УДК 510.62

Г. А. ТИМОФЕЕВА, канд. техн. наук,
С. Ю. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО

ОБ АЛГЕБРЕ ПОДСТАНОВОЧНЫХ ОПЕРАЦИЙ

В статье [1] были введены понятия алгебры произвольного порядка и универсальной алгебры. Пусть x — какая-нибудь из переменных универсальной алгебры произвольного порядка. Ее область задания M записываем с помощью усеченного закона истинности

$$x^{\alpha_1} \vee x^{\alpha_2} \vee \ldots \vee x^{\alpha_s} = 1.$$

Эта запись означает, что $x \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$. Если x — переменная нулевого порядка, то $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — буквы. Если x — переменная i-го порядка $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$, т. е. переменный предикат i-го порядка, то $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — фиксированные предикаты i-го порядка.

Рассмотрим отношение $x \in X$ принадлежности переменного элемента x переменному множеству X. Пусть, для примера, $x \in \{a, b\}$, $X \in \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$. Требуется записать на языке алгебры конечных предикатов [2] отношение $x \in X$.

Выписываем все варианты принадлежности элементов из множества $\{a, b\}$ множествам из системы $\{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$: $a \in a$, $a \in \{a, b\}$, $b \in \{a, b\}$. Таким образом, отношение $x \in X$ представляет собой следующее множество пар: $\{(a, \{a\}), (a, \{a, b\}), (b, \{a, b\})\}$.

Переходим от полученного отношения к соответствующему предикату

$$x \in X \equiv x^a X^{x^a} \vee x^a X^1 \vee x^b X^1 \equiv x^a X^{x^a} \vee (x^a \vee x^b) X^1 \equiv x^a X^{x^a} \vee X^1.$$

При упрощении формулы мы воспользовались усеченным законом истинности для переменной x: $x^a \vee x^b = 1$. Переменную x, от которой зависит значение предиката $X = X(x)$, мы обозначили тем же символом, что и независимую буквенную переменную x.

В универсальной алгебре этой двусмысленности можно избежать. С этой целью аргумент предиката X обозначим каким-либо иным символом, конкретно — символом y. Получаем $X(y)$. В универсальной алгебре это можно делать, так как в ней имеется сколько угодно переменных нулевого порядка. Ранее же этого нельзя было сделать, поскольку мы действовали тогда в алгебре типа (2, 1, 1), в которой имеется лишь одна переменная нулевого порядка. Поэтому мы вынуждены были поневоле использовать один и тот же символ x в двух разных ролях.

Вводим область задания переменной y уравнением $y^a \vee y^b = 1$. В данном случае области задания для переменных x и y мы выбрали одинаковыми, но так делать вовсе не обязательно. Область задания для x и y можно брать различными, если это по каким-либо соображениям оказалось бы целесообразным. Область задания для переменной X записываем уравнением $X^0 \vee X^{y^a} \vee X^1 = 1$. Формула для предиката принадлежности в новых обозначениях запишется в виде

$$x \in X \equiv x^a X^{y^a} \vee X^1.$$

Полученную формулу можно переписать в несколько ином виде:

$$x \in X \equiv 0\, X^0 \vee x^a X^{y^a} \vee 1 X^1.$$

Мы видим, что предикат-множитель и предикат-показатель в каждом из дизъюнктивных членов формулы совпадают с точностью до обозначения аргумента предиката. При этом каждый предикат из области $\{0,\ y^a,\ 1\}$ задания переменной X используется по одному разу и дает свой дизъюнктивный член. Это наблюдение приводит к следующему определению предиката принадлежности $x \in X$.

Пусть $M = \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s\}$ — область задания переменных x и y, $N = \{P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_t\}$ — область задания переменной X. Тогда

$$x \in X \rightleftarrows P_1(x)\, X^{P_1} \vee P_2(x) X^{P_2} \vee \ldots \vee P_t(x)\, X^{P_t}$$

или в сжатой формее

$$x \in X \rightleftarrows \bigvee_{P \in N} P(x) X^P. \qquad (1)$$

В полученной формуле появилась вспомогательная переменная первого порядка P, играющая роль индекса, по которому ведется логическое суммирование. Она имеет ту же область задания, что и переменная

$$P^{P_1} \vee P^{P_2} \vee \ldots \vee P^{P_t} = 1.$$

В формуле (1) запись $P(x)$ означает, что элемент x принадлежит фиксированному множеству P. Запись X^P означает, что множество X совпадает с множеством P. В целом формула (1) означает, что найдется такое множество P, принадлежащее системе множеств N, для которого $x \in P$ и $P=X$, иными словами, что $x \in X$.

Докажем корректность определения (1). Требуется доказать, что для любых $a \in M$ и $A \in N$

$$a \in A = \begin{cases} 1, \text{ если } a \in A, \\ 0, \text{ если } a \bar{\in} A. \end{cases}$$

Доказательство. Выберем произвольно $x=a$, где $a \in M$ и $X=A$, где $A \in N$. Тогда согласно формуле (1)

$$a \in A = \bigvee_{P \in N} P(a) \cdot A^P = A(a)A = A(a).$$

Если $a \in A$, то $A(a)=1$, а значит $a \in A=1$; если же $a \bar{\in} A$, то $A(a)=0$, следовательно, $a \in A=0$.

В равенстве (1) под символом x можно понимать не только буквы, но и предикаты произвольного i-го порядка $(i=1, 2, ..., p-2)$, а под символом X — не только предикаты первого порядка, но и предикаты $i+1$-го порядка. Таким образом, с помощью определения (1) можно описывать принадлежность отношений любого порядка системе отношений того же порядка.

Пусть X — произвольное отношение i-го порядка; $(x_{0_1}, x_{0_2}, ..., x_{0_{n_0}}, x_{1_1}, x_{1_2}, ..., x_{1_{n_1}}, ..., x_{i-1,1}, x_{i-1\,2}, ..., x_{i-1,n_{i-1}})$ — произвольный набор i-го порядка из этого отношения; $i=1, 2, ..., p-1$. Нельзя брать $i=p$, так как тогда невозможно будет ввести переменную X, поскольку наибольший порядок переменных в алгебре конечных предикатов — $p-1$.

Величина порядка переменных в данном случае для нас не имеет значения, поэтому для простоты изложения введем для всех переменных единообразные обозначения: $x_{01}=x_1, x_{02}=x_2, ..., x_{i-1,n_{i-1}}=$ $=x_2$. В новых обозначениях произвольный набор из отношения запишется в виде $(x_1, x_2, ..., x_r)$. Принадлежность $(x_1, x_2, ..., x_r) \in X$ набора $(x_1, x_2, ..., x_r)$ отношению X есть отношение $i+1$-го порядка, оно запишется на языке алгебры конечных предикатов в виде следующего предиката $i+1$-го порядка:

$$(x_1, x_2, ..., x_r) \in X \rightleftarrows \bigvee_{P \in N} P(x_1, x_2, ..., x_r) X^P. \qquad (2)$$

Здесь N — усеченное множество всех предикатов i-го порядка (с учетом областей задания для каждой из введенных переменных $x_1, x_2, ..., x_r$).

Имеет место следующее тождество: $(x_1, x_2, ..., x_r) \in A \equiv$ $\equiv A(x_1, x_2, ..., x_r)$. Тем не менее было бы неверно писать $(x_1, x_2, ..., x_r) \in X \equiv X(x_1, x_2, ..., x_r)$.

Запись $X(x_1, x_2, ..., x_r)$ обозначает просто некоторую переменную алгебры конечных предикатов. Хотя мы и называем ее переменным предикатом, однако на самом деле X — это не предикат. Предикатами являются значения переменной X. Запись же $(x_1,$

$x_2, \ldots, x_r) \in X$ обозначает вполне конкретный предикат. Если x — переменная i-го порядка, то предикат $(x_1, x_2, \ldots, x_r) \in X$ имеет порядок $i+1$.

Обозначая для краткости переменный набор буквой ξ: $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$, запишем формулу (2) в более компактном виде:

$$\xi \in X \rightleftarrows \bigvee_{P \in N} P(\xi) X^P. \qquad (3)$$

Пусть $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, ..., $x_r = s_r$, где $s_1, s_2, \ldots, s_r$ — значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Фиксированный набор $(s_1, s_2, \ldots, s_r)$ обозначим буквой σ: $\sigma = (s_1, s_2, \ldots, s_r)$.

Рассмотрим отношение $\sigma \in X$ принадлежности фиксированного набора σ переменному отношению X. Оно выражается формулой

$$\sigma \in X \rightleftarrows \bigvee_{P \in N} P(\sigma) X^P.$$

Мы получим некоторый предикат $i+1$-го порядка от переменной X i-го порядка. Обозначим этот предикат в виде $\sigma(X)$:

$$\sigma(X) \rightleftarrows \bigvee_{P \in N} P(\sigma) X^P. \qquad (4)$$

Предикат $\sigma(X)$ назовем подставочным предикатом от переменной X по набору σ.

Предикат X^A можно выразить через подстановочные предикаты вида $\sigma(X)$ следующим образом:

$$X^A \equiv \bigwedge_{\sigma \in M} (\sigma(X) \sim A(\sigma)). \qquad (5)$$

Выражение $A(\sigma)$ есть логическая константа 0 или 1. Если $A(\sigma) = 1$, то $\sigma(X) \sim A(\sigma) \equiv \sigma(X) \sim 1 \equiv \sigma(X)$. Если же $A(\sigma) = 0$, то $\sigma(X) \sim A(\sigma) \equiv \sigma(X) \sim 0 \equiv \overline{\sigma(X)}$. Обозначим

$$\sigma(X) \rightleftarrows \sigma^1(X);$$

$$\overline{\sigma(X)} \rightleftarrows \sigma^0(X).$$

В обоих случаях имеем $\sigma(X) \sim A(\sigma) \equiv \sigma^{A(\sigma)}(X)$. С учетом полученного результата формулу (5) можно переписать в следующем виде:

$$X^A \equiv \bigwedge_{\sigma \in M} \sigma^{A(\sigma)}(X). \qquad (6)$$

Формула (6) выражает узнавание X^A произвольного предиката A для любого переменного предиката в виде X суперпозиции операций отрицания и конъюнкции, действующих на всевозможные подстановочные предикаты, зависящие от переменной X.

Формула (6) позволяет ввести новую разновидность алгебры конечных предикатов, которую мы назовем алгеброй подстановочных предикатов. В этой алгебре в качестве элементарных предикатов используются: 1) все предикаты узнавания буквы для всевозможных буквенных переменных (поскольку их нельзя выразить через подстановочные предикаты с помощью формулы (6)); 2) все подстановочные предикаты для всевозможных предикатных переменных. В качестве элементарных операций в алгебре подстановочных предикатов используются конъюнкции, дизъюнкция и отрицание.

По сравнению с дизъюнктивной и импликативной алгеброй алгебра подстановочных предикатов имеет на одну операцию больше, но зато число элементарных предикатов в ней неизмеримо меньше. Число всех подстановочных предикатов для какого-либо переменного предиката совпадает с числом M всех наборов значений аргументов этого предиката. Число же всех узнаваний этого переменного предиката совпадает с числом всех постоянных предикатов, которые могут служить значениями данного переменного предиката. Это число равно 2^M.

Пусть $A(x_1\ x_2, ..., x_r)$ — произвольный постоянный предикат i-го порядка ($i=1, 2, ..., p$). Рассмотрим операцию

$$S_{x_j}(A) \rightleftarrows A(x_1, x_2, ..., x_{j-1}, S, x_{j+1}, ..., x_r), \quad (7)$$

которая ставит в соответствие предикату $A(x_1, x_2, ..., x_r)$ предикат $B(x_1, x_2, ..., x_r)=A(x_1, x_2, ..., x_{j-1}, S, x_{j+1}, ..., x_2)$, получающийся подстановкой в исходный предикат A значения s вместо переменной x_j. В предикате B переменная x_j — несущественная (фиктивная). Введенную операцию назовем подстановочной операцией $x_j=s$. Любой подстановочный предикат $\sigma(X)$, где $\sigma=(s_1, s_2, ..., s_r)$, выражается с помощью следующей суперпозиции подстановочных операций

$$\sigma(X) \equiv s_{1_{x_1}}(s_{2_{x_2}} \dots s_{r_{x_r}}(x_1, x_2 \dots, x_r) \in X) \dots), \quad (8)$$

действующей на предикат принадлежности $\xi \in X$. Тождество (8) позволяет ввести еще одну разновидность алгебры конечных предикатов, которую мы назовем алгеброй подстановочных операций. В этой алгебре в качестве элементарных предикатов используются все предикаты узнавания букв и всевозможные предикаты вида $\xi \in X$. В качестве элементарных операций в алгебре подстановочных операций используются конъюнкция, дизъюнкция, отрицание и все подстановочные операции вида $x_j=s$ при всевозможных значениях j и s.

По сравнению с алгеброй подстановочных предикатов алгебра подстановочных операций имеет неизмеримо меньше элементарных предикатов. Общее их число в ней равно kn_0+r, где k — число букв в алфавите алгебры конечных предикатов; n_0 — число переменных первого порядка; r — число всех предикатных переменных. Вместе с тем число элементарных операций в ней намного больше. К операциям конъюнкции, дизъюнкции и отрицания теперь добавляется $k_1+k_2+...+k_r$ подстановочных операций, где $k_1, k_2, ..., k_r$ — число значений, которые принимают соответственно переменные $x_1, x_2, ..., x_r$. Если же учитывать суммарное число элементарных предикатов и операций, то в алгебре подстановочных операций это число неизмеримо больше, чем в алгебре подстановочных предикатов. Алгебра подстановочных операций полна.

Подстановочными операциями можно действовать не только на постоянные, но и на переменные предикаты $y = S_{x_j}(X)$; можем записать

$$X^P \supset Y^{s_{x_j}(P)}, \quad (p \in N).$$

На основании теорем об импликативном и дизъюнктивном разложении имеем

$$\bigwedge_{P \in N} (X^P \supset Y^{s_{x_j}(P)}) = 1 \text{ или же } \bigvee_{P \in N} X^P Y^{s_{x_j}(P)} = 1.$$

Введем понятие предиката подстановочной операции

$$S_{x_j}(X, Y) \rightleftharpoons \bigvee_{P \in N} X^P Y^{s_{x_j}(P)}.$$

Язык алгебры подстановочных предикатов и язык алгебры подстановочных операций будем рассматривать как консервативные расширения языка дизъюнктивной алгебры конечных предикатов.

На практике широко используются операции над предикатами, называемые квантором общности и квантором существования, которыми действуют на произвольный постоянный предикат не выше p—1-го порядка $A(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ по одной из переменных $x_j (j = 1, 2, \ldots, r)$. Они определяются следующим образом:

$$\forall x_j A(x_1, x_2, \ldots, x_r) \rightleftharpoons \bigwedge_{S \in M_j} A(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, s, x_{j+1}, \ldots, x_r);$$

$$\exists x_j A(x_1, x_2, \ldots, x_r) \rightleftharpoons \bigvee_{S \in M_j} A(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, s, x_{j+1}, \ldots, x_r).$$

Здесь M_j — область задания переменной x_j. В более краткой форме определение кванторов можно записать следующим образом:

$$\forall x_j A \rightleftharpoons \bigwedge_{S \in M_j} S_{x_j}(A); \quad \exists x_j A \rightleftharpoons \bigvee_{S \in M_j} S_{x_j}(A).$$

Содержательно кванторы истолковываются следующим образом. Запись $\forall x_j A(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_r)$ означает: „при заданных предметах $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_r$ для любого предмета x_j из множества M_j выполняется свойство A". Запись $\exists x_j A(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_r)$ означает: „при заданных предметах $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_r$ в множестве M_j существует предмет x_j, для которого выполняется свойство A".

Кванторами общности и существования можно действовать на предикат многократно, чередуя в произвольной последовательности кванторы общности и существования и переменные, по которым они берутся.

Квантор общности и квантор существования, которые берутся от предиката $A(\xi)$, где $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$, сразу по всем переменным $x_1, x_2, \ldots, x_r$, назовем кванторами общности и существования по набору переменных ξ:

$$\forall\xi A(\xi) \rightleftarrows \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_r A(x_1, x_2, \ldots, x_r);$$

$$\exists\xi A(\xi) \rightleftarrows \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_r A(x_1, x_2, \ldots, x_r).$$

Можно записать

$$\forall\xi A(\xi) \equiv \bigwedge_{\sigma\in M} \sigma(A); \quad \exists\xi A(\xi) \equiv \bigvee_{\sigma\in M} \sigma(A).$$

Здесь $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_r$.

Кванторами общности и существования можно действовать не только на постоянные, но и на переменные предикаты $Y = \forall x_j X$, $Y = \exists x_j X$. Можно записать соответственно для кванторов общности и существования

$$X^P \supset Y^{\bigwedge\limits_{s\in M_j} s_{x_j}(P)}; \quad X^P \supset Y^{\bigvee\limits_{s\in M_j} s_{x_i}(P)}; \quad (P\in N).$$

На основании теорем об импликативном и дизъюнктивном разложении имеем

$$\bigvee_{P\in N} X^P Y^{\bigwedge\limits_{s\in M_j} s_{x_j}(P)} = 1; \quad \bigvee_{P\in N} X^P Y^{\bigvee\limits_{s\in M_j} s_{x_j}(P)} = 1.$$

Вводим понятие предиката общности

$$\forall x_j(X, Y) \rightleftarrows \bigvee_{P\in N} X^P Y^{\bigwedge\limits_{s\in M_j} s_{x_j}(P)}$$

и предиката существования

$$\exists x_j(X, Y) \rightleftarrows \bigvee_{P\in N} X^P Y^{s\in M_j}.$$

В дальнейшем язык дизъюнктивной алгебры конечных предикатов консервативно расширяем за счет введения кванторов общности и существования.

Пусть произвольно выбраны два отношения A и B. В частном случае это могут быть множества предметов. Требуется описать в виде формул алгебры конечных предикатов включение $A\subseteq B$ и равенство $A = B$ этих отношений. Включение и равенство отношений — это тоже отношения, но только на единицу выше порядком. Для определения включения и равенства отношений используем известные из теории множеств выражения

$$A\subseteq B \rightleftarrows \forall\xi(\xi\in A, \supset \xi\in B); \quad A = B \rightleftarrows \forall\xi(\xi\in A \sim \xi\in B).$$

Содержательная интерпретация этих выражений следующая. Отношение $A\subseteq B$ выполняется в том и только в том случае, когда каждый набор ξ из отношения A содержится также и в отношении B. Отношение $A = B$ выполняется в том и только в том случае, когда принадлежность набора ξ отношению A равносильна принадлежности этого же набора отношению B. Равенство и включение отношений связаны друг с другом следующим образом. Утверждение $A=B$ равносильно утверждению $A\subseteq B$, $B\subseteq A$. Докажем эту связь. На основе определения квантора общности по набору переменных

$$A=B\equiv\bigwedge_{\sigma\in M}(\sigma\in A\supset\sigma\in B)(\sigma\in B\supset\sigma\in A)\equiv$$

на основе тождества $P\sim Q\equiv(\overline{P}\vee Q)(P\vee\overline{Q})$, где P и Q — произвольные предикаты,

$$\equiv\bigwedge_{\sigma\in M}(\sigma\in A\supset\sigma\in B)(\sigma\in B\supset\sigma\in A)\equiv,$$

на основе тождества $P\supset Q\equiv\overline{P}\vee Q$

$$\equiv(\bigwedge_{\sigma\in M}(\sigma\in A)\supset\sigma\ni B))\wedge(\bigwedge_{\sigma\in M}(\sigma\in B\supset\sigma\in A))\equiv,$$

на основе ассоциативности операции конъюнкции

$$\equiv(\forall\xi(\xi\in A\supset\xi\in B))\wedge(\forall\xi(\xi\in B\supset\xi\in A))\equiv A\subseteq B\wedge B\subseteq A.$$

Включение и равенство отношений рефлексивны, т. е. $A\subseteq A$ и $A=A$. Включение и равенство отношений транзитивны, т. е.

$$\text{если } A\subseteq B \text{ и } B\subseteq C, \text{ то } A\subseteq C,$$

$$\text{если } A=B \text{ и } B=C, \text{ то } A=C.$$

Равенство отношений симметрично, т. е. если $A=B$, то $B=A$. Равенство отношений экстенсионально, т. е. если $A=B$, то любые свойства отношений A и B совпадают.

На языке дизъюнктивной алгебры конечных предикатов включение $X\subseteq Y$ переменных отношений X и Y запишется следующим образом:

$$X\subseteq Y\equiv\forall x_1\forall x_2\ldots\forall x_r((x_1,x_2,\ldots,x_r)\in X\supset(x_1,x_2,\ldots,x_r)\in$$

$$\in Y)\equiv\bigwedge_{\sigma\in M}(\sigma\in X\supset\sigma\in Y)\equiv\bigwedge_{\sigma\in M}(\bigvee_{P\in N}P(\sigma)X^P\supset$$

$$\supset\bigvee_{P\in N}P(\sigma)Y^P).\quad(\sigma=(s_1,s_2,\ldots,s_r)).$$

Аналогично находим формулу и для равенства $X=Y$ переменных отношений

$$X=Y\equiv\bigwedge_{\sigma\in M}(\bigvee_{P\in N}P(\sigma)X^P\sim\bigvee_{P\in N}P(\sigma)Y^P).$$

С другой стороны, очевидно, что

$$X=Y\equiv\bigvee_{P\in N}X^PY^P.$$

Список литературы: 1. *Тимофеева Г. А., Шабанов-Кушнаренко С. Ю.* О конечных отношениях произвольного порядка//Пробл. бионики. Х., 1988. С. 7—11. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта: Математические средства. Х., 1984. 142 с.

Поступила в редколлегию 27.10.86