

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Кафедра прикладной математики

Гибкина Н.В., Роговой Н.С., Стадникова А.В.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА
ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ВЯЗКИХ СМЕСЕЙ МЕТОДОМ R-ФУНКЦИЙ**

Сборник статей VII Международной научно-технической конференции
молодых специалистов, аспирантов и студентов
«Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных
и социальных проблем»

(Россия, г. Пенза, ПГУ, 28 – 31 мая 2013 г.). – С. 29 – 34.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ВЯЗКИХ СМЕСЕЙ МЕТОДОМ R-ФУНКЦИЙ

Гибкина Н.В., Роговой Н.С., Стадникова А.В.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, г. Харьков
gina@ukr.net

Введение. Задача математического моделирования и численного анализа перемешивания вязких смесей часто встречается во многих прикладных областях, в частности, в химической, фармацевтической и пищевой промышленности [2, 7, 9]. Кроме того, проблема перемешивания жидкостей представляет фундаментальную научную проблему, тесно связанную с современными концепциями хаотической и регулярной динамики [1, 3, 5]. Известно, что при некоторых условиях ламинарные течения могут приводить к интенсивному (хаотическому) перемешиванию. Большинство методов, используемых при моделировании таких процессов, не обладают свойством универсальности и их сложно применять для «непримитивных» областей. Обычно задача перемешивания решалась для таких простых областей, как круг, полукруг, круговой сектор и т.д. [1, 3, 5, 9], однако для изучения процесса перемешивания в более сложных областях, предложенный в этих работах математический аппарат, не применим. Точно учесть геометрию области можно, используя конструктивный аппарат теории R -функций, предложенный акад. НАН Украины В.Л. Рвачевым [8]. Поэтому разработка новых методов численного анализа задачи перемешивания, основанных на применении метода R -функций, является актуальной научной проблемой.

Целью данной работы является разработка методов математического моделирования и численного анализа процесса перемешивания вязкой несжимаемой жидкости, вызванного системой точечных вихрей, методами R -функций и Ритца. Решение задачи перемешивания состоит из двух этапов:

- 1) определение поля скоростей течения жидкости (формализм Эйлера);
- 2) исследование траекторий движения отдельных частиц жидкости (формализм Лагранжа).

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [4].

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоское квазистационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в конечной односвязной области Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω состоит из участков $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$, $\partial\Omega_3$, $\partial\Omega_4$, причем $\partial\Omega_2$, $\partial\Omega_4$ находятся в состоянии покоя, а $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_3$ попеременно движутся в противоположные стороны со скоростями $\mathbf{v}_{top}(t)$ и $\mathbf{v}_{bot}(t)$ соответственно (рис. 1).

Решение первой части задачи перемешивания заключается в получении поля скоростей (v_x, v_y) в области течения Ω . Будем считать, что рассматриваемое течение относится к ползущим и нелинейными слагаемыми в уравнениях Навье-Стокса можно пренебречь, т.е. будем моделировать течение в приближении Стокса.

Плоское квазистационарное стоксово течение будем описывать с помо-

щью функции тока $\psi(x, y, t)$, вводимой соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

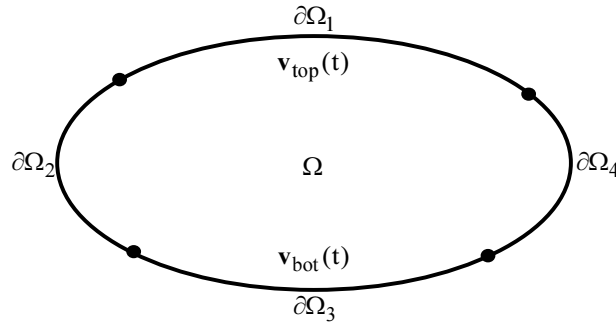


Рис. 1. Расчетная область

Для функции тока $\psi(x, y, t)$ можно поставить краевую задачу:

$$\Delta^2 \psi = 0 \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = \begin{cases} g_{top}(t) & \text{на } \partial\Omega_1, \\ g_{bot}(t) & \text{на } \partial\Omega_3, \\ 0 & \text{на } \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4, \end{cases} \quad (2)$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, Δ^2 – бигармонический оператор.

Решение задачи (1), (2) можно представить в виде

$$\psi(x, y, t) = g_{top}(t)\psi_1(x, y) + g_{bot}(t)\psi_2(x, y), \quad (3)$$

где $\psi_1(x, y)$ – решение задачи

$$\Delta^2 \psi_1 = 0 \text{ в } \Omega, \quad (4)$$

$$\psi_1|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 1 & \text{на } \partial\Omega_1, \\ 0 & \text{на } \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4, \end{cases} \quad (5)$$

а $\psi_2(x, y)$ – решение задачи

$$\Delta^2 \psi_2 = 0 \text{ в } \Omega, \quad (6)$$

$$\psi_2|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 1 & \text{на } \partial\Omega_3, \\ 0 & \text{на } \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4. \end{cases} \quad (7)$$

Решение второй части задачи перемешивания заключается в решении уравнений движения лагранжевой частицы

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial y}, \quad \dot{y}(t) = -\frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial x}, \quad (8)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad (9)$$

и в построении и анализе траекторий движения (точка означает дифференцирование по времени).

2. Метод численного анализа. Для решения задач (4), (5) и (6), (7) воспользуемся методами R -функций [8] и Ритца [6].

Пусть функции $\omega_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3, 4$, таковы, что:

- 1) $\omega_i = 0$ на $\partial\Omega_i$;
- 2) $\omega_i > 0$ в $\Omega \cup (\partial\Omega \setminus \partial\Omega_i)$;
- 3) $\frac{\partial\omega_i}{\partial\mathbf{n}} = -1$ на $\partial\Omega_i$, $\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega_i$ нормаль.

Функции с такими свойствами могут быть построены с помощью R-функций для достаточно широкого класса областей [8].

Можно показать, что структуры решения краевых задач (4), (5) и (6), (7) имеют вид:

$$\psi_i = -\omega g_i + \omega^2 \Phi_i, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

где $\omega = \omega_1 \wedge_0 \omega_2 \wedge_0 \omega_3 \wedge_0 \omega_4$, Φ_1, Φ_2 – неопределенные компоненты структур,

$$g_1 = \frac{\omega_2 \wedge_0 \omega_3 \wedge_0 \omega_4}{\omega_1 + \omega_2 \wedge_0 \omega_3 \wedge_0 \omega_4}, \quad g_2 = \frac{\omega_1 \wedge_0 \omega_2 \wedge_0 \omega_4}{\omega_3 + \omega_1 \wedge_0 \omega_2 \wedge_0 \omega_4}.$$

Здесь $\wedge_0$ – знак R-конъюнкции: $u \wedge_0 v \equiv u + v - \sqrt{u^2 + v^2}$

Для аппроксимации неопределенных компонент в (10) воспользуемся методом Ритца [8].

Итак, решение первой части задачи перемешивания получено.

Решение второй части задачи перемешивания представляет собой решение задачи Коши

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial\psi_N(x, y, t)}{\partial y}, \quad \dot{y}(t) = -\frac{\partial\psi_N(x, y, t)}{\partial x},$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0,$$

любым численным методом, например, методом Рунге-Кутты-Мерсона. Здесь (согласно (3))

$$\psi_N(x, y, t) = g_{top}(t)\psi_{1, N}(x, y) + g_{bot}(t)\psi_{2, N}(x, y)$$

– приближенное по Ритцу решение задачи (1), (2).

3. Результаты компьютерного моделирования. Вычислительный эксперимент проводился для прямоугольной полости $\Omega = (0, a) \times (0, b)$, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью. Боковые стенки полости находятся в состоянии покоя, а верхняя и нижняя движутся попеременно со скоростями $\mathbf{v}_{top}(t)$ и $\mathbf{v}_{bot}(t)$. Изучался квазистационарный режим с перекрытием, когда одна стенка начинает свое движение до того, как его закончила другая. Были исследованы области с различными геометрическими параметрами. Решение второй части задачи перемешивания производилось в рамках подхода Лагранжа (задача (8), (9)) и проводилось в несколько этапов: нахождение и исследование типа стационарных точек, построение фазовых траекторий, исследование эволюции линейного и плоского элементов, помещённых в рассматриваемую область. Уравнения движения частицы интегрировались численно.

Расположение стационарных точек для различных параметров области приведено на рис. 2 (× – седло; • – центр).

Также была исследована эволюция (в течение 10 периодов) линейного элемента (отрезка, образованного четырьмя фиксированными точками, которые

соединены между собой). Отрезок помещался в окрестность точки типа «центр» и типа «седло» при $a = 1$, $b = 3$. Результаты приведены на рис. 3. Анализируя результаты, видно, что при попадании отрезка в окрестность точки типа «центр» через 10 периодов он переместился незначительно от окрестности этой точки. В то же время отрезок, помещённый в окрестность точки типа «седло», значительно изменил своё положение, что свидетельствует о наличии хаоса в окрестности гиперболической точки.

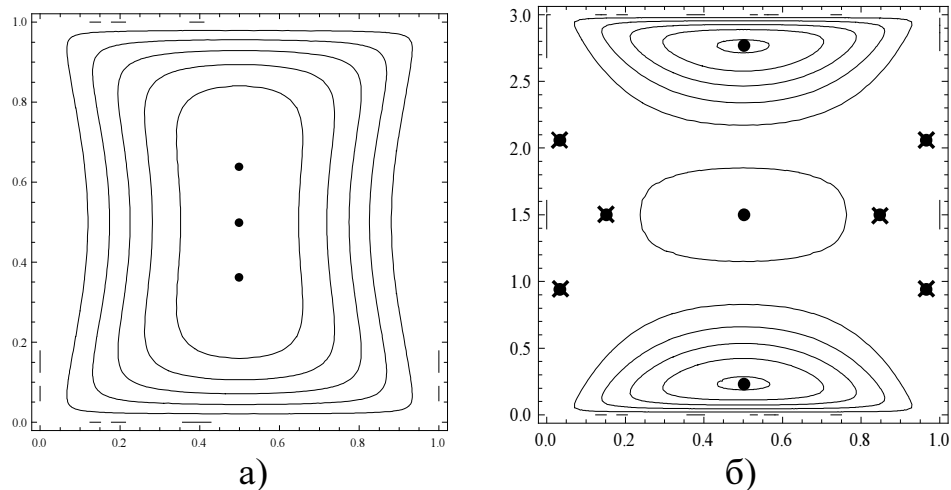


Рис. 2. Стационарные точки для $a = b = 1$ (а) и $a = 1$, $b = 3$ (б)

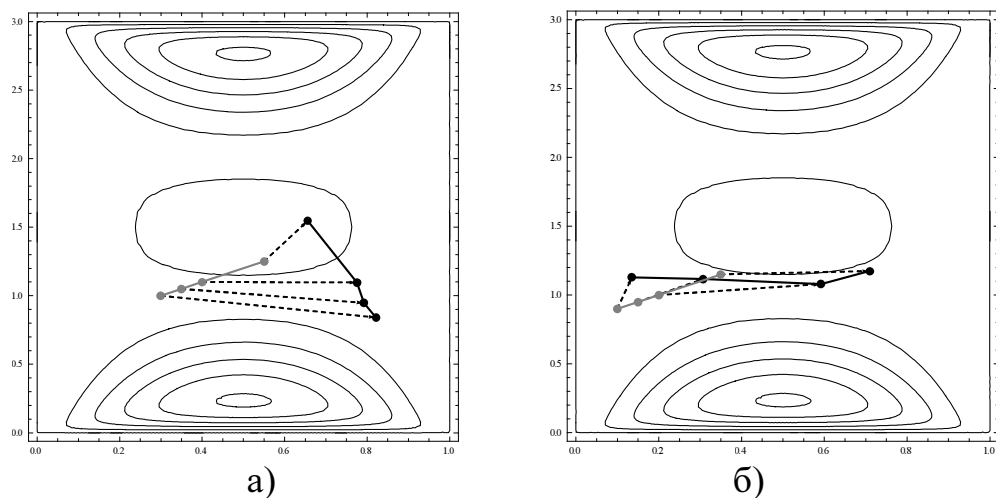


Рис. 3. Эволюция линейного элемента в окрестности стационарной точки типа «центр» (а) и типа «седло» (б)

Аналогичные выводы можно сделать, проследив эволюцию плоского элемента (прямоугольника, заданного девятью точками). Результаты приведены на рис. 5.

Выводы. В работе предложен метод численного анализа задачи перемешивания вязкой смеси, вызванного попеременным движением стенок. При этом, благодаря использованию метода R -функций, выражение для функции тока получается в аналитическом виде, что выделяет наш метод среди остальных методов решения краевых задач. Ещё одним преимуществом предложенного метода является то, что решение может быть получено для достаточно

сложной области, что делает его универсальным. Решение второй части задачи перемешивания позволяет моделировать процесс перемешивания, анализировать его эффективность, основываясь на изучении поведения отдельных частиц. Этим определяет научную новизну и практическую значимость работы.

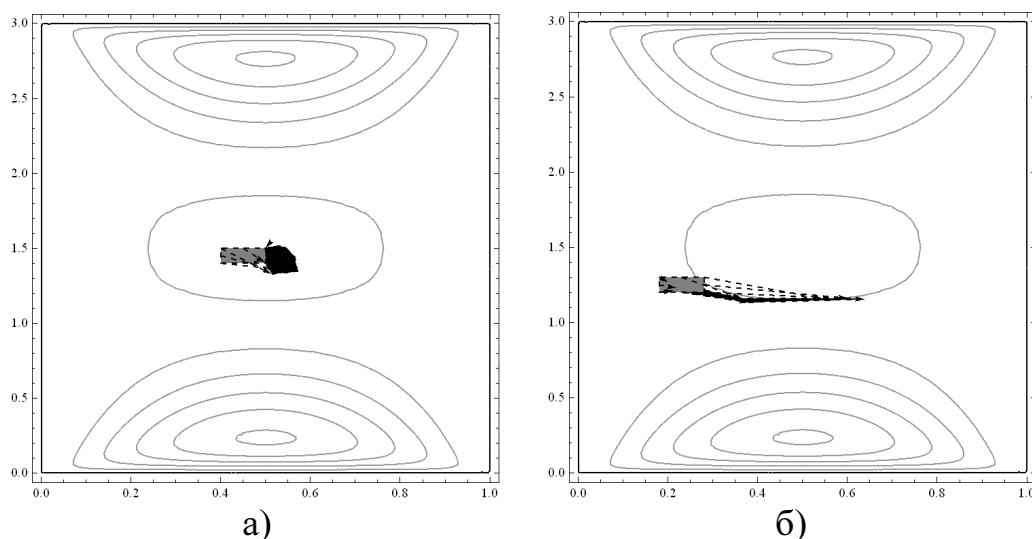


Рис. 5. Эволюция плоского элемента в окрестности стационарной точки типа «центр» (а) и типа «седло» (б)

Библиографический список

1. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 5. – С. 3 – 45.
2. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: методы и приложения. II. Приложения // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 4. – С. 3 – 34.
3. Ареф Х. Развитие хаотической адвекции // Нелинейная динам. – 2006. – Т. 2. – № 1. – С. 111 – 133.
4. Артюх А.В., Гибкина Н.В. Сидоров М.В. Об одном методе математического моделирования некоторых процессов перемешивания с помощью метода R -функций // АСУ и приборы автоматики. – 2008. – Вып. 143. – С. 67 – 73.
5. Мелешко В. В., Краснопольская Т. С. Смешивание вязких жидкостей. // Нелинейная динам. – 2005. – Т. 1. – № 1. – С. 69 – 109.
6. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
7. Оттино Дж. М. Перемешивание жидкостей // В мире науки. – 1989. – № 3. – С. 34 – 44.
8. Рвачев В.Л. Теория R -функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
9. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 320 с.