блок (функцію) впливають певні чинники – вхідні і вихідні дані, управління і засоби реалізації.

Зробимо декомпозицію метафункції на наступні підфункції (рисунок 1.3).

Побудована функціональна модель наочно показує набір основних функцій і їх зв’язок між собою [1, 3, 5, 9]. Таке уявлення моделі допомагає уникнути нераціонального використання сил і засобів.

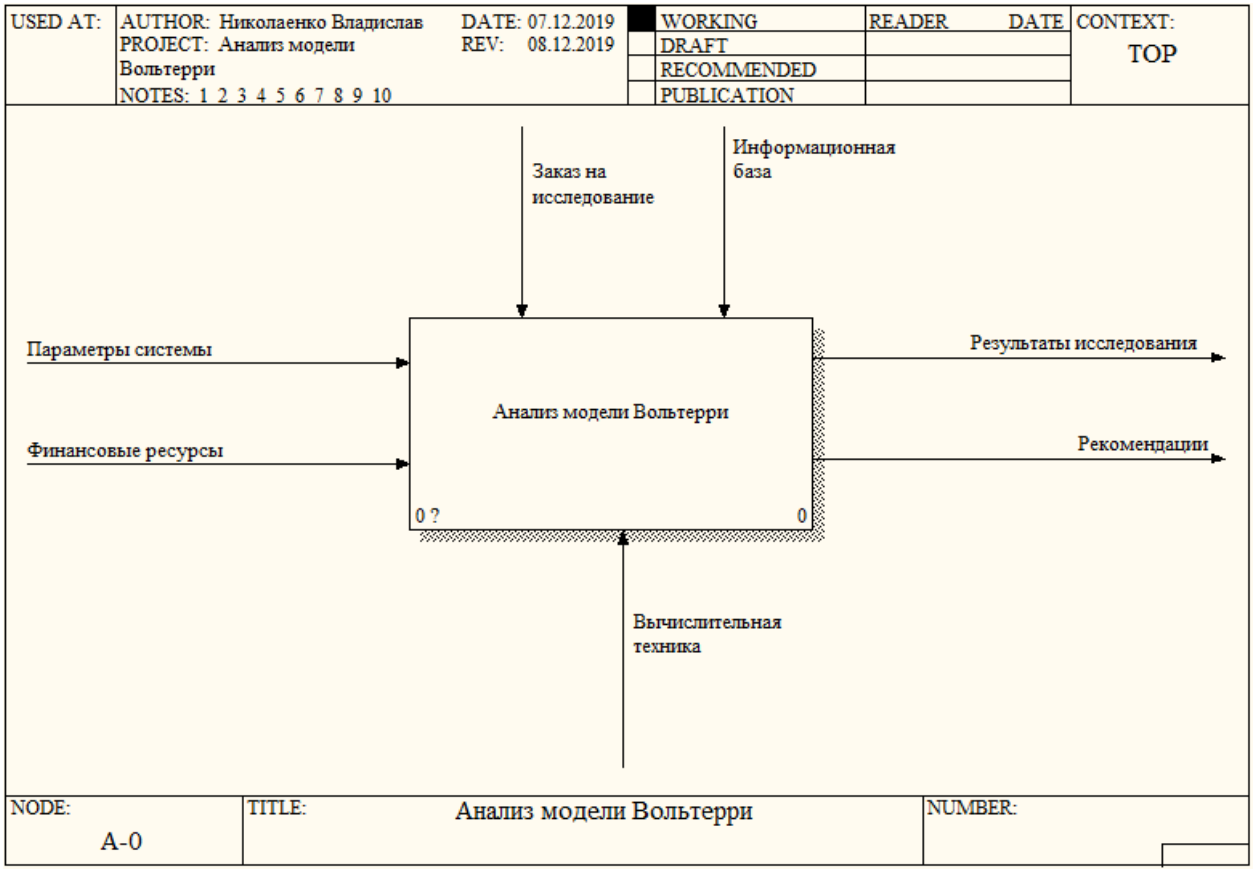

Рисунок 1.2 – Функціональна модель – IDEF0

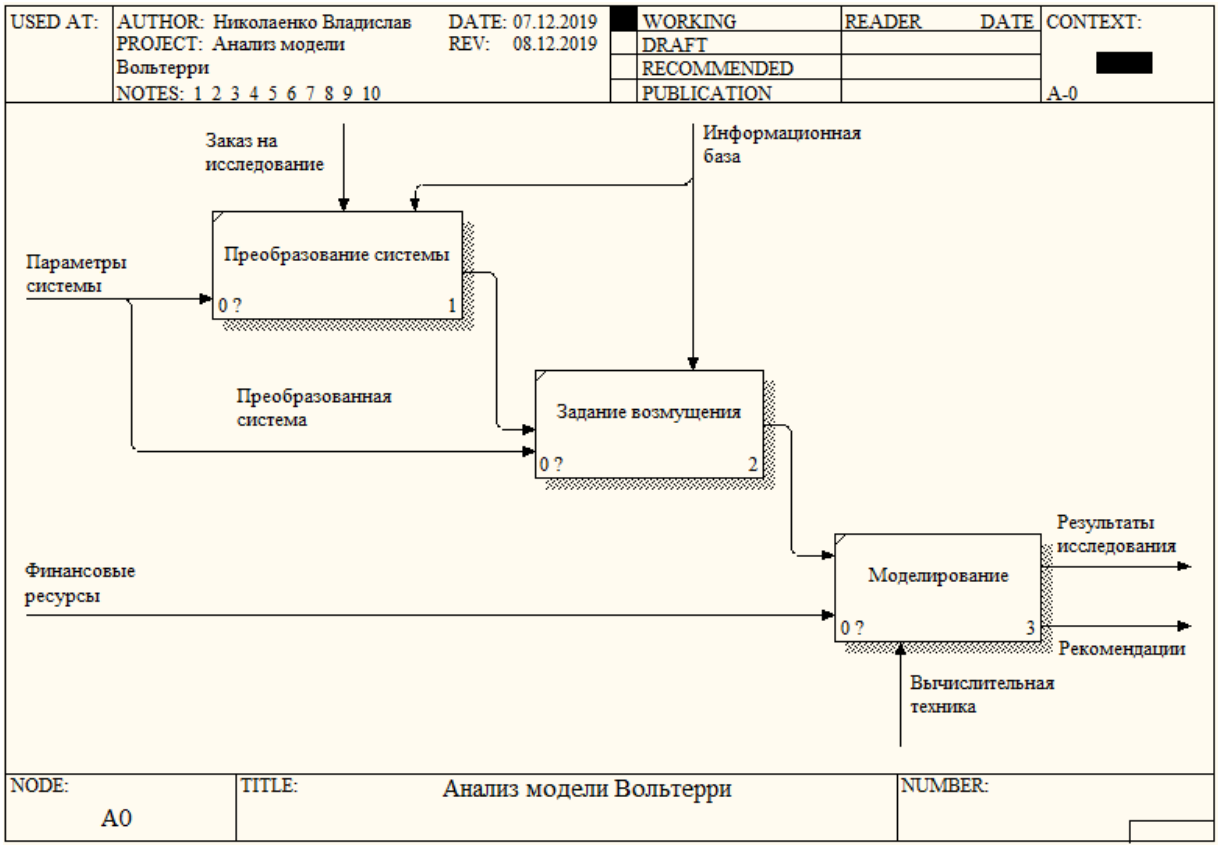

Рисунок 1.3 – Декомпозиція метафункції

1.1.3 Інформаційна модель

Створимо інформаційну модель (DFD) найбільш значущою функції – моделювання поведінки системи. Для цього зробимо декомпозицію цієї функції на завдання і потоки даних, які взаємодіють із зовнішніми об’єктами і сховищами даних (рисунок 1.4).

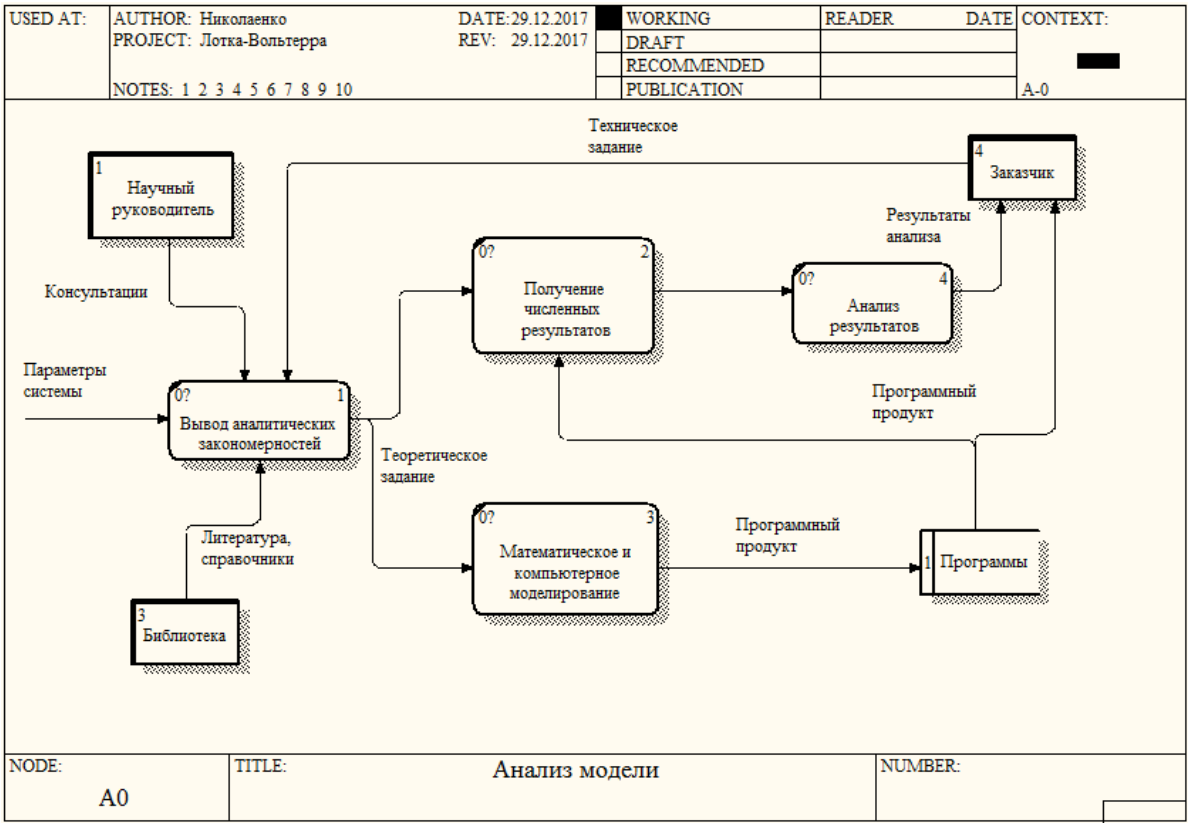

Рисунок 1.4 – Інформаційна модель (DFD)

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми математичного моделювання системи Вольтерри

1.2.1 Модель аналізу проблеми

Необхідно вибрати мову програмування для створення та дослідження моделі Вольтерри. Були обрані наступні критерії:

– критерій 1 (К1): Середня швидкість обчислень;

– критерій 2 (К2): Велика кількість математичних функцій;

– критерій 3 (К3): Простота реалізації;

– критерій 4 (К4): Власні знання мови програмування.

Були обрані наступні кандидати:

– альтернатива 1 (А1): Mathematica 10;

– альтернатива 2 (А2): C#;

– альтернатива 3 (А3): Java;

– альтернатива 4 (А4): Python.

Ієрархічна структура проблеми вибору має вигляд, представлений на рис. 1.5.

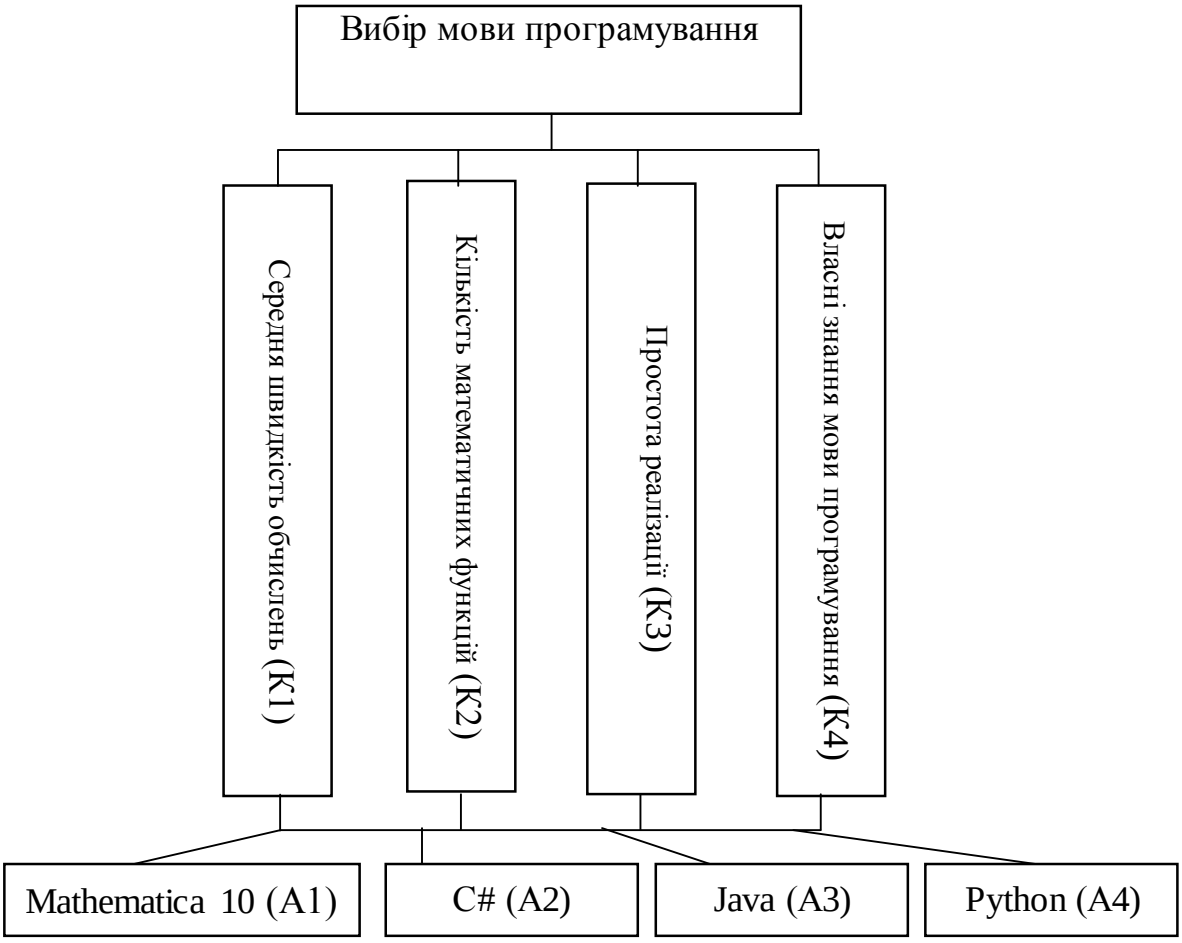

Рисунок 1.5 – Ієрархічна проблема вибору мови програмування

1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

Спочатку сформуємо матрицю попарних порівнянь [2] для елементів першого рівня ієрархії, тобто матрицю попарних порівнянь важливості критеріїв.

Таблиця 1.1 – Матриця попарних порівнянь критеріїв

	К1	К2	К3	К4
К1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
К2	5	1	3	$\frac{1}{5}$
К3	3	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{7}$
К4	7	5	7	1

Розрахунок вектора локальних пріоритетів критеріїв міститься в таблиці 1.2.

Для обчислення індексу узгодженості знаходимо суми елементів матриці з стовпцями:

$$y_1 = 1+5+3+7 = 16, \quad y_2 = \frac{1}{5}+1+\frac{1}{3}+5 = 6{,}533,$$

$$y_3 = \frac{1}{3}+3+1+7 = 11{,}333, \quad y_3 = \frac{1}{7}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+1 = 1{,}486.$$

Тоді:

$$\lambda_{\max}^{K} \approx 16 \cdot 0,0504 + 6,533 \cdot 0,2123 + 11,333 \cdot 0,0992 + 1,486 \cdot 0,6382 = 4,2652,$$

індекс узгодженості:

$$CI^{K} = \frac{4,2652 - 4}{4 - 1} = 0,0884.$$

Таблиця 1.2 – Розрахунок вектора локальних пріоритетів критеріїв

	К1	К2	К3	К4	Середнє геометричне за рядками	Вектор пріоритетів
К1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	$x_1 = \sqrt[4]{1 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}} = 0,31239$	$p_1^k = \frac{x_1}{\sum} = 0,0504$
К2	5	1	3	$\frac{1}{5}$	$x_2 = \sqrt[4]{5 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{5}} = 1,31607$	$p_2^k = \frac{x_2}{\sum} = 0,2123$
К3	3	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{7}$	$x_3 = \sqrt[4]{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{7}} = 0,61479$	$p_3^k = \frac{x_3}{\sum} = 0,0992$
К4	7	5	7	1	$x_4 = \sqrt[4]{7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1} = 3,95632$	$p_4^k = \frac{x_4}{\sum} = 0,6382$
					$\sum = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6,1996$	

Оскільки матриця попарних порівнянь критеріїв є матрицею четвертого порядку, и $RI^{K} = 0,9$ то відношення узгодженості:

$$CR^{K} = \frac{CI^{K}}{RI^{K}} = \frac{0,0884}{0,9} = 0,0982.$$

Оскільки відношення узгодженості менше ніж 0,1, то вважаємо, що мат-

риця попарних порівнянь критеріїв побудована правильно. Вектор локальних пріоритетів щодо проблеми вибору дорівнює:

$$\vec{p}^{K} = (0,0504;\ 0,2123;\ 0,0992;\ 0,6382)^{T}.$$

Розшифровуючи значення вектора локальних пріоритетів, можна сказати, що головним пріоритетом є власні знання мови. Далі за важливістю в порядку убування слід велика кількість математичних функцій. Далі простота реалізації. Потім – середня швидкість обчислень.

Таблиця 1.3 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К1

К1	А1	А2	А3	А4
А1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$
А2	3	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$
А3	5	5	1	1
А4	8	7	1	1

Таблиця 1.4 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К2

К2	А1	А2	А3	А4
А1	1	7	3	3
А2	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$
А3	$\frac{1}{3}$	5	1	$\frac{1}{3}$
А4	$\frac{1}{3}$	7	3	1

Далі формуємо матриці попарних порівнянь альтернатив (мов програмування) за кожним критерієм.

Таблиця 1.5 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К3

К3	А1	А2	А3	А4
А1	1	7	5	3
А2	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
А3	$\frac{1}{5}$	3	1	$\frac{1}{3}$
А4	$\frac{1}{3}$	7	3	1

Таблиця 1.6 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К4

К4	А1	А2	А3	А4
А1	1	7	1	7
А2	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{1}{5}$	3
А3	1	5	1	5
А4	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	1

Для кожної матриці (аналогічно як і для матриці попарних порівнянь критеріїв) розраховуємо вектори локальних пріоритетів:

$$\vec{p}_1^A = \begin{pmatrix} 0,0520 \\ 0,0931 \\ 0,3845 \\ 0,4704 \end{pmatrix},\ \vec{p}_2^A = \begin{pmatrix} 0,4845 \\ 0,0435 \\ 0,1485 \\ 0,2729 \end{pmatrix},\ \vec{p}_3^A = \begin{pmatrix} 0,5505 \\ 0,0494 \\ 0,1150 \\ 0,2797 \end{pmatrix},\ \vec{p}_4^A = \begin{pmatrix} 0,4550 \\ 0,0931 \\ 0,3845 \\ 0,0537 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриці попарних порівнянь альтернатив – це матриці четвертого порядку, то $RI^A = 0,9$. Індекси узгодженості і відношення узгодженості для матриць парних порівнянь альтернатив за кожним критерієм рівні:

$$CI_{K1}^A = 0,0379,\ CI_{K2}^A = 0,0224,\ CI_{K3}^A = 0,0458,\ CI_{K4}^A = 0,0211,$$
$$CR_{K1}^A = 0,0422,\ CR_{K2}^A = 0,0249,\ CR_{K3}^A = 0,0508,\ CR_{K4}^A = 0,0234.$$

Всі відносини узгодженості менше, ніж 0,1, що свідчить про хорошу узгодженості думок експерта.

Розрахуємо вектор глобальних пріоритетів альтернатив. Для цього з векторів локальних пріоритетів альтернатив за кожним критерієм складемо матрицю:

$$P^A = \begin{pmatrix} 0,0520 & 0,4845 & 0,5505 & 0,4550 \\ 0,0931 & 0,0435 & 0,0494 & 0,0931 \\ 0,3845 & 0,1485 & 0,1150 & 0,3845 \\ 0,4704 & 0,2797 & 0,2797 & 0,0537 \end{pmatrix},$$

скористаємося формулою:

$$\vec{p} = P^A \vec{p}^K.$$

Отже, вектор глобальних пріоритетів дорівнює:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0,0520 & 0,4845 & 0,5505 & 0,4550 \\ 0,0931 & 0,0435 & 0,0494 & 0,0931 \\ 0,3845 & 0,1485 & 0,1150 & 0,3845 \\ 0,4704 & 0,2797 & 0,2797 & 0,0537 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,0504 \\ 0,2123 \\ 0,0992 \\ 0,6382 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4505 \\ 0,0782 \\ 0,3077 \\ 0,1451 \end{pmatrix}.$$

Розрахуємо індекс узгодженості і відношення узгодженості для всієї ієрархії:

$$CI = CI^K + \left(\vec{p}^K, \overrightarrow{CI^A} \right) = 0{,}113,$$

$$RI = RI^K + RI^A = 0{,}90 + 0{,}90 = 1{,}80,$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = 0{,}0628,$$

що є дуже гарною узгодженістю.

Максимальна компонента вектору пріоритетів відповідає першій альтернативі, тобто пропонується обрати «Mathematica 10».

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

Розглядається динаміка двох видів x, y, конкуруючих за їжу в одному ареалі з відстрілом (полюванням), який є керуванням $u(t) = \left(u_1(t), u_2(t)\right)$. Закон взаємодії враховуючи керування описується наступною системою:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy - u_1(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = \gamma y - \delta xy - u_2(t), \end{cases}$$

де α, β, γ, δ, x, $y > 0$, та $u(t) = \left(u_1(t), u_2(t)\right) \geq 0$.

Необхідно підібрати такі $u_1(t)$ та $u_2(t)$, так щоб $\left(x(t), y(t)\right) \in D, \forall t$. Нехай D – деяка прямокутна область:

$$D = \left\{ x, y \middle| \frac{\gamma}{\delta} - \varepsilon_1 \le x \le \frac{\gamma}{\delta} + \varepsilon_1, \frac{\alpha}{\beta} - \varepsilon_2 \le y \le \frac{\alpha}{\beta} + \varepsilon_2 \right\}.$$

1.4 Постановка задач дослідження

Ціль створення системи: створення математичної моделі оптимізації використання мисливських ресурсів, аналіз її поведінки, в умовах конкуреції двох популяцій.

Необхідні кроки до цілі:

а) обрати початкові математичну модель та її параметри;

б) побудувати комп’ютерну реалізацію моделі, використовуючи математичний пакет;

в) проаналізувати модель по відношенню до функції вартості;

г) отримати результат оптимізації мисливського процесу.

Очікуваний результат: графіки поведінки системи при заданих параметрах у вигляді фазових просторів, максимальне та мінімальне значення функції вартості.

2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1 Зв'язок фазових та інтегральних кривих

Візьмемо автономне диференціальне рівняння [6, 16, 17, 20, 40] на площині:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x, y), \end{cases} \tag{2.1}$$

тут $x, y \in R$. Нехай функції F та G неперервні в $\Omega \in R^2$ та не перетворюються на нуль одночасно. Тепер «поділимо друге рівняння на перше», після цього розглянемо нове диференціальне рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}. \tag{2.2}$$

Рівняння (2.2) будемо розглядати разом з його зворотним.

Теорема 2.1. Фазові криві системи (2.1) (поза точками (x, y), для яких $F(x, y) = G(x, y) = 0$) є інтегральними кривими рівняння (2.2), та навпаки.

2.2 Моделі взаємодії двох видів

Засновником сучасної математичної теорії популяцій справедливо вважається італійський математик Віто Вольтерра, який розробив математичну теорію біологічних співтовариств, апаратом якої служать диференціальні і інтегро-диференціальні рівняння. У наступні десятиліття популяційна динаміка розви-

валася, в основному, в руслі висловлених в цій книзі ідей. Російський переклад книги Вольтерра вийшов в 1976 р під назвою: «Математична теорія боротьби за існування» з післямовою Ю. М. Свірежева, в якому розглядається історія розвитку математичної екології в період 1931-1976 рр. [21, 25, 33].

Книга Вольтерра написана так, як пишуть книги з математики. У ній спочатку сформульовані деякі припущення про математичні об'єкти, які передбачається вивчати, а потім проводиться математичне дослідження властивостей цих об’єктів.

Системи, вивчені Вольтерра, складаються з двох або декількох видів. В окремих випадках розглядається запас використовуваної їжі. В основу рівнянь, що описують взаємодію цих видів, покладені наступні уявлення.

Гіпотези Вольтерри [1, 2, 8, 11, 13, 24]:

а) їжа або є в необмеженій кількості, або її надходження з плином часу жорстко регламентовано;

б) особи кожного виду відмирають так, що в одиницю часу гине постійна частка існуючих особин;

в) хижі види поїдають жертв, причому в одиницю часу кількість з'їдених жертв завжди пропорційно ймовірності зустрічі особин цих двох видів, тобто добутку кількості хижаків на кількість жертв;

г) якщо є їжа в обмеженій кількості і кілька видів, які здатні її споживати, то частка їжі, споживаної видом в одиницю часу, пропорційна кількості особин цього виду, взятому з деяким коефіцієнтом, що залежать від виду (моделі міжвидової конкуренції);

д) якщо вид харчується їжею, наявної в необмеженій кількості, приріст чисельності виду в одиницю часу пропорційний чисельності виду;

ж) якщо вид харчується їжею, наявної в обмеженій кількості, то його розмноження регулюється швидкістю споживання їжі, тобто за одиницю часу приріст пропорційний кількості з’їденої їжі.

Відповідно до гіпотез Вольтерра взаємодія двох видів, чисельності яких x_1 і x_2, можуть бути описані рівняннями:

$$\frac{dN_1}{dt} = a_1 N_1 + b_{12} N_1 N_2 - c_1 N_1^2,$$

$$\frac{dN_2}{dt} = a_2 N_2 + b_{21} N_1 N_2 - c_2 N_2^2.$$

Тут параметри a_i – константи власної швидкості росту видів, c_i – константи самообмеження чисельності (внутрішньовидової конкуренції), b_{ij} – константи взаємодії видів, $(i, j = 1,2)$. Знаки цих коефіцієнтів визначають тип взаємодії.

Ю. Одум, враховуючи запропоновані В. Вольтеррою моделі, запропонував класифікацію не по механізмам, а за результатами. Відповідно до цієї класифікації, оцінювати взаємини слід як позитивні, негативні або нейтральні в залежності від того, зростає, зменшується або залишається незмінною чисельність одного виду в присутності іншого виду. Тоді основні типи взаємодій можуть бути представлені у вигляді таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Типи взаємодії видів

симбіоз	+	+	$b_{12}, b_{21} > 0$
комменсализмом	+	0	$b_{12} > 0, b_{21} = 0$
хижак-жертва	+	–	$b_{12} > 0, b_{21} < 0$
аменсалізм	0	–	$b_{12} = 0, b_{21} < 0$
конкуренція	–	–	$b_{12}, b_{21} < 0$
нейтралізм	0	0	$b_{12} < 0, b_{21} = 0$

2.2.1 Модель Лотки-Вольтерри

Модель, що описує динаміку чисельності (щільності) двох популяцій, що взаємодіють за принципом хижак-жертва [24], відноситься до автономних диференціальних рівнянь та має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy, \end{cases} \tag{2.3}$$

де x і y – щільності популяції жертви і хижака відповідно;

α – швидкість розмноження популяції жертви під час відсутності хижака;

β – питома швидкість споживання популяцією хижака популяції жертви при одиничній щільності обох популяцій;

γ – природна смертність хижака;

$\dfrac{\delta}{\beta}$ – коефіцієнт переробки спожитої хижаком біомаси жертви у власну біомасу [7, 8, 11].

В основу моделі покладено такі ідеалізовані представлення про характер внутрішньовидових і міжвидових відносин в системі хижак-жертва:

а) під час відсутності хижака популяція жертви розмножується в відповідно до принципу Мальтуса – експоненціально;

б) популяція хижака під час відсутності жертви експоненціально вимирає;

в) сумарна кількість жертви, яка споживається населенням хижака в одиницю часу, лінійно залежить і від щільності популяції жертви, і від щільності популяції хижака;

г) спожита хижаком біомаса жертви з постійним коефіцієнт переробляється в біомасу хижака;

д) які б то не було додаткові фактори, що вплив на динаміку популяцій, відсутні.

Знайдемо стаціонарні, тобто не залежні від часу, стани системи. Якщо чисельність популяцій постійна, похідні від часу будуть дорівнювати 0:

$$\begin{cases} \alpha x - \beta xy = 0, \\ -\gamma y + \delta xy = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

звідки отримаємо:

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ x_2 = \frac{\gamma}{\delta},\ y_2 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Звідси очевидно, що початок координат є особливою точкою типу сідло. Фазові траєкторії поблизу цієї особливої точки поводяться як гіперболи і мають напрям проти годинникової стрілки [19, 20, 36].

Тепер визначимо тип точки (x_2, y_2).

Проведемо лінеаризацію системи (2.2) в околі точки (x_2, y_2). Для цього функції в лівих частинах розкладемо в ряд Тейлора по x і y та залишимо тільки лінійні складові:

$$\begin{cases} F(x_2, y_2) + \dfrac{\partial F(x_2, y_2)}{\partial x} x + \dfrac{\partial F(x_2, y_2)}{\partial y} y = 0, \\ G(x_2, y_2) + \dfrac{\partial G(x_2, y_2)}{\partial x} x + \dfrac{\partial G(x_2, y_2)}{\partial y} y = 0, \end{cases}$$

підставивши функції та зробивши обчислення отримуємо:

$$\begin{cases} -\dfrac{\gamma\beta}{\delta} y = 0, \\ \dfrac{\alpha\delta}{\beta} x = 0. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння системи поблизу неї:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\dfrac{\gamma\beta}{\delta} \\ \dfrac{\alpha\delta}{\beta} & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

що має корені $\lambda = \pm\sqrt{a\gamma}i$.

Корені характеристичного рівняння чисто уявні, отже, особлива точка – центр. Поблизу особливої точки фазові траєкторії являють собою еліпси [2, 4, 16, 17]. Чисельності популяцій отримують не схожі по фазі коливання.

Знайдемо фазові криві цієї системи в першому квадранті $x > 0$, $y > 0$ (зрозуміло, що кількість хижаків та жертв завжди невід'ємна). Для цього скористаємося теоремою 2.1: розділимо друге рівняння системи (2.3) на перше. Отримаємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\gamma y + \delta xy}{\alpha x - \beta xy} = \frac{xy\left(-\frac{\gamma}{x} + \delta\right)}{xy\left(\frac{\alpha}{y} - \beta\right)} = \frac{-\frac{\gamma}{x} + \delta}{\frac{\alpha}{y} - \beta},$$

$$\left(\frac{\alpha}{y} - \beta\right)dy = \left(-\frac{\gamma}{x} + \delta\right)dx,$$

$$\alpha\ln(y) - \beta y + \gamma\ln(x) - \delta x = C, \qquad (2.5)$$

або

$$y^{\alpha}e^{-\beta y}x^{\gamma}e^{-\delta x} = C.$$

2.2.1 Рівняння конкуренції

Модель, що описує динаміку чисельності (щільності) двох популяцій, що взаємодіють в умовах конкуренції [5, 6, 17, 22, 24], відноситься до автономних диференціальних рівнянь та має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = \gamma y - \delta xy, \end{cases} \tag{2.6}$$

де x і y – щільності популяції жертви і хижака відповідно;

α – швидкість розмноження першої популяції;

β – швидкість вимирання першої популяції в умовах конкуренції;

γ – швидкість розмноження другої популяції;

δ – швидкість вимирання другої популяції в умовах конкуренції [7, 8, 11].

Знайдемо стаціонарні, тобто не залежні від часу, стани системи. Якщо чисельність популяцій постійна, похідні від часу будуть дорівнювати 0:

$$\begin{cases} \alpha x - \beta xy = 0, \\ \gamma y - \delta xy = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

звідки отримаємо:

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ x_2 = \frac{\gamma}{\delta},\ y_2 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Звідси очевидно, що початок координат є особливою точкою типу сідло. Фазові траєкторії поблизу цієї особливої точки поводяться як гіперболи і мають напрям проти годинникової стрілки [20].

Тепер визначимо тип точки (x_2, y_2).

Проведемо лінеаризацію системи (2.4) в околі точки (x_2, y_2). Для цього функції в лівих частинах розкладемо в ряд Тейлора по x і y та залишимо тільки лінійні складові:

$$\begin{cases} F(x_2, y_2) + \dfrac{\partial F(x_2, y_2)}{\partial x} x + \dfrac{\partial F(x_2, y_2)}{\partial y} y = 0, \\ G(x_2, y_2) + \dfrac{\partial G(x_2, y_2)}{\partial x} x + \dfrac{\partial G(x_2, y_2)}{\partial y} y = 0, \end{cases}$$

підставивши функції та зробивши обчислення отримуємо:

$$\begin{cases} -\dfrac{\gamma\beta}{\delta} y = 0, \\ -\dfrac{\alpha\delta}{\beta} x = 0. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння системи поблизу неї:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\dfrac{\gamma\beta}{\delta} \\ -\dfrac{\alpha\delta}{\beta} & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

що має корені $\lambda = \pm\sqrt{a\gamma}$.

Корені характеристичного рівняння дійсні з різними знаками, отже, особлива точка – сідло. Поблизу особливої точки фазові траєкторії являють собою гіперболи [23, 29, 30, 34]. Чисельності популяцій отримують не схожі по фазі коливання.

Знайдемо фазові криві цієї системи в першому квадранті $x > 0$, $y > 0$ (зрозуміло, що кількість хижаків та жертв завжди невід'ємна). Для цього скористаємося теоремою 2.1: розділимо друге рівняння системи (2.3) на перше. Отримаємо:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\gamma y-\delta xy}{\alpha x-\beta xy}=\frac{xy\left(\frac{\gamma}{x}-\delta\right)}{xy\left(\frac{\alpha}{y}-\beta\right)}=\frac{\frac{\gamma}{x}-\delta}{\frac{\alpha}{y}-\beta},$$

$$\left(\frac{\alpha}{y}-\beta\right)dy=\left(\frac{\gamma}{x}-\delta\right)dx,$$

$$\alpha\ln(y)-\beta y-\gamma\ln(x)+\delta x=C, \qquad (2.5)$$

або

$$y^{\alpha}e^{-\beta y}x^{-\gamma}e^{\delta x}=C.$$

2.3 Метод множників Лагранжа

2.3.1 Постановка завдання

Дані двічі неперервно диференційовані цільова функція $f(x)=f(x_1,...,x_n)$ та функції обмежень $g_j(x)=0$, $j=1,...,m$; $g_j(x)\le 0$, $j=m+1,...,p$, множина допустимих рішень X.

Необхідно знайти локальний мінімум цільової функції на множині X, т. е. таку точку $x^*\in X$, що:

$$f(x^*)=\min_{x\in X} f(x),$$

де

$$X = \left\{ x \middle| \begin{matrix} g_j(x) = 0,\ j = 1,...,m; m < n \\ g_j(x) \le 0,\ j = m+1,..,p \end{matrix} \right\}.$$

2.3.2 Стратегія пошуку

Завдання на умовний мінімум зводиться до розв'язання послідовності задач пошуку безумовного мінімум модифікованої функції Лагранжа [19, 22, 40]:

$$L\left(x, \lambda^k, \mu^k, r^k\right) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k g_j(x) + \frac{r^k}{2} \sum_{j=1}^{m} \left[g_j(x) \right]^2 +$$

$$+ \frac{1}{2r^k} \sum_{j=m+1}^{p} \left\{ \left[\max\left\{0, \mu_j^k + r^k g_j(x)\right\} \right]^2 - \left(\mu_j^k\right)^2 \right\},$$

де $\lambda^k = \left(\lambda_1^k, ..., \lambda_m^k\right)^T$, $\mu^k = \left(\mu_{m+1}^k, ..., \mu_p^k\right)^T$ – вектор множників;

r^k – параметр штрафу;

k – номер ітерації.

Задається початкова точка пошуку x_0. На кожній ітерації шукається точка мінімуму модифікованої функції Лагранжа при заданих λ^k, μ^k, r^k за допомогою одного з методів безумовної оптимізації. Отримана точка $x^*\left(\lambda^k, \mu^k, r^k\right)$ використовується в якості початкової точки на наступній ітерації, виконуваної при зростаючому значенні параметра штрафу r^k та перерахованих визначеним чином векторах множників λ^k, μ^k. Ітераційний процес завершується при умові

$$\left\| x^{k+1} - x^k \right\| \le \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ – задана точність.

2.4 Градієнтний метод з дробленням кроку

2.4.1 Постановка завдання

Нехай дана функція $f(x)$, обмежена знизу на множині R^n та має неперервні частині похідні у всіх її точках.

Необхідно знайти локальний мінімум функції $f(x)$ на множині допустимих рішень $X = R^n$, тобто найти таку точку $x^* \in R^n$, що:

$$f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x).$$

2.4.2 Стратегія пошуку

Стратегія розв'язання задачі полягає у побудові послідовності точок $\{x^k\}$, $k = 0,1,...,$ таких, що $f(x^{k+1}) < f(x^k)$, $k = 0,1...$. Точки послідовності $\{x^k\}$ розраховуються по правилу:

$$x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k),\ k = 0,1...,$$

де точка x^0 задається користувачем; $\nabla f(x^k)$ – градієнт функції $f(x)$, знайдений в точці x^k; величина кроку на нульовій ітерації t_0 задається користувачем, а далі наступним чином: якщо умова $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ виконується, то збільшуємо крок вдвічі, доки умова не перестане виконуватись, якщо $f(x^{k+1}) \geq f(x^k)$, то зменшуємо крок у два рази, якщо при цьому не відбулося зменшення зна-

чення функції, то процес дроблення продовжуємо до тих пір, доки значення функції не почне зменшуватись. Ітераційний процес завершується при умові:

$$\left\| \nabla f\left(x^{k+1}\right) \right\| \le \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ – задана точність.

2.5 Загальні відомості про керовані системи

Найважливішими в теорії оптимального керування є поняття системи та керування.

Етимологічно «система» представляє собою грецький еквівалент слова «композиція». Тобто поняття системи передбачає одночасну наявність декількох компонентів (елементів або частей). В цьому сенсі система схожа на звичайну множину, тобто сукупність елементів. Однак на відміну від множини термін «система» передбачає певну взаємодію, взаємозв’язок складових її елементів. Цей взаємозв’язок надає системі в цілому такі властивості, яких немає в кожному з елементів цієї системи [20, 21, 27, 32].

Не вдаючись в деталізацію поняття системи (об’єкта), відзначимо, що найбільш загальновживаним є уявлення про систему, як про сукупності взаємопов’язаних елементів (частин, підсистем). Взаємозв’язок елементів системи (тобто внутрішню будову даної системи) описується її структурою. Як простий наочний приклад системи можна згадати, наприклад, нашу сонячну систему. елементами сонячної системи є планети, що входять до неї. Планети за допомогою своїх гравітаційних полів певним чином взаємопов’язані між собою.

Цей взаємозв’язок підпорядковується фізичним законам і може бути описаний математичною мовою.

Ще одним фундаментальним терміном, що безпосередньо стосуються

будь-якій системі, є стан системи. Передбачається, що всяка система (точніше кажучи, динамічна система, тобто система, яка певним чином розвивається, еволюціонує в часі) в кожен момент часу може перебувати в одному з деякого (кінцевого або нескінченного) числа можливих станів. Саме зміна станів системи з плином часу дає можливість говорити про розвиток або функціонуванні даної системи. Наприклад, положення ракети в просторі (якщо її ототожнити з матеріальною точкою) може бути описано трьома просторовими координатами – трійкою чисел. Ця трійка чисел (що залежить від часу) і визначає поточний просторове положення (стан) ракети [3, 7].

Далі будуть розглядатися тільки такі об'єкти, стан яких в кожен момент часу може бути однозначно охарактеризовано певним кінцевим набором n числових параметрів (тобто n-мірним вектором) $y=(y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$. Такого роду системи широко поширені в техніці і економіці.

Векторний простір R^n, якому належать можливі стану системи, називають простором станів або фазовим простором. Оскільки система розвивається (еволюціонує) в часі, то зазначені числові параметри є функціями часу, тобто $y(t)=(y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t))$. При зміні часу від якогось початкового значення $t=t_0$ до деякого кінцевого $t=T$ точка $y(t)$ в фазовому просторі описує певну криву, яку називають траєкторією системи. У разі $n=3$ траєкторія може бути зображена в фазовому просторі відповідної розмірності, і з її допомогою можна отримати візульне представлення про функціонування даної системи [32].

Існують два типи (два класи) систем. Один з них складають ті об'єкти, на розвиток яких людина не може надати жодного впливу. Приклад такого роду дає Сонячна система. Інший клас систем складають ті, стан яких може змінюватися з волі окремої людини або ж цілої групи людей в залежності від переслідуваних ними цілей (наприклад, фінансово-кредитна система, космічний корабель і т.п.).

Управління – це і є вплив, здатний змінити поточний стан, а значить і весь наступний розвиток системи. У технічних системах механізм управління

реалізується за допомогою певних технічних пристроїв. В економічних системах управління відбувається в основному завдяки зміні встановлених раніше правил економічної поведінки (наприклад, шляхом зміни процентних ставок, введення обмежень на зростання цін на природні ресурси і т. п.). Тут слід зазначити, що на функціонування складних систем, як правило, надають впливу дуже багато факторів. І управління є лише одним з чималої кількості наявних впливів. Тому на практиці через сильні «зовнішніх перешкод» людині в результаті управління часто не вдається повною мірою досягти бажаного ефекту.

Подальший розгляд буде обмежено класом керованих систем, поведінка (розвиток) яких вдається міняти, надаючи той чи інший вплив, причому таким чином, що в результаті зміни досягаються певні, заздалегідь поставлені цілі.

Керуючий вплив можна описати деяким кінцевим набором числових параметрів (управлінь) $u=(u_1,u_2,...,u_r)$, які керуючий об'єкт здатний вибирати в межах певної області управління (множини) U, $U\in R^r$ зрозуміло, що вибір того чи іншого управління залежить від поточного моменту часу, а значить, управління u представляє собою певний набір функцій (вектор-функцію) часу: $u(t)=(u_1(t),u_2(t),...,u_r(t))$, де $t\in[t_0,T]$.

2.6 Математична інтерпретація динамічної системи

Пара векторних функцій $y(t)$, $u(t)$ утворює процес. Між векторними функціями $y(t)$ і $u(t)$ є певний зв'язок: як тільки обраний якийсь конкретний закон управління в формі вектор-функції $u(t)$, послідовність її станів (тобто траєкторія) $y(t)$ визначається однозначно.

Будемо вважати, що компоненти векторної функції $u(t)$ є кусочно-неперервними на проміжку $[t_0,T]$. Будь-яке управління $u(t)$ з кусочно- неперервними компонентами, що задовольняє умові $u(t)\in U$ при всіх $t\in[t_0,T]$, нази-

вають допустимим керуванням.

Подальший розгляд присвячено таким динамічним системам, в яких зв'язок між змінними управління і фазовими змінними математично може бути виражена за допомогою наступної системи диференціальних рівнянь [7, 8, 32]:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1\left(t, y_1,..., y_n, u_1,..., u_r\right), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2\left(t, y_1,..., y_n, u_1,..., u_r\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n\left(t, y_1,..., y_n, u_1,..., u_r\right), \end{cases} \quad t_0 \le t \le T. \tag{2.6}$$

Тут в правих частинах рівнянь записані функції $f_1, f_2,..., f_n$ від $n+r+1$ змінних, які визначають закон зміни похідних (тобто швидкостей зміни) фазових змінних $y_1, y_2,..., y_n$. Якщо в (2.6) функції f_i, явно не залежать від часу, тобто $f_i = f_i\left(y_1, y_2,..., y_n, u_1, u_2,..., u_r\right)$, $i = 1,2,...,n$, то отримуємо автономну систему.

2.7 Задача оптимального керування

Для переважної більшості прикладних задач управління, пов'язаних з реальними об'єктами, існує і, як правило, не один набір керуючих функцій $u = u(t) = \left(u_1(t), u_2(t),..., u_r(t)\right)$, який вирішує задачу управління (з фіксованим або нефіксованим часом управління). З цієї причини виникає можливість вибору з усіх рішень задачі управління такого рішення (тобто такого набору керуючих функцій), яке було б в якомусь сенсі найбільш вигідним. В цьому випадку приходимо до задачі оптимального управління [32].

Для того, що сформулювати завдання оптимального управління, необхід-

но задати умову, яке дозволяє відрізняти один від одного більш і менш вигідні рішення даної задачі. Цій меті служить критерій оптимальності (критерій якості управління або цільової функціонал)

$$I(u)=\int_{t_0}^{T} f_0\left(t,y_1(t),...,y_n(t),u_1(t),...,u_r(t)\right)dt, \qquad (2.7)$$

в якому $f_0\left(t,y_1(t),...,y_n(t),u_1(t),...,u_r(t)\right)$ – фіксована функція $n+r+1$ змінних, що володіє такими властивостями, щоб забезпечити існування інтеграла. Ознакою більшою або меншою вигоди вибору управління u вважається значення інтегрального функціоналу (2.7), обчисленого на данній функції керування, тобто число $I(u)$.

Отже, завдання оптимального управління для системи диференціальних рівнянь (2.6) полягає в максимізації інтегрального функціоналу (2.7) на множині всіх допустимих управлінь, переводять систему (2.6) із заданого початкового стану в заданий кінцевий [20, 32, 38]. З математичної точки зору ця задача є спеціального виду задача оптимізації інтегрального функціоналу на певній множині функціонального простору кусково-неперервних функцій керування. Рішенням цієї задачі є вектор-функція керування

$$u^*(t)=\left(u_1^*(t),u_2^*(t),...,u_r^*(t)\right),$$

яке називають оптимальним керуванням. Цьому управлінню однозначно відповідає певна траєкторія $y^*(t)=\left(y_1^*(t),y_2^*(t),...,y_r^*(t)\right)$ – оптимальна траєкторія. При цьому пару векторних функцій $y^*(t)$, $u^*(t)$ називають оптимальним процесом. Нерідко завдання оптимального управління формулюють як задачу відшукання не тільки оптимального управління, але і всього оптимального процесу (тобто оптимального управління і відповідної оптимальної траєкторії).

2.9 Методи Рунге-Кутти

Існує багато варіантів методу Рунге-Кутти [19, 40]; найбільш широко використовується наступний: дано

$$y' = f(x, y),\ y(x_n) = y_n,$$

обчислюється послідовно

$$k_1 = hf(x_n, y_n), \quad k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Цей процес можна представити геометрично. У точці (x_n, y_n) обчислюється тангенс кута нахилу (k_1 / h); використовуючи його, ми йдемо на половину кроку вперед і дивимося тангенс кута нахилу тут. Використовуючи новий тангенс кута нахилу (k_2 / h), ми знову починаємо з (x_n, y_n), йдемо вперед на половину кроку і знову беремо пробу тангенса кута нахилу. Взявши цей останній тангенс кута нахилу (k_3 / h), ми знову починаємо з (x_n, y_n), але робимо тепер повний крок вперед, де дивимося тангенс кута нахилу (k_4 / h). Чотири тангенса кутів нахилу усереднюються з вагами $1/6,\ 2/6,\ 2/6,\ 1/6$ та беручи цей середній тангенс кута нахилу, робимо остаточний крок від (x_n, y_n) до (x_{n+1}, y_{n+1}).

Метод має четвертий порядок точності. Локальна похибка представляється формулою $\varepsilon_{k+1}(h) = \frac{h^5}{120}\varphi_4^{(5)}(0)\Big|_{(x_k, y_k)} + o(h^5)$.

3 ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

3.1 Зменшення кількості параметрів в моделі Лотки-Вольтерри

У початковій формі (2.1) система залежить від чотирьох дійсних параметрів [1, 2, 5]. Заміною змінних:

$$x = \frac{a}{d}u,\ y = \frac{a}{b}v,\ t = \frac{\tau}{a},$$

тепер переходимо до системи рівнянь [23]:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = u - uv, \\ \dfrac{dv}{d\tau} = -\gamma v + uv, \end{cases}$$

яка включає лише один параметр $\gamma = \frac{c}{a}$.

Результат дослідження системи в першому квадранті координатної площини загальновідомий. Рівновагами системи є початок координат – сідло – та точка ($u = \gamma,\ v = 1$) – центр. Система консервативна, усі її траєкторії утворюють замкнуті цикли при будь-яких $\gamma > 0$.

3.2 Оптимізація мисливських ресурсів

Нехай тушка одного хижака коштує 2 умовних грошових одиниці, а однієї жертви 3 умовних грошових одиниці. Необхідно максимізувати функцію:

$$F(\Delta x, \Delta y, t) = 3\Delta x + 2\Delta y,$$

де $\Delta x = (x^* - x)$, $\Delta y = (y^* - y)$ – кількість тушок;

t – час відстрілу;

x^* – кількість тушок жертв перед відстрілом;

y^* – кількість тушок хижаків перед відстрілом.

Полювання відбувається на фазовій траєкторії моделі Лотки-Вольтерри. Візьмемо наступні параметри:

$$\alpha = 60,\ \beta = 3,\ \gamma = 50,\ \delta = 2,\ C = 219.$$

Тоді підставивши ці значення у рівняння (2.5) отримаємо:

$$60\ln(y) - 3y + 50\ln(x) - 2x = 219, \tag{3.1}$$

постійна $C = 219$ – характеризує початкові умови. Точка $c(x_0, y_0)$ рівноваги буде мати наступні координати:

$$x_0 = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{50}{2} = 25,\ y_0 = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{60}{3} = 20.$$

Завдання полягає в тому, що необхідно відстрелити максимальну кількість хижаків та жертв, залишившись на тій самій фазовій траєкторії. Таким чином обравши будь-яку точку відстрілу $\left(x^*, y^*\right)$ на кривій (3.1) отримаємо наступну задачу оптимізації:

$$F(x,y) = 3\left(x^* - x\right) + 2\left(y^* - y\right) \to \max_{x,y \in \Omega}, \tag{3.2}$$

$$\Omega = \{x, y \mid 60\ln(y) - 3y + 50\ln(x) - 2x = 219\}.$$

Якщо розкрити дужки функції (3.2) отримаємо:

$$F(x,y)=\left(3x^{*}+2y^{*}\right)-\left(3x+2y\right)\rightarrow\max\limits_{x,y\in\Omega},\qquad(3.3)$$

$$\Omega=\{x,y\,|\,60\ln\left(y\right)-3y+50\ln\left(x\right)-2x=219\}.$$

Проаналізувавши формулу (3.3), бачимо, що вираз у перших дужках являє собою постійну величину. Це значить, що для максимізації функції (3.3) необхідно максимізувати вираз у других дужках:

$$G\left(x,y\right)=-(3x+2y)\rightarrow\max\limits_{x,y\in\Omega},\qquad(3.4)$$

$$\Omega=\{x,y\,|\,60\ln\left(y\right)-3y+50\ln\left(x\right)-2x=219\},$$

перейдемо до протилежної задачі оптимізації змінивши знак функції (3.4), отримуємо:

$$G\left(x,y\right)=3x+2y\rightarrow\min\limits_{x,y\in\Omega},$$

$$\Omega=\{x,y\,|\,60\ln\left(y\right)-3y+50\ln\left(x\right)-2x=219\}.$$

Якщо розглядати постійні x^{*} та y^{*}, як змінні у виразі (3.3), то отримаємо ще одну задачу оптимізації:

$$Z\left(x,y\right)=3x+2y\rightarrow\max\limits_{x,y\in\Omega},$$

$$\Omega=\{x,y\,|\,60\ln\left(y\right)-3y+50\ln\left(x\right)-2x=219\}.$$

Отже, задачу (3.2) можна розглядати як дві задачі оптимізації:

$$G(x,y)\to\min\limits_{x,y\in\Omega},\ Z(x,y)\to\max\limits_{x,y\in\Omega},$$

$$\Omega=\{x,y\,|\,60\ln(y)-3y+50\ln(x)-2x=219\}.$$

Використовуючи математичний пакет «Mathematica 10» отримуємо точний розв'язок за допомогою не задокументованого вбудованого метода «NonlinearInteriorPoint»:

а) точка мінімуму має координати – $x^{*}=15{,}174$, $y^{*}=12{,}139$, мінімальне значення функції – $F(x^{*},y^{*})=66{,}766$;

б) точка максимуму має координати – $x^{**}=38{,}359$, $y^{**}=30{,}687$, максимальне значення функції – $F(x^{**},y^{**})=168{,}781$.

Тоді максимальна кількість тушок хижаків та жертв, яку можна отримати на даній фазовій траєкторії: $x^{**}-x^{*}=38{,}359-15{,}174=23{,}185$ – тушок жертв, $y^{**}-y^{*}=30{,}687-12{,}139=18{,}548$ – тушок хижаків. Графік розв'язку задач оптимізації представлений на рисунку 3.1.

Також реалізувавши комбінацію метода Лагранжа та градієнтного метода з дробленням кроку, засобами математичного пакету «Mathematica 10», отримано наступне розв'язання:

а) точка мінімуму має координати – $x^{*}=15{,}1721$, $y^{*}=12{,}1405$, мінімальне значення функції – $F(x^{*},y^{*})=66{,}7657$;

б) точка максимуму має координати – $x^{**}=38{,}3661$, $y^{**}=30{,}683$, максимальне значення функції – $F(x^{**},y^{**})=168{,}781$.

Тоді максимальна кількість тушок хижаків та жертв, яку можна отримати на даній фазовій траєкторії: $x^{**}-x^{*}=38{,}3661-15{,}1721=23{,}194$ – тушок жертв, $y^{**}-y^{*}=30{,}683-12{,}1405=18{,}5425$ – тушок хижаків.

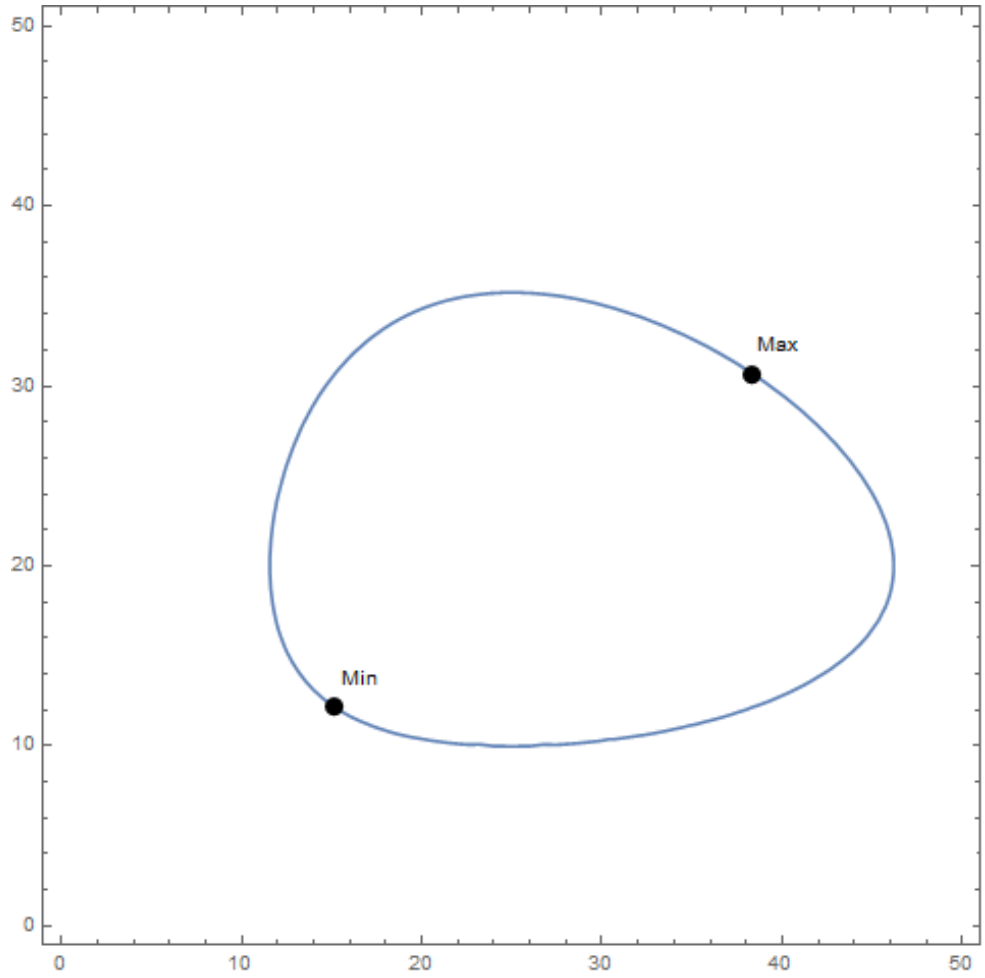

Рисунок 3.1 – Графік розв’язку задачі оптимізації

3.3 Стабілізація взаємодії двох популяцій за допомогою керування

Нехай $\alpha = 1, \beta = 0{,}05, \gamma = 2, \delta = 0{,}1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10$, закон взаємодії двох популяцій (2.6), на області D, з функцією керування $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, при заданих параметрах буде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 0{,}05xy - u_1(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - 0{,}1xy - u_2(t), \end{cases} \tag{3.5}$$

де $x, y \in D$, $D = \{x, y \mid 10 \le x \le 30, 10 \le y \le 30\}$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \ge 0$.

Якщо, обсяг популяції вийшов за верхню межу (тобто $x > 30$ чи $y > 30$) області D будемо включати відстріл $u_1(t) > 0$ чи $u_2(t) > 0$, залежно від популяції, доки обсяг популяції не стане нижче ніж нижня межа (тобто $x > 10$ чи $y > 10$), тоді відстріл відповідної популяції припиняється – $u_1(t) = 0$ чи $u_2(t) = 0$.

Для контролю системи (3.5) використаємо метод Рунге-Кутти, щоб отримувати інформацію про стан системи через заданий проміжок часу, та робити рішення про те, чи починати відстріл популяції, чи ні.

Візьмемо наступні параметри $h = 0{,}1$, $x_0 = 10$, $y_0 = 10$, тоді розрахункові формули приймуть наступний вигляд:

$$k_1 = f_y(x_n, y_n),\ g_1 = f_x(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f_y\left(x_n + \frac{h}{2} g_1, y_n + \frac{h}{2} k_1\right),\ g_2 = f_x\left(x_n + \frac{h}{2} g_1, y_n + \frac{h}{2} k_1\right),$$

$$k_3 = f_y\left(x_n + \frac{h}{2} g_2, y_n + \frac{h}{2} k_2\right),\ g_3 = f_x\left(x_n + \frac{h}{2} g_2, y_n + \frac{h}{2} k_2\right),$$

$$k_4 = f_y(x_n + h g_3, y_n + h k_3),\ g_4 = f_x(x_n + h g_3, y_n + h k_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4),$$

де $f_y(x, y) = 2y - 0{,}1xy - u_2(t)$, $f_x(x, y) = x - 0{,}05xy - u_1(t)$.

Шляхом підбору вдалося визначити, що функції керування для такої постановки задачі будуть мати наступний вигляд:

$$\begin{cases} u_1(t) = \alpha\left(\dfrac{\gamma}{\delta} + \varepsilon_2\right), x_{n+1} > \dfrac{\alpha}{\beta} + \varepsilon_1, \\ u_1(t) = 0, x_{n+1} < \dfrac{\alpha}{\beta} - \varepsilon_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2(t)=\gamma\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+\varepsilon_1\right), y_{n+1}>\dfrac{\gamma}{\delta}+\varepsilon_2, \\ u_2(t)=0, y_{n+1}<\dfrac{\gamma}{\delta}-\varepsilon_2. \end{cases}$$

Підставивши числові значення отримуємо:

$$\begin{cases} u_1(t)=30, x_{n+1}>30, \\ u_1(t)=0, x_{n+1}<10, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2(t)=60, y_{n+1}>30, \\ u_2(t)=0, y_{n+1}<10. \end{cases}$$

Таким чином на проміжку $t\in[0,100]$, поведінка системи (3.5), графічно представлена на рисунках (3.2)–(3.4).

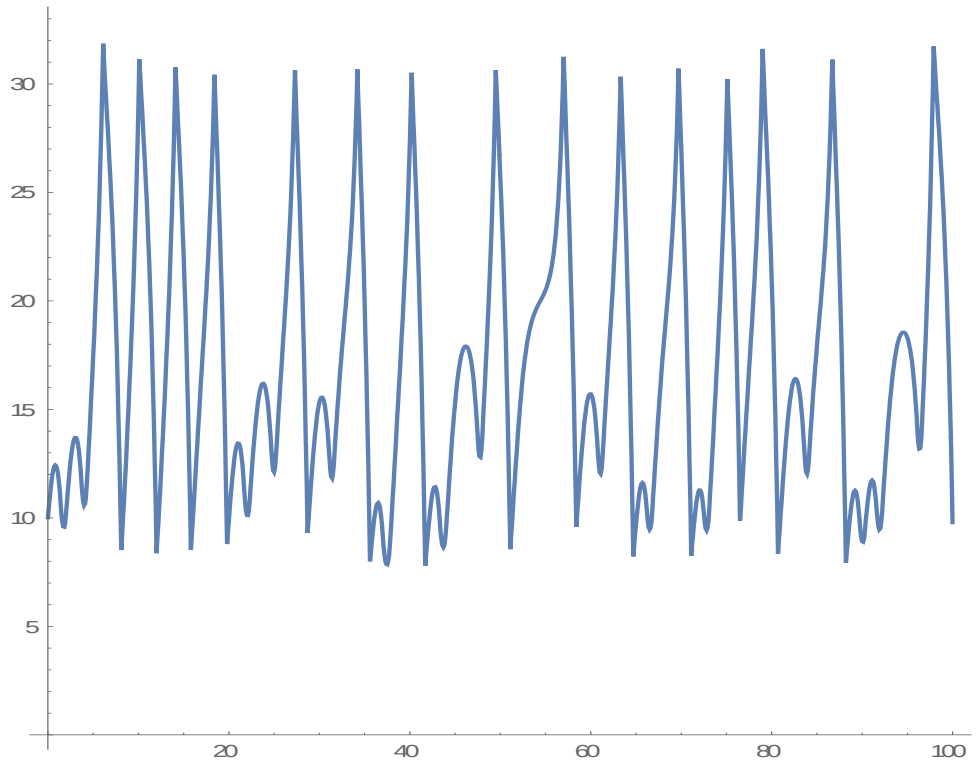

Рисунок 3.2 – Графік еволюції популяції змінної x

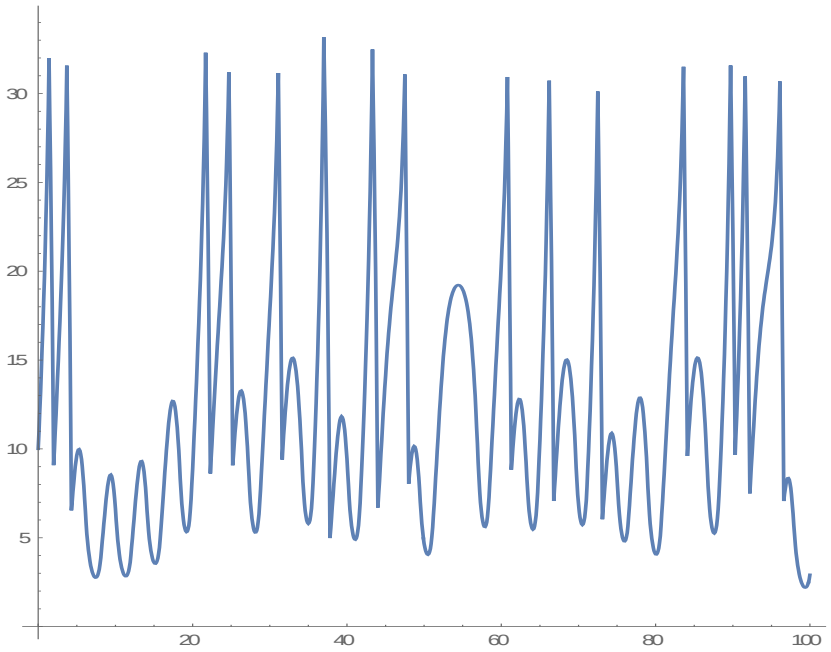

Рисунок 3.3 – Графік еволюції популяції змінної y

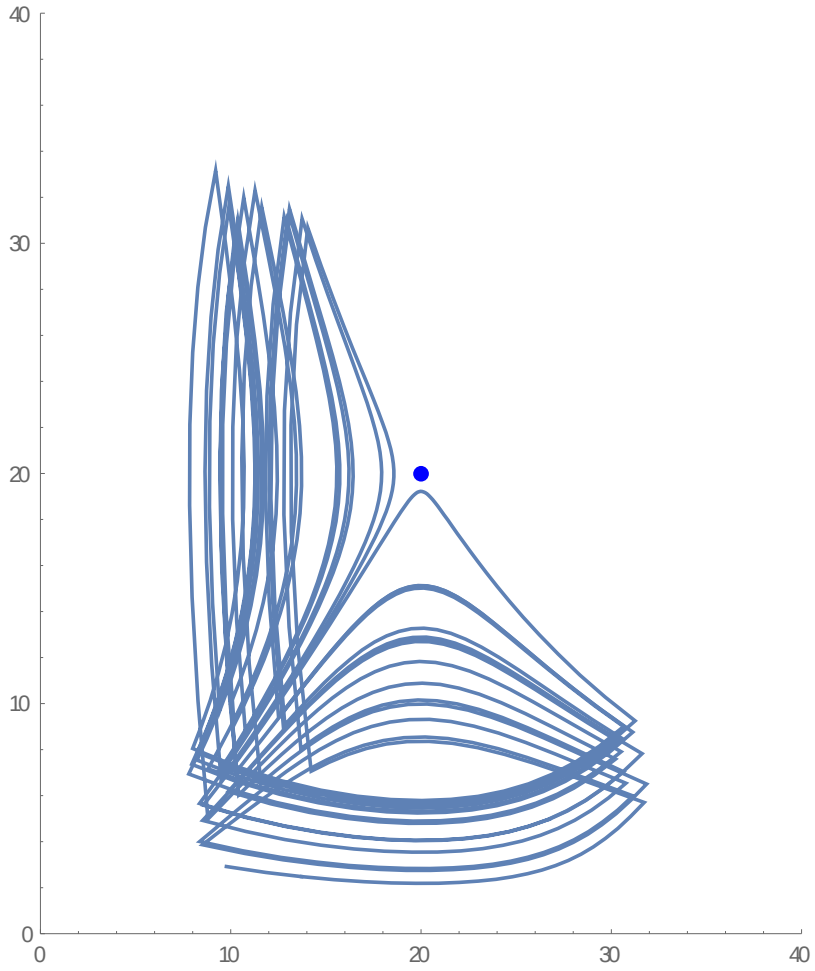

Рисунок 3.4 – Графік еволюції системи (3.5)

ВИСНОВКИ

Світу відомо багато випадків, коли зникнення одного виду тварин призводить до різного роду катаклізмів. Тому питання збереження тварин є актуальною проблемою навіть в справжній час.

Модель конкуренції двох популяцій Вольтерра передбачує, що незалежно від початкових даних с плином часу залишиться лише одна популяція. Але, в даній роботі показано, що за допомогою полювання можна запобігти вимирання одного із видів тварин, тобто утворити умови взаємного існування обох видів, та тримати їх популяції у потрібних рамках. Полювання в рамках роботи вводиться функцією керування, яка залежить від часу.

Незважаючи на явну спрощеність моделі показано, що відповідне їй завдання контролю чисельності популяцій не тривіальне і вимагає застосування сучасних чисельних методів розв'язання диференційних рівнянь, наприклад, в роботі пропонується використання адаптованого до задачі методу Рунге-Кутти. Найбільш жорстким з точки зору практики допущенням є передбачувана автономність системи. Однак і для більш складних моделей така постановка і етапи розв'язання задач є цілком характерними. Їх реалізація набуває практичну цінність.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Al-Omari J. F. M. Stability and Traveling Fronts in Lotka-Volterra Competition Models with Stage Structure / SIAM J. Appl. Math. 2003. № 63(6). P. 2063–2086.

2. Al-Omari J. F. M. Modeling and analysis of Stage – Structured Population Model with State – Dependent Maturation Delay and Harvesting / Int. Journal of Math. Analysis. 2007. № 1(8). P. 391–407.

3. Arditi R. How Species Interact: Altering the Standard View on Trophic Ecology / Oxford University Press. 2012. 112 p.

4. Brauer F. Stability regions and transition Phenomena for Harvesting Predator-Prey Systems / J. Math. Biol. 1979. № 7(1979a). P. 319–337.

5. Brauer F. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology / Heidelberg: Springer Verlag, 2000. 201 p.

6. Dai G. Coexistence Region and Global Dynamics of a Harvesting Predator-Prey Systems / Appl. Math. 1998. № 58. P. 193–210.

7. Gause G.F. The struggle for existence. Baltimore, 1934. 229 p.

8. Goel N. S. On the Volterra and other nonlinear models of interacting population / Rev. Modern Phys. 1971. V. 43. P. 231–276.

9. Haken H. Synergetics: introduction and advanced topics / H. Haken. Springer-Verlag, 2004. 250 p.

10. Hoppensteadt F. Predator-prey model / Scholarpedia. 2006. № 1(10). 1563 p.

11. The wolves of Isle Royale display scale-invariant satiation and density dependent predation on moose / C. Jost, G. Devulder, J. A. Vucetich, R. Peterson [etc.]. Ecol. 2005. № 74(5). P. 809–816.

12. Martin A. Predator-Prey models with Delay and Prey Harvesting. Biol. 2001. № 43. P. 247–267.

13. An analysis of an ordinary differential equation model for a two – species predator-prey system with harvesting and stocking / M. R. Myerscough, B. F. Gray, W. L. Hogarth, J. Norbury // J. Math. Biol. 1992. V. 30. P. 389–411.

14. Nasritdinov G. Limit cycle, trophic function and the dynamics of intersectoral interaction / Current Research J. of Economic Theory. 2010. № 2(2). P. 32–40.

15. Nunney L. Absolute stability in predator-prey models / Theoret. Pop. Biol. 1985. № 28. P. 109–132.

16. Ruan S. Absolute stability, conditional stability and bifurcation in Kolmogorov-type predator-prey systems with discrete delays / Quart. Appl. Math. 2001. № 59. P. 159–173.

17. Stolen R. H. Nonlinearity in fiber transmission / Proceedings of IEEE. 1986. V. 68, № 10. P. 1232–1236.

18. Verhulst P. J. Notice Sur la lois Que la Population Suit Dans Sons Acroissement // Correspondence Mathematique et Physique. 1838. № 10. P. 113–121.

19. Амироков С. Р. Численные методы и вычислительный эксперимент в исследовании динамики и структуры взаимодействующих сообществ : диссертация кандидата физико-математических наук : 05.13.18. Ставрополь, 2006. 187 с.

20. Анищенко В. С. Устойчивость, бифуркации, катастрофы // Соросовский образовательный журнал. Т. 6, №6, 2000. 109 с.

21. Арнольд В. И. Теория катастроф. Москва : Знание, 1983. 128 с.

22. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва : Наука, 1987. 304 с.

23. Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва-Ижевск : ИКИ, 2003. 368 с.

24. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. 288 с.

25. Гусятников П. П. Качественные и численные методы в задачах оптимального управления в моделях «хищник – жертва» и популяции леммингов. Москва, 2006. 101 с. РГБ ОД, 61 : 06-1/528

26. Динамическая теория биологических популяций / под ред. Р. А. Полуэктова. Москва : Наука, 1974. 380 с.

27. Ильичев В. Г. Механизмы стабилизации и адаптации в моделях эколо-

гии : дис. д-ра техн. наук : 05.13.01, 05.13.18 : Ростов н/Д, 2003. 279 с.

28. Краснощеков П. С., Петров. А. А. Принципы построения моделей. Москва : Изд-во Фазис, 2000. 411 с.

29. Малинецкий Г. Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: введение в нелинейную динамику. Москва. : Эдиториал УРСС, 2002. 256 с.

30. Мартынюк А. А., Никитина Н. В. Хаотическая потеря предельного цикла в задаче Вольтерра // Докл. НАН Украины, 1996. № 4. С. 1–7.

31. Никитина Н. В. О хаотической потере устойчивости // Докл. НАН Украины, 1997. № 11. С. 61–65.

32. Ногин В. Д. Введение в оптимальное управление: Учебно-методическое пособие. Санкт-Петербург : Изд-во "ЮТАС", 2008. 92 с.

33. Петров А. А. Математическое моделирование: процессы в сложных экономических и экологических системах / под. ред. А. А. Самарского, Н. Н. Моисеева. Москва : Наука, 1986. 208 с.

34. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. Москва : Радио и связь, 1993. 282 с.

35. Свирежев Ю. М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. Москва : Наука 1987. 368 с.

36. Сорокин П. А. Моделирование биологических популяций с использованием комплексных моделей, включающих в себя индивидуум-ориентированные и аналитические компоненты : дис. канд. физ.-мат. наук. Долгопрудный. 2004. 153 с.

37. Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. Москва : Мир, 1985. 321 с.

38. Методы анализа нелинейных математических моделей / М. Холодниок, А. Клич, М. Кубичек, М. Марек. Москва : Мир, 1991. 368 с.

39. Чуличков А. И. Математические модели нелинейной динамики. Москва : Физматлит, 2003. 296 с.

40. Эрроусмит Д. К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. Москва : Мир, 1986. 243 с.