УДК 621.385.69

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА СЛОЖНОЙ ФОРМЫ С ДВУСЛОЙНЫМ ДИЭЛЕКТРИКОМ

ЗУЕВ Н.Г., ХМЕЛЬ С.И., ЧУМАЧЕНКО С.В.

Предлагается решение электродинамической задачи об электромагнитном поле в цилиндрическом резонаторе, частично заполненном диэлектриком. Приводится дисперсионное уравнение рассматриваемой структуры.

1. Введение

Рассматриваемый в данной работе резонатор является составной частью полицилиндрических резонаторов. Они представляют собой последовательное соединение отрезков цилиндров, которые расположены в середине пустого цилиндрического резонатора. Полицилиндрические резонаторы могут образовывать систему связанных кольцевыми щелями тороидальних и радиальных резонаторов. При этом щели связи создаются торцами дисков и цилиндрическими поверхностями располагаются возле боковых стенок резонатора и внутреннего проводника.

Впервые описание и качественный анализ полицилиндрических резонаторов был сделан в [1]. Было показано, что с помощью методов теории поля можно получить соотношения для расчетов основных параметров резонаторов в зависимости от их геометрических размеров. Анализ этих соотношений показывает, что путем рационального выбора числа элементов и их геометрических размеров габаритные размеры полицилиндрических резонаторов могут быть существенно уменьшены в сравнении с размерами обычных пустых резонаторов для той же длины волны.

Разработки лазерных дальномерных систем, волоконно-оптических линий связи, лазерных локационных систем требуют создания модуляторов лазерных пучков с определенными техническими характеристиками. Электромагнитный резонатор, который рассматривается в данной работе, близок по конструкции с главной составной частью резонансных модуляторов лазерных пучков, которые приведены в [2].

Применение электромагнитных резонаторов сложной структуры описано в [3]. В работах [4,5] приведено дисперсионное уравнение сходного с рассматриваемым резонатора, но без диэлектрика.

2. Постановка и геометрия задачи

Рассмотрим цилиндрический резонатор радиуса b и длины l с коаксиально расположенным настроечным элементом типа «штемпель» [6]. Длина ножки стержня $\Delta l = l - l_2$, его диаметр $2a$, радиус диска d. Расстояние от левой стенки резонатора до диска l_1, до правой стенки диска l_2. Внутренний радиус первого диэлектрического слоя, примыкающего к металлической поверхности резонатора, равен b_1; меньший радиус второго диэлектрического слоя b_2. Слои вплотную прилегают друг к другу и имеют диэлектрические проницаемости ε_1 и ε_2.

Требуется получить дисперсионное уравнение описанной структуры.

3. Решение задачи

Для решения используется метод частичных областей. Объем резонатора разбивается на области более простой формы, для которых известны собственные функции. В основе метода лежит удовлетворение условий непрерывности на поверхности раздела между частичными областями. При использовании метода частичных областей поставленная задача сводится к отысканию решений бесконечной однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Введем цилиндрическую систему координат, начало которой расположено в центре левой боковой стенки резонатора, ось z направлена вправо коаксиально настроечному элементу, а ось r – перпендикулярна к ней. Для применения метода объем внутри резонатора условно разбивается на подобласти, которые задаются следующими интервалами изменения координат:

$$\varepsilon_1:\ 0<z<l,\ b_1<r<b;$$
$$\varepsilon_2:0<z<l,\ b_2<r<b_1;$$
$$0:0<z<l_1,\ a<r<b_2;$$
$$1:0<z<l_1,\ 0<r<d;$$
$$2:l_2<z<l,\ a<r<d.$$

Компоненты электромагнитного поля определяются по формулам [7]:

$$E_z^{(m)}(r,z)=\frac{1}{j\omega}\left(k^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Pi^{(m)}(r,z), \qquad (1)$$

$$E_r^{(m)}(r,z)=\frac{1}{j\omega}\frac{\partial^2\Pi^{(m)}(r,z)}{\partial r\partial z},\ j=\sqrt{-1},\ m=0,1,2; \qquad (2)$$

$$E_z^{(\varepsilon m)}(r,z)=\frac{1}{j\omega\varepsilon_m}\left(k^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Pi^{(\varepsilon m)}(r,z), \qquad (3)$$

$$E_r^{(\varepsilon m)}(r,z)=\frac{1}{j\omega\varepsilon_m}\frac{\partial^2\Pi^{(\varepsilon m)}(r,z)}{\partial r\partial z},\ m=1,2; \qquad (4)$$

$$H_\varphi^{(\varepsilon m)}(r,z)=-\frac{\partial\Pi^{(\varepsilon m)}(r,z)}{\partial r},\ m=1,2; \qquad (5)$$

$$H_\varphi^{(m)}(r,z)=-\frac{\partial\Pi^{(m)}(r,z)}{\partial r},\ m=0,1,2. \qquad (6)$$

Функции $\Pi^{(m)}(r,z)$ являются решениями скалярного уравнения Гельмгольца и для частичных областей резонатора определяются следующим образом:

$$\Pi^{(m)}(r,z)=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{\infty}Z_0^{(0)}(k_{ri}^{(0)}r)\cos(k_{zi}^{(0)}z), m=0,\\ \sum\limits_{i=0}^{\infty}A_i^{(1)}Z_0^{(1)}(k_{ri}^{(1)}r)\cos(k_{zi}^{(1)}z), m=1,\\ \sum\limits_{i=0}^{\infty}A_i^{(2)}Z_0^{(2)}(k_{ri}^{(2)}r)\cos(k_{zi}^{(2)}(z-l_2)), m=2,\end{cases}$$

где $k_{zi}=\dfrac{\pi i}{l}$, $k_{zi}^{(1)}=\dfrac{\pi i}{l_1}$, $k_{zi}^{(2)}=\dfrac{\pi i}{\Delta l}$, $k_{ri}^{(0)}=\sqrt{k^2-(k_{zi})^2}$, (7)

$k_{ri}^{(1)}=\sqrt{k^2-(k_{zi}^{(1)})^2}$, $k_{ri}^{(2)}=\sqrt{k^2-(k_{zi}^{(2)})^2}$, $k=\omega/c$,

ω – круговая частота; $c=3\cdot 10^8$ м/с – скорость света;

$$Z_0^{(0)}(k_{ri}^{(0)}r)=A_i^{(0)}J_0(k_{ri}^{(0)}r)+B_i^{(0)}N_0(k_{ri}^{(0)}r), \quad (7.1)$$

$$Z_0^{(1)}(k_{ri}^{(1)}r)=J_0(k_{ri}^{(1)}r), \quad (7.2)$$

$$Z_0^{(2)}(k_{ri}^{(2)}r)=J_0(k_{ri}^{(2)}r)N_0(k_{ri}^{(2)}a)-J_0(k_{ri}^{(2)}a)N_0(k_{ri}^{(2)}r), \quad (7.3)$$

$A_i^{(0)}$, $B_i^{(0)}$, $A_i^{(1)}$, $A_i^{(2)}$ – амплитудные множители. В областях с диэлектриками функции $\Pi^{(\varepsilon_m)}(r,z)$ записываются в виде:

$$\Pi^{(\varepsilon_m)}(r,z)=$$

$$=\begin{cases}\Pi^{(\varepsilon_1)}(r,z)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}A_i^{(\varepsilon_1)}Z_0^{(\varepsilon_1)}(k_{ri}^{(\varepsilon_1)}r)\cos(k_{zi}z), m=1,\\ \Pi^{(\varepsilon_2)}(r,z)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}Z_0^{(\varepsilon_2)}(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}r)\cos(k_{zi}z), m=2,\end{cases} \quad (8)$$

где $k_{ri}^{(\varepsilon_1)}=\sqrt{k_1^2-(k_{zi})^2}=\sqrt{\varepsilon_1\omega^2-(\pi i/l)^2}$,

$$k_{ri}^{(\varepsilon_2)}=\sqrt{k_2^2-(k_{zi})^2}=\sqrt{\varepsilon_2\omega^2-(\pi i/l)^2},$$

$$Z_0^{(\varepsilon_1)}(k_{ri}^{(\varepsilon_1)}r)=J_0(k_{ri}^{(\varepsilon_1)}r)N_0(k_{ri}^{(\varepsilon_1)}b)-J_0(k_{ri}^{(\varepsilon_1)}b)N_0(k_{ri}^{(\varepsilon_1)}r), \quad (8.1)$$

$$Z_0^{(\varepsilon_2)}(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}r)=A_i^{(\varepsilon_2)}J_0(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}r)+B_i^{(\varepsilon_2)}N_0(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}r), \quad (8.2)$$

$A_i^{(\varepsilon_1)}$, $A_i^{(\varepsilon_2)}$, $B_i^{(\varepsilon_2)}$ – неизвестные коэффициенты. Компоненты электромагнитного поля для каждой частичной области определяются по формулам (1)-(6) с учетом представлений (7), (8) аналогично [8].

На границах раздела частичных областей электрическое и магнитное поля должны быть непрерывны:

$$E_z^{(0)}=\begin{cases}E_z^{(1)}, 0<z<l_1,\ r=d;\\ E_z^{(2)}, l_2<z<l,\ r=d;\\ E_z^{(\varepsilon_2)}, 0<z<l,\ r=b_2;\end{cases} \quad (9)$$

$$E_z^{(\varepsilon_2)}=E_z^{(\varepsilon_1)},\ 0<z<l,\ r=b_1, \quad (10)$$

$$H_\varphi^{(0)}=\begin{cases}H_\varphi^{(1)}, 0<z<l_1,\ r=d;\\ H_\varphi^{(2)}, l_2<z<l,\ r=d;\\ H_\varphi^{(\varepsilon_2)}, 0<z<l,\ r=b_2;\end{cases} \quad (11)$$

$$H_\varphi^{(\varepsilon_2)}=H_\varphi^{(\varepsilon_1)},\ 0<z<l,\ r=b_1. \quad (12)$$

Касательные составляющие вектора электрического поля должны обращаться в нуль на металлической поверхности резонатора:

$$E_z^{(0)}=0,\ l_1<z<l_2,\ r=d. \quad (13)$$

Подчиняя компоненты электромагнитного поля граничным условиям (9)-(13), получаем систему функциональных уравнений:

$$\sum_{i=0}^{\infty}(k_{zi})^2Z_0^{(0)}(k_{ri}^{(0)}d)\cos(k_{zi}z)=$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}A_i^{(1)}(k_{zi}^{(1)})^2Z_0^{(1)}(k_{ri}^{(1)}d)\cos(k_{zi}^{(1)}z),\ 0<z<l_1, \quad (14)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}(k_{zi})^2Z_0^{(0)}(k_{ri}^{(0)}d)\cos(k_{zi}z)=$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}A_i^{(2)}(k_{zi}^{(2)})^2Z_0^{(2)}(k_{ri}^{(2)}d)\cos(k_{zi}^{(2)}(z-l_2)),\ l_2<z<l, \quad (15)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}(k_{zi})^2Z_0^{(0)}(k_{ri}^{(0)}b_2)\cos(k_{zi}z)=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon_2}\sum_{i=0}^{\infty}(k_{zi})^2Z_0^{(\varepsilon_2)}(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}b_2)\cos(k_{zi}z),\ 0<z<l, \quad (16)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}k_{ri}^{(0)}Z_1^{(0)}(k_{ri}^{(0)}d)\cos(k_{zi}z)=$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}A_i^{(1)}k_{ri}^{(1)}Z_1^{(1)}(k_{ri}^{(1)}d)\cos(k_{zi}^{(1)}z),\ 0<z<l_1, \quad (17)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}k_{ri}^{(0)}Z_1^{(0)}(k_{ri}^{(0)}d)\cos(k_{zi}z)=$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}A_i^{(2)}k_{ri}^{(2)}Z_1^{(2)}(k_{ri}^{(2)}d)\cos(k_{zi}^{(2)}(z-l_2)),\ l_2<z<l, \quad (18)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}k_{ri}^{(0)}Z_1^{(0)}(k_{ri}^{(0)}b_2)\cos(k_{zi}z)=$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}k_{ri}^{(\varepsilon_2)}Z_1^{(\varepsilon_2)}(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}b_2)\cos(k_{zi}z),\ 0<z<l, \quad (19)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_2}\sum_{i=0}^{\infty}(k_{zi})^2Z_0^{(\varepsilon_2)}(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}b_1)\cos(k_{zi}z)=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon_1}\sum_{i=0}^{\infty}A_i^{(\varepsilon_1)}(k_{zi})^2Z_0^{(\varepsilon_1)}(k_{ri}^{(\varepsilon_1)}b_1)\cos(k_{zi}z),\ 0<z<l, \quad (20)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}k_{ri}^{(\varepsilon_2)}Z_1^{(\varepsilon_2)}(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}b_1)\cos(k_{zi}z)=$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}A_i^{(\varepsilon_1)}k_{ri}^{(\varepsilon_1)}Z_1^{(\varepsilon_1)}(k_{ri}^{(\varepsilon_1)}b_1)\cos(k_{zi}z),\ 0<z<l. \quad (21)$$

Из системы (14)-(21) находим неизвестные коэффициенты. Из (20), (21) с учетом (8.1), (8.2) получаем:

$$A_i^{(\varepsilon_2)}=\frac{\Phi_1}{\Delta_1}A_i^{(\varepsilon_1)},\ B_i^{(\varepsilon_2)}=-\frac{\Phi_2}{\Delta_1}A_i^{(\varepsilon_1)}, \quad (22)$$

где введены обозначения

$$\Phi_1=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}Z_0^{(\varepsilon_1)}(k_{ri}^{(\varepsilon_1)}b_1)N_1(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}b_1)-$$

$$-\frac{k_{ri}^{(\varepsilon_1)}}{k_{ri}^{(\varepsilon_2)}} Z_1^{(\varepsilon_1)}(k_{ri}^{(\varepsilon_1)}b_1)N_0(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}b_1),$$

$$\Phi_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} Z_0^{(\varepsilon_1)}(k_{ri}^{(\varepsilon_1)}b_1)J_1(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}b_1) -$$

$$-\frac{k_{ri}^{(\varepsilon_1)}}{k_{ri}^{(\varepsilon_2)}} Z_1^{(\varepsilon_1)}(k_{ri}^{(\varepsilon_1)}b_1)J_0(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}b_1),$$

$$\Delta_1 = J_0(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}b_1)N_1(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}b_1) - J_1(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}b_1)N_0(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}b_1).$$

Из (16) и (19) с учетом (7.1) получаем систему уравнений относительно $A_i^{(0)}$, $B_i^{(0)}$, из которой имеем:

$$A_i^{(0)} = \frac{\Phi_3}{\Delta_1 \cdot \Delta_2} A_i^{(\varepsilon_1)},\ B_i^{(0)} = -\frac{\Phi_4}{\Delta_1 \cdot \Delta_2} A_i^{(\varepsilon_1)}. \quad (23)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\Phi_3 = \{\frac{1}{\varepsilon_2} N_1(k_{ri}^{(0)}b_2)[\Phi_1 J_0(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}b_2) - \Phi_2 N_0(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}b_2)] -$$

$$-\frac{k_{ri}^{(\varepsilon_2)}}{k_{ri}^{(0)}} N_0(k_{ri}^{(0)}b_2)[\Phi_1 J_1(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}b_2) - \Phi_2 N_1(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}b_2)]\},$$

$$\Phi_4 = \{\frac{1}{\varepsilon_2} J_1(k_{ri}^{(0)}b_2)[\Phi_1 J_0(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}b_2) - \Phi_2 N_0(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}b_2)] -$$

$$-\frac{k_{ri}^{(\varepsilon_2)}}{k_{ri}^{(0)}} J_0(k_{ri}^{(0)}b_2)[\Phi_1 J_1(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}b_2) - \Phi_2 N_1(k_{ri}^{(\varepsilon_2)}b_2)]\},$$

$$\Delta_2 = J_0(k_{ri}^{(0)}b_2)N_1(k_{ri}^{(0)}b_2) - J_1(k_{ri}^{(0)}b_2)N_0(k_{ri}^{(0)}b_2)$$

Подставим (23) в (7.1), затем из (14), (15), (17), (18) определим выражения для $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$ и систему относительно $A_n^{(\varepsilon_1)}$ соответственно:

$$A_j^{(1)} = \frac{2}{\Delta l\, k_{rj}^{(1)} Z_1^{(1)}(k_{rj}^{(1)}d)} \sum_{k=0}^{\infty} k_{rk}^{(0)} A_k^{(\varepsilon_1)} \Phi_6(d) T_1(k,j),$$

$$A_j^{(2)} = \frac{2}{\Delta l\, k_{rj}^{(2)} Z_1^{(2)}(k_{rj}^{(2)}d)} \sum_{k=0}^{\infty} k_{rk}^{(0)} A_k^{(\varepsilon_1)} \Phi_6(d) T_2(k,j),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \delta_{ij}(k_{zi})^2 A_i^{(\varepsilon_1)} \Phi_5(d) - \quad (24)$$

$$-\frac{2}{l}\sum_{i=0}^{\infty} k_{ri}^{(0)} A_i^{(\varepsilon_1)} \Phi_6(d) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k_{zk}^{(1)})^2 Z_0^{(1)}(k_{rk}^{(1)}d) T_1(k,j) T_1(i,k)}{\Delta l\, k_{rk}^{(1)} Z_1^{(1)}(k_{rk}^{(1)}d)} -$$

$$-\frac{2}{l}\sum_{i=0}^{\infty} k_{ri}^{(0)} A_i^{(\varepsilon_1)} \Phi_6(d) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k_{zk}^{(2)})^2 Z_0^{(2)}(k_{rk}^{(2)}d) T_2(k,j) T_2(i,k)}{\Delta l\, k_{rk}^{(2)} Z_1^{(2)}(k_{rk}^{(2)}d)} = 0,$$

где $\Phi_5(r) = \frac{\Phi_3}{\Delta_1\Delta_2} J_0(k_{rk}^{(0)}r) - \frac{\Phi_4}{\Delta_1\Delta_2} N_0(k_{rk}^{(0)}r)$,

$$\Phi_6(r) = \frac{\Phi_3}{\Delta_1\Delta_2} J_1(k_{rk}^{(0)}r) - \frac{\Phi_4}{\Delta_1\Delta_2} N_1(k_{rk}^{(0)}r),$$

$$T_1(k,j) = \int_0^{l_1} \cos(k_{zj}^{(1)}z)\cos(k_{zk}z)dz,$$

$$T_2(k,j) = \int_{l_2}^{l} \cos(k_{zk}z)\cos(k_{zj}^{(2)}(z - l_2))dz.$$

Условием существования и единственности решения системы уравнений (24) является равенство нулю ее определителя:

$$\det\{\delta_{ij}(k_{zi})^2 \Phi_5(d) -$$

$$-\frac{2}{l} k_{ri}^{(0)} \Phi_6(d) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k_{zk}^{(1)})^2 Z_0^{(1)}(k_{rk}^{(1)}d) T_1(k,j) T_1(i,k)}{\Delta l\, k_{rk}^{(1)} Z_1^{(1)}(k_{rk}^{(1)}d)} - \quad (25)$$

$$-\frac{2}{l} k_{ri}^{(0)} \Phi_6(d) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k_{zk}^{(2)})^2 Z_0^{(2)}(k_{rk}^{(2)}d) T_2(k,j) T_2(i,k)}{\Delta l\, k_{rk}^{(2)} Z_1^{(2)}(k_{rk}^{(2)}d)}\} = 0.$$

4. Выводы

Корни определителя (25) являются собственными частотами рассмотренного цилиндрического резонатора. Ожидается, что введение диэлектрических слоев позволит в известных пределах управлять настроечными кривыми резонатора в зависимости от геометрических размеров диэлектрических вставок и их проницаемостей.

Литература: 1. *Нейман М.С.* Полицилиндрические эндовибраторы // ИЭСТ. 1940. №2. С. 33-38. 2. *Кравченко Н.И., Оробинский А.Н.* Микроволновая модуляция лазерных пучков в электрооптических кристаллах // Зарубежная радиоэлектроника. 1989. №11. С. 60-72. 3. *Чумаченко С.В.* Стационарные колебания и нестационарные электромагнитные поля в цилиндрических резонаторах сложной формы // Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. Харьков, ХТУРЭ. 1999. 195с. 4. *Чумаченко С.В.* Уравнение собственных частот и компоненты поля для резонатора сложной формы // Радиотехника. Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 1998. Вып. 106. С. 150-156. 5. *Чумаченко С.В.* Уравнение собственных частот и добротность цилиндрического резонатора с двумя независимыми элементами настройки // Радиоэлектроника и информатика. 1998. № 2(03). С. 6-8. 6. *Kuhn E.* Untersuchung eines kapazitiv belasteten koaxialen Hohlraumresonators // Archiv Der Elektrischen Ubertragung (A.E.U.). 1968. Band 22, №12. S. 557-566. 7. *Иванов Е.А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584с. 8. *Хмель С.И., Чумаченко С.В.* Дисперсионное уравнение цилиндрического резонатора, перестраиваемого отрезком ребристого цилиндра // Радиоэлектроника и информатика. 2001. № 3(16). С. 24-26.

Поступила в редколлегию 03.10.2002

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Руженцев И.В.

Зуев Николай Григорьевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики ХТУРЭ. Научные интересы: математическая физика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-26.

Хмель Сергей Иванович, соискатель кафедры МИТ ХНУРЭ. Научные интересы: радиофизика и измерительная техника. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 14-08-02.

Чумаченко Светлана Викторовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: математическая физика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-26.