

Член-корреспондент НАН Украины Ю. Г. Стоян, А. В. Панкратов,
Т. Е. Романова, Н. И. Чернов

Квази- ϕ -функции для математического моделирования отношений геометрических объектов

Рассматриваются классы специальных функций (квази- ϕ -функции, нормализованные квази- ϕ -функции, псевдонормализованные квази- ϕ -функции), предназначенные для аналитического описания отношений непересечения пары неориентированных геометрических объектов и ограничений на допустимые расстояния. Приводятся основные свойства квази- ϕ -функций, сформулированные в виде теорем. Строятся квази- ϕ -функции для некоторых видов неориентированных 2D- и 3D-объектов.

В задачах оптимального раскроя и упаковки [1] наиболее эффективным средством математического моделирования отношений геометрических объектов является метод ϕ -функций [2–7]. В данной работе рассматривается новый класс функций — квази- ϕ -функций, который является развитием метода ϕ -функций. Квази- ϕ -функции позволяют значительно упростить аналитическое описание ограничений на непересечение, минимально и максимально допустимые расстояния с учетом непрерывных вращений объектов, а также расширить класс объектов, для которых эти ограничения можно представить в виде систем неравенств [5].

Пусть $A \subset R^t$ и $B \subset R^t$ — замкнутые ϕ -объекты, $t = 2, 3$ [1]. Полагаем, что, по крайней мере, один из объектов — ограниченный. Размеры объектов могут изменяться с точностью до коэффициента гомотетии $\lambda_A, \lambda_B > 0$ соответственно. Местоположение объекта A определяется вектором переменных параметров размещения (v_A, θ_A) , где $v_A = (x_A, y_A, z_A)$ — вектор трансляции; $\theta_A = (\theta_z, \theta_x, \theta_y)$ — углы поворота: от оси OX к OY , от оси OY к OZ и от оси OX к OZ . Обозначим $u_A = (v_A, \theta_A, \lambda_A)$ вектор переменных объекта A и $u_B = (v_B, \theta_B, \lambda_B)$ — вектор переменных объекта B . В дальнейшем объект $A(B)$, повернутый последовательно на углы $\theta_z, \theta_x, \theta_y$, транслированный на вектор v и умноженный на коэффициент гомотетии λ , обозначается $A(u_A)$ ($B(u_B)$).

Определение 1. Квази- ϕ -функцией для ϕ -объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$ называется всюду определенная, непрерывная функция $\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u')$, для которой при фиксированных $\lambda_A = \lambda_A^0$ и $\lambda_B = \lambda_B^0$ функция $\max_{u' \in U} \Phi'^{AB}(u_A, u_B, u')$ является ϕ -функцией для $A(u_A)$ и $B(u_B)$, где вид множества $U \subset R^n$ и размерность пространства R^n зависят от формы размещаемых объектов.

Пусть $\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u')$ — квази- ϕ -функция для ϕ -объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$.

Теорема 1. Если $\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u') \geq 0$, то $\text{int } A(u_A) \cap \text{int } B(u_B) = \emptyset$.

Далее полагаем, что A и B — выпуклые объекты, а λ_A и λ_B являются переменными на множестве $(0, +\infty)$.

Пусть $P(u_P) = \{(x, y, z) : \psi_P = \alpha x + \beta y + \gamma z + \mu_P \leq 0\}$, где $u_P = (\theta_{xP}, \theta_{yP}, \mu_P)$, $\alpha = \sin \theta_{yP}$, $\beta = -\sin \theta_{xP} \cos \theta_{yP}$, $\gamma = \cos \theta_{xP} \cos \theta_{yP}$; $\Phi^{AP}(u_A, u_P)$ — ϕ -функция для $A(u_A)$ и $P(u_P)$,

$\Phi^{BP^*}(u_B, u_P)$ — phi-функция для $B(u_B)$ и $P^*(u_P) = R^t \setminus \text{int } P(u_P)$, $t = 2, 3$. Заметим, что $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Если $A, B \subset R^2$, то $P(u_P) = \{(x, y): \psi_P = \alpha x + \beta y + \mu_P \leq 0\}$, где $u_P = (\theta_P, \mu_P)$ $\alpha = \cos \theta_P$, $\beta = \sin \theta_P$.

Теорема 2. Функция вида

$$\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u_P) = \min\{\Phi'^{AP}(u_A, u_P), \Phi'^{BP^*}(u_B, u_P)\} \quad (1)$$

является квази-phi-функцией для ограниченных объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$. Здесь $u' = u_P$.

Следствие 1. Если $\Phi'^{AP}(u_A, u_P, u'_1)$ — квази-phi-функция для $A(u_A)$ и $P(u_P)$, $\Phi'^{BP^*}(u_B, u_P, u'_2)$ — квази-phi-функция для $B(u_B)$ и $P^*(u_P)$, то функция вида

$$\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u') = \min\{\Phi'^{AP}(u_A, u_P, u'_1), \Phi'^{BP^*}(u_B, u_P, u'_2)\} \quad (2)$$

является квази-phi-функцией для ограниченных объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$. Здесь $u' = (u_P, u'_1, u'_2)$.

Понятие квази-phi-функции может быть использовано также для моделирования ограничений на допустимые расстояния между объектами. С этой целью введем определения нормализованной и псевдонормализованной квази-phi-функции, основываясь на аналогичных терминах для phi-функций [3].

Пусть $\text{dist}(A, B) = \min_{a \in A, b \in B} d(a, b)$, $d(a, b)$ — евклидово расстояние между точками a и b , $a, b \in R^t$, $t = 2, 3$. Обозначим $\rho^- > 0$, $\rho^+ > 0$ — заданные минимально и максимально допустимые расстояния между объектами $A(u_A)$ и $B(u_B)$.

Определение 2. Квази-phi-функция $\tilde{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u')$ называется нормализованной для объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$, если функция $\max_{u' \in U} \tilde{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u')$ является нормализованной phi-функцией.

Таким образом, $\rho^- \leq \max_{u' \in U} \tilde{\Phi}'^{AB} \leq \rho^+ \Leftrightarrow \rho^- \leq \text{dist}(A, B) \leq \rho^+$.

Определение 3. Функция $\widehat{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u')$ называется псевдонормализованной квази-phi-функцией для объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$, если функция $\max_{u' \in U} \widehat{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u')$ является псевдонормализованной phi-функцией.

Аналогично понятиям псевдонормализованных phi-функций [3] будем различать псевдонормализованные квази-phi-функции $\widehat{\Phi}_-'^{AB}$ для моделирования ограничений $\text{dist}(A, B) \geq \rho^-$ и псевдонормализованные квази-phi-функции $\widehat{\Phi}_+'^{AB}$ для моделирования ограничений $\text{dist}(A, B) \leq \rho^+$.

Тогда $\max_{u' \in U} \widehat{\Phi}_-'^{AB} \geq 0 \Leftrightarrow \text{dist}(A, B) \geq \rho^-$, $\max_{u' \in U} \widehat{\Phi}_+'^{AB} \geq 0 \Leftrightarrow \text{dist}(A, B) \leq \rho^+$. Пусть квази-phi-функция имеет вид

$$\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u_P) = \min\{\tilde{\Phi}'^{AP}(u_A, u_P), \tilde{\Phi}'^{BP^*}(u_B, u_P)\}, \quad (3)$$

где $\tilde{\Phi}'^{AP}(u_A, u_P)$, $\tilde{\Phi}'^{BP^*}(u_B, u_P)$ — нормализованные phi-функции.

Тогда квази-phi-функция

$$\tilde{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u_P) = 2\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u_P)$$

является нормализованной квази- ϕ -функцией, а квази- ϕ -функция

$$\widehat{\Phi}_{-}^{\prime AB}(u_A, u_B, u_P) = \Phi^{\prime AB}(u_A, u_B, u_P) - 0,5\rho^{-}$$

является псевдонормализованной квази- ϕ -функцией.

В работе [4] приведен полный класс ϕ -функций для неориентированных базовых 2D-объектов, ограниченных дугами окружностей и отрезками прямых. Для неориентированных 3D-объектов построены ϕ -функции для прямых прямоугольных параллелепипедов, выпуклых многогранников и шаров в работах [6, 7].

В данной работе, основываясь на формулах (1)–(3), в качестве примеров строятся квази- ϕ -функции для некоторых видов неориентированных 2D- и 3D-объектов.

Квази- ϕ -функция для выпуклых многогранников. Пусть $K_1(u_1)$ и $K_2(u_2)$ — выпуклые многогранники, заданные вершинами $\lambda_1 p_i^1$, $i = 1, \dots, m_1$, и $\lambda_2 p_i^2$, $i = 1, \dots, m_2$, $\Phi^{K_1 P}(u_1, u_P) = \min_{1 \leq i \leq m_1} \psi_P(\lambda_1 p_i^1)$ — ϕ -функция для объектов K_1 и P , $\Phi^{K_2 P^*}(u_2, u_P) = \min_{1 \leq i \leq m_2} (-\psi_P(\lambda_2 p_i^2))$ — ϕ -функция для объектов K_2 и P^* . Тогда функция

$$\Phi^{\prime K_1 K_2}(u_1, u_2, u_P) = \min\{\Phi^{K_1 P}(u_1, u_P), \Phi^{K_2 P^*}(u_2, u_P)\} \quad (4)$$

является квази- ϕ -функцией для $K_1(u_1)$ и $K_2(u_2)$.

Отметим, что функция $2\Phi^{\prime K_1 K_2}(u_1, u_2, u_P)$ является нормализованной квази- ϕ -функцией.

Псевдонормализованная квази- ϕ -функция для выпуклых многогранников $K_1(u_1)$ и $K_2(u_2)$ имеет вид

$$\widehat{\Phi}_{-}^{\prime K_1 K_2}(u_1, u_2, u_P) = \min\{\Phi^{K_1 P}(u_1, u_P), \Phi^{K_2 P^*}(u_2, u_P)\} - 0,5\rho^{-}. \quad (5)$$

Квази- ϕ -функция для выпуклого многогранника $K(u_1)$ и шара $C(u_2)$. Пусть $K(u_1)$ — выпуклый многогранник, заданный вершинами $\lambda_1 p_i$, $i = 1, \dots, m$; p_C и $\lambda_2 r_C$ — центр и радиус шара $C(u_2)$; $\Phi^{KP}(u_1, u_P) = \min_{1 \leq i \leq m} \psi_P(\lambda_1 p_i)$ — ϕ -функция для объектов K и P , $\Phi^{CP^*}(u_2, u_P) = -\psi_P(p_C) - \lambda_2 r_C$ — ϕ -функция для объектов C и P^* .

Тогда квази- ϕ -функция для $K(u_1)$ $C(u_2)$ может быть определена так:

$$\Phi^{\prime CK}(u_1, u_2, u_P) = \min\{\Phi^{KP}(u_1, u_P), \Phi^{CP^*}(u_2, u_P)\}. \quad (6)$$

Отметим, что функция $2\Phi^{\prime CK}(u_1, u_2, u_P)$ является нормализованной квази- ϕ -функцией.

Замечание. Квази- ϕ -функции вида (4)–(6) могут быть использованы для выпуклых многоугольников и кругов непосредственно.

Квази- ϕ -функция для круговых сегментов $D_1(u_1)$ и $D_2(u_2)$. Пусть $D_1(u_1) = T_1(u_1) \cap C_1(u_1)$, $D_2(u_2) = T_2(u_2) \cap C_2(u_2)$, $T_1(u_1)$ и $T_2(u_2)$ — треугольники, заданные вершинами $\lambda_1 p_i^1$, и $\lambda_2 p_i^2$, $i = 1, 2, 3$, p_C^1 , p_C^2 и $\lambda_1 r_C^1$, $\lambda_2 r_C^2$ — центры и радиусы кругов $C_1(u_1)$ и $C_2(u_2)$ соответственно.

Тогда, следуя (1), квази- ϕ -функция для $D_1(u_1)$ и $D_2(u_2)$ может быть определена так:

$$\begin{aligned} \Phi^{\prime D_1 D_2}(u_1, u_2, u_P) &= \min\{\Phi^{D_1 P}(u_1, u_P), \Phi^{D_2 P^*}(u_2, u_P)\}, \\ \Phi^{D_1 P}(u_1, u_P) &= \max\{\Phi^{T_1 P}, \Phi^{C_1 P}\}, \quad \Phi^{D_2 P^*}(u_2, u_P) = \max\{\Phi^{T_2 P^*}, \Phi^{C_2 P^*}\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi^{T_1P}(u_1, u_P) &= \min_{i=1,2,3} \psi_P(\lambda_1 p_i^1), & \Phi^{C_1P}(u_1, u_P) &= \psi_P(p_C^1) - \lambda_1 r_C^1, \\ \Phi^{C_2P^*}(u_2, u_P) &= -\psi_P(p_C^2) - \lambda_2 r_C^2, & \Phi^{T_2P^*}(u_2, u_P) &= \min_{i=1,2,3} (-\psi_P(\lambda_2 p_i^2)).\end{aligned}$$

Построим квази- ρ -функцию для $D_1(u_1)$ и $D_2(u_2)$, используя формулу (2), в виде

$$\Phi'^{D_1D_2}(u_1, u_2, u') = \min\{\Phi'^{D_1P}(u_1, u_P, u'_1), \Phi'^{D_2P^*}(u_2, u_P, u'_2)\},$$

где $u' = (u_P, u'_1, u'_2)$, $u'_1 \in [0, 1] \subset R^1$, $u'_2 \in [0, 1] \subset R^1$.

С этой целью определим квази- ρ -функции $\Phi'^{D_1P}(u_1, u_P, u'_1)$ и $\Phi'^{D_2P^*}(u_2, u_P, u'_2)$.

Пусть $\Phi^{C_1P}(u_1, u_P)$ — ρ -функция $C_1(u_1)$ и $P(u_P)$, а

$$\Phi'^{D_1P}(u_1, u_P, u'_1) = \min\{\psi_P(\lambda_1 p_1^1), \psi_P(\lambda_1 p_2^1), \chi_1(u_1, u_P, u'_1)\},$$

$$\chi_1(u_1, u_P, u'_1) = \psi_P(\lambda_1 p_3^1) - u'_1 \psi_P(\lambda_1 p_3^1) + u'_1 \Phi^{C_1P}(u_1, u_P),$$

где $u'_1 \in [0, 1] \subset R^1$, $\lambda_1 p_i^1$, $i = 1, 2$, — вершины основания объекта $D_1(u_1)$.

По аналогии, имеем

$$\Phi'^{D_2P^*}(u_2, u_P, u'_2) = \min\{-\psi_P(\lambda_2 p_1^2), -\psi_P(\lambda_2 p_2^2), \chi_2(u_2, u_P, u'_2)\},$$

$$\chi_2(u_2, u_P, u'_2) = -\psi_P(\lambda_2 p_3^2) - u'_2(-\psi_P(\lambda_2 p_3^2)) + u'_2 \Phi^{C_2P^*}(u_2, u_P),$$

где $u'_2 \in [0, 1] \subset R^1$, $\lambda_2 p_i^2$, $i = 1, 2$, — вершины основания объекта $D_2(u_2)$.

Замечание. Квази- ρ -функция вида (7) может быть использована для шаровых сегментов, если рассматривать: в качестве $T_1(u_1)$ и $T_2(u_2)$ — прямые круговые конусы, $C_1(u_1)$ и $C_2(u_2)$ — шары, а в качестве Φ^{T_1P} ($\Phi^{T_2P^*}$) — ρ -функции для конуса и полупространства.

Квази- ρ -функция для эллипсов $E_1(u_1)$ и $E_2(u_2)$. Пусть $E_1(u_1)$ и $E_2(u_2)$ — эллипсы, заданные большой и малой полуосями $\lambda_i a_i$ и $\lambda_i b_i$, $i = 1, 2$. Тогда квази- ρ -функция для $E_1(u_1)$ и $E_2(u_2)$ может быть задана в виде

$$\Phi'^{E_1E_2}(u_1, u_2, u') = \min\{\chi(\theta_1, \theta_2, u'), \chi_1(u_1, u_2, u'), \chi_2(u_1, u_2, u')\},$$

где $u' = (t_1, t_2)$, $0 \leq t_i \leq 2\pi$, $\chi = -(N'_1, N'_2)$, $N'_i = (\alpha'_i, \beta'_i)$, $\alpha'_i = \alpha_i \cos \theta_i + \beta_i \sin \theta_i$, $\beta'_i = -\alpha_i \sin \theta_i + \beta_i \cos \theta_i$, $\alpha_i = (\cos t_i)/(\lambda_i a_i)$, $\beta_i = (\sin t_i)/(\lambda_i b_i)$, $i = 1, 2$; $\chi_j = \alpha'_1 x_{q_{2j}} + \beta'_1 y_{q_{2j}} - 1$, $q_{2j} = (x_{q_{2j}}, y_{q_{2j}}) = v_2 + V'_2 + \eta n'_j$, $j = 1, 2$, $V'_2 = M(\theta_2)V_2$ (здесь $M(\theta_2)$ — матрица поворота, $V_2 = (\lambda_2 a_2 \cos t_2, \lambda_2 b_2 \sin t_2)$, $N'_1 = (-\beta'_2, \alpha'_2)$, $N'_2 = (\beta'_2, -\alpha'_2)$, $\eta = \lambda_2^2 a_2^2$).

Следуя (2), квази- ρ -функцию для $E_1(u_1)$ и $E_2(u_2)$ можно задать так:

$$\Phi'^{E_1E_2}(u_1, u_2, u') = \min\{\Phi'^{E_1P}(u_1, u_P, u'_1), \Phi'^{E_2P^*}(u_2, u_P, u'_2)\},$$

где $\Phi'^{E_1P}(u_1, u_P, t_1)$, $\Phi'^{E_2P^*}(u_2, u_P, t_2)$ — квази- ρ -функции для эллипса и полуплоскости вида

$$\Phi'^{E_1P}(u_1, u_P, t_1) = \min\{\chi(\theta_1, \theta_P, t_1), \psi_P(q_{11}), \psi_P(q_{12})\},$$

$0 \leq t_1 \leq 2\pi$, $\chi = -(N'_1, N)$, $N'_1 = (\alpha'_1, \beta'_1)$, $N = (\alpha, \beta)$, $q_{1j} = (x_{q_{1j}}, y_{q_{1j}}) = v_1 + V'_1 + \eta n'_j$, $j = 1, 2$, $V'_1 = M(\theta_1)V_1$ (здесь $M(\theta_1)$ — матрица поворота, $V_1 = (\lambda_1 a_1 \cos t_1, \lambda_1 b_1 \sin t_1)$, $N'_1 = (-\beta'_1, \alpha'_1)$, $N'_2 = (\beta'_1, -\alpha'_1)$, $\eta = \lambda_1^2 a_1^2$).

По аналогии, имеем

$$\Phi'^{E_2P^*}(u_2, u_P, t_2) = \min\{\chi(\theta_2, \theta_P, t_2), -\psi_P(q_{21}), -\psi_P(q_{22})\}.$$

Пусть $A(u_A) = \bigcup_{i=1}^{n_A} A_i(u_A)$ и $B(u_B) = \bigcup_{j=1}^{n_B} B_j(u_B)$, а $\Phi'^{A_iB_j}(u_A, u_B, u'_{ij})$ — квази-phi-функции для $A_i(u_A)$ и $B_j(u_B)$, $i = 1, 2, \dots, n_A$, $j = 1, 2, \dots, n_B$.

Теорема 3. *Функция вида*

$$\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u_P) = \min\{\Phi'^{A_iB_j}(u_A, u_B, u'_{ij}), i = 1, 2, \dots, n_A, j = 1, 2, \dots, n_B\} \quad (8)$$

является квази-phi-функцией для $A(u_A)$ и $B(u_B)$, $u_P = (u'_{ij}, i = 1, 2, \dots, n_A, j = 1, 2, \dots, n_B)$.

Следствие 2. *Если квази-phi-функции $\Phi'^{A_iB_j}$ в (8) заменить на нормализованные $\tilde{\Phi}'^{A_iB_j}$ (псевдонормализованные $\widehat{\Phi}'^{A_iB_j}$) квази-phi-функции, то Φ'^{AB} является нормализованной (псевдонормализованной) квази-phi-функцией для $A(u_A)$ и $B(u_B)$.*

1. Wascher G., Hauner H., Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems // Europ. J. of Operational Research. – 2007. – **183**, Iss. 3. – P. 1109–1130.
2. Stoyan Yu. Φ -function and its basic properties // Доп. НАН України. – 2001. – № 8. – С. 112–117.
3. Chernov N., Stoyan Yu., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // Computational Geometry: Theory and Applications. – 2010. – **43**(5). – P. 535–553.
4. Chernov N., Stoyan Yu., Romanova T., Pankratov A. Phi-functions for 2D objects formed by line segments and circular arcs // Advances in Operations Research. – 2012. – **2012**. – Article ID 346358. – 26 p.
5. Панкратов А. Информационная система решения оптимизационной задачи размещения произвольных неориентированных 2D-объектов // Системи обробки інформації. – 2013. – **1**(108). – С. 182–186.
6. Stoyan Yu., Chugay A. Mathematical modeling of the interaction of non-oriented convex polytopes // Cybernetics and Systems Analysis. – 2012. – **48**, No 6. – P. 837–845.
7. Стоян Ю. Г., Чугай А. М. Построение свободной от радикалов Φ -функции для шара и неориентированного многогранника // Доп. НАН України. – 2011. – № 12. – С. 35–40.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков
Университет Алабама, Бирмингем, США

Поступило в редакцию 07.02.2014

Член-корреспондент НАН України Ю. Г. Стоян, О. В. Панкратов,
Т. Є. Романова, М. І. Чернов

Квазі-phi-функції для математичного моделювання відносин геометричних об'єктів

Розглядаються класи спеціальних функцій (квазі-phi-функції, нормалізовані квазі-phi-функції, псевдонормалізовані квазі-phi-функції), призначені для аналітичного опису відносин неперетинання пари неорієнтованих геометричних об'єктів та обмежень на допустимі відстані. Наводяться основні властивості квазі-phi-функцій, сформульовані у вигляді теорем. Будуються квазі-phi-функції для деяких видів неорієнтованих 2D- і 3D-об'єктів.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **Yu. G. Stoyan, A. V. Pankratov, T. E. Romanova, N. I. Chernov**

Quasi-phi-functions for a mathematical modeling of the relations of geometric objects

The article considers the classes of special functions (quasi-phi-functions, normalized quasi-phi-functions, pseudonormalized quasi-phi-functions). The functions allow us to describe the non-overlapping of a pair of rotating geometric objects and distance constraints analytically. Basic characteristics of quasi-phi-functions are formulated in the form of theorems. We introduce quasi-phi-functions for some rotating 2D- and 3D-objects.