

УСЛОВНЫЕ МАТРИЦЫ И ОПЕРАЦИИ С НИМИ

Р. Т. Волколупова

Харьков

Условная матрица инцидентий A^* получается из обычной умножением элементов строк на соответствующие номера столбцов. A^* полностью отображает геометрию сети, так как она содержит все ненулевые эле-

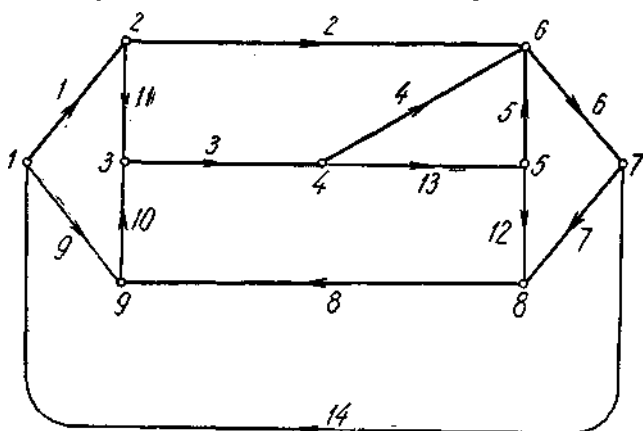


Рис. 1.

менты матрицы инцидентий. Для сети, изображенной на рисунке, условная матрица инцидентий A^* будет иметь вид

$$A^* = \begin{Bmatrix} 14, & -1, & -9 \\ 1, & -11, & -2 \\ 11, & -10, & -3 \\ 3, & -4, & -13 \\ 13, & -5, & -12 \\ 2, & 4, 5, & -6 \\ 6, & -7, & -14 \\ 12, & -7, & -8 \\ 9, & -10, & 8 \end{Bmatrix}$$

На примере такой простой сети видно, что A^* составляет $\sim 20\%$ полной матрицы инцидентий. Чем сложнее сеть, тем больше пустой (в виде нулей) информации содержит полная матрица. В среднем нули занимают 90% всех чисел, составляющих такую матрицу. Уже одно это обстоятельство говорит в пользу условной матрицы A^* . С другой стороны, подготовка математического описания топологии сети в виде условной матрицы инцидентий A^* намного проще и занимает гораздо меньше времени. Если сеть задана некоторым связным графом, необходимо произвольно пронумеровать все его узлы и дуги натуральным рядом чисел (1, 2, ...). Затем, переходя от одного узла к другому, описываем их, т. е.

в одну строку условной матрицы записываются номера дуг, которые входят в узел (со знаком плюс), и номера дуг, которые выходят из узла (со знаком минус).

Условная матрица A^* полностью отвечает тем требованиям, которые поставлены перед математическим описанием топологии сети. Однако для использования такого описания сети при решении задач проветривания необходимо изучить новый математический аппарат и уметь оперировать с ним.

Условная матрица, как и обычная, имеет строки и столбцы, которые тоже условны. Число элементов в разных строках может быть различным. То же самое можно сказать и о столбцах условной матрицы. Для приведенного выше примера условной матрицы A^* первой условной строкой будет $\{14, -1, -9\}$, второй — $\{1, -11, -2\}$ и т. д. Первый условный столбец составляют те значения элементов строк, которые равны ± 1 . Элементы первого условного столбца имеются в первой строке со знаком минус и во второй строке со знаком плюс. Элементы второго условного столбца имеются в тех условных строках, которые содержат ± 2 , это вторая и шестая строки.

Рассмотрим некоторые алгебраические операции с условными матрицами.

Пусть даны две условные матрицы A и B .

$$A = \begin{Bmatrix} -1, & & 4 \\ -1, & 2, & -3 \\ -2 & & \\ 4 & & \end{Bmatrix} \quad B = \begin{Bmatrix} 1 & & \\ -2, & & -4 \\ -3, & & -4 \\ 1, & 2, & 3 \end{Bmatrix}$$

Произведение этих матриц обозначим C . Если i — номер условной строки условных матриц, а k — номер условного столбца, то элемент условной матрицы C как произведение A и B можно вычислить по следующей формуле:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_i \text{sign } j b_j \text{sign } k, \quad (1)$$

где n — порядок условных матриц.

Иначе, элемент условной матрицы C i -ой условной строки и k -го условного столбца равен сумме произведений соответствующих элементов i -ой строки условной матрицы A , имеющей значение j со знаком плюс или минус и j -го условного столбца условной матрицы B , имеющего значение k со знаком плюс или минус. При рассмотрении всех операций с условными матрицами необходимо помнить, что числовое значение элементов условных матриц всегда равно единице, элемент же условной матрицы говорит только об адресе этой единицы условной матрицы в ее эквиваленте полной матрице. Так, элемент в условной матрице A во второй условной строке (-3) говорит о том, что единица со знаком минус в полной матрице располагалась во второй строке, третьем столбце. Например,

$$c_{13} = a_1 \text{sign } 1 b_1 \text{sign } 3 + a_1 \text{sign } 2 b_2 \text{sign } 3 + a_1 \text{sign } 3 b_3 \text{sign } 3 + \\ + a_1 \text{sign } 4 b_4 \text{sign } 3 = -1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = +1.$$

Вся условная матрица C будет иметь вид

$$C = \begin{Bmatrix} 2, & 3 & \\ 1, & -2, & 3 \\ 2, & 4 & \\ 1, & 2, & 3 \end{Bmatrix}$$

Рассмотрим операцию сложения условных матриц. В качестве примера возьмем те же условные матрицы A и B . Тогда элемент условной матрицы $\bar{C}$ как суммы условных матриц A и B можно записать следующим образом:

$$c_{ik} = a_i \operatorname{sign} k + b_i \operatorname{sign} k, \quad (2)$$

т. е. элемент условной матрицы C i -ой условной строки и k -го условного столбца равен сумме соответствующих элементов i -ых строк условных матриц A и B , имеющих значения, равные $\pm k$. Например,

$$c_{11} = a_1 \operatorname{sign} 1 + b_1 \operatorname{sign} 1 = -1 + 1 = 0$$

или

$$\bar{c}_{14} = a_1 \operatorname{sign} 4 + b_1 \operatorname{sign} 4 = +1 + 0 = +1.$$

Вся условная матрица $\bar{C}$ будет иметь вид

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 4 & & \\ -1, & -3, & -4 \\ -2, & -3, & -4 \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}$$

Для реализации некоторых методов необходимо уметь производить комбинированные операции, например, умножение условной матрицы на обычный числовой вектор-столбец. Рассмотрим способ реализации такой операции.

Пусть нам дана, как и прежде, условная матрица A и некоторый вектор-столбец чисел D

$$D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Необходимо найти их произведение $AD = F$. Если i — номер условной строки условной матрицы A и элемента вектор-столбца D , а j — номер условного столбца условной матрицы A , то элементы вектор-столбца F можно вычислить по следующей формуле:

$$f_i = \sum_{j=1}^n a_i \operatorname{sign} j d_j, \quad (3)$$

т. е. i -ый элемент вектор-столбца, полученный в результате умножения условной матрицы на числовой вектор-столбец, будет иметь числовое значение и определяться как сумма произведений всех элементов i -ой строки условной матрицы, имеющих значения $\pm j$, на соответствующие значения вектор-столбца, например,

$$\begin{aligned} f_2 &= a_2 \operatorname{sign} 1 d_1 + a_2 \operatorname{sign} 2 d_2 + a_2 \operatorname{sign} 3 d_3 + a_2 \operatorname{sign} 4 d_4 = \\ &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 - 1 \cdot 7 + 0 \cdot 8 = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} f_4 &= a_4 \operatorname{sign} 1 d_1 + a_4 \operatorname{sign} 2 d_2 + a_4 \operatorname{sign} 3 d_3 + a_4 \operatorname{sign} 4 d_4 = \\ &= 0 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 7 + 1 \cdot 8 = 8. \end{aligned}$$

Весь числовой столбец F будет иметь вид

$$F = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Для примера транспонирования условной матрицы возьмем ту же условную матрицу A . Транспонированием матрицы называется такое преобразование матрицы, при котором ее строки становятся столбцами с тем же самым номером, а столбцы — строками [3]. Транспонированная матрица обозначается штрихом.

Если A' — условная транспонированная матрица, то каждый элемент ее можно определить по формуле

$$a'_i \text{ sign } j = a_j \text{ sign } i, \quad (4)$$

т. е. элемент транспонированной условной матрицы A' i -ой условной строки приобретет значение j , определяющее номер j -ой строки в условной матрице A со знаком элемента этой j -ой строки.

Например, элемент $a'_2 \text{ sign } 3$ будет иметь значение -3 . Вся A' будет следующего вида:

$$A' = \begin{Bmatrix} -1, & 2 \\ 2, & -3 \\ -2, & \\ 1, & 4 \end{Bmatrix}$$

Для решения различных задач проветривания шахт приходится иметь дело с решением системы линейных алгебраических уравнений. Как известно, такая система будет иметь ненулевые решения только тогда, когда определитель этой системы отличен от нуля. Определителем n -го порядка, соответствующего некоторой матрице, называется алгебраическая сумма $n!$ членов, составленная следующим образом: членами служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному в каждой строке и в каждом столбце, причем член берется со знаком плюс, если его индексы составляют четную подстановку, и со знаком минус — в противоположном случае.

Вычисление определителей при непосредственном применении их определений, даже если n не очень большие, весьма затруднительно, а в случае условной матрицы вообще невозможно.

Поэтому были рассмотрены три метода вычисления определителей: приведение определителя к треугольному виду, схема единственного деления Гаусса и сведение определителя высокого порядка к более низкому. Схема единственного деления Гаусса в нашем случае сводится к методу приведения определителя к треугольному виду, так как элементы определителя являются единицами. Данный метод приведения определителя к треугольному виду основан на том принципе, что любой определитель путем элементарных преобразований можно свести к треугольному виду. Тогда значение определителя вычисляется исходя из следующего свойства: если все элементы определителя, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, то определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Рассмотрим на примере метод приведения определителя условной матрицы к треугольному виду. Исходный определитель

$$\begin{array}{cccc} 5, & -6 & & \\ 1, & -3 & & \\ 4, & -5, & -7 & \\ 2, & -3, & -7 & \\ -4, & & & \\ -2 & & & \\ -1 & & & \end{array}$$

Затем проведем последовательное сложение строк: 1) первую сложим с третьей по правилу (2) и запишем на место третьей; 2) 4 строка $\div + 2$ строка $\rightarrow$ 4 новая строка; 3) 5 строка $\div + 3$ строка $\div + 1$ строка $\rightarrow$ 5 строка; 4) 6 строка $\div + 4$ строка $\div + 2$ строка $\rightarrow$ 6 строка; 7) 7 строка $\div + 6$ строка $\div + 4$ строка $\div + 2$ строка $\rightarrow$ 7 строка. При сложении берутся строки исходной условной матрицы. Эти пять элементарных преобразований будут менять условную матрицу в такой последовательности:

$$\begin{array}{lll}
 1) \quad \begin{array}{l} 5, -6 \\ 1, 3 \\ 4, -6, 7 \\ 2, -3, -7 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \end{array} & 2) \quad \begin{array}{l} 5, -6 \\ 1, 3 \\ 4, -6, 7 \\ 1, 2, -7 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \end{array} & 3) \quad \begin{array}{l} 5, -6 \\ 1, 3 \\ 4, -6, -7 \\ 1, 2, 7 \\ -6, 7 \\ -2 \\ -1 \end{array} \\
 4) \quad \begin{array}{l} 5, -6 \\ 1, 3 \\ 4, -6, 7 \\ 1, 2, -7 \\ -6, 7 \\ 1, -7 \\ -1 \end{array} & 5) \quad \begin{array}{l} 5, -6 \\ 1, 3 \\ 4, -6, 7 \\ 1, 2, -7 \\ -6, 7 \\ 1, -7 \\ -7 \end{array} &
 \end{array}$$

Затем поменяем столбцы местами, т. е. перенумеруем их следующим образом: первый назовем шестым, второй — четвертым, третий — вторым, четвертый — третьим, пятый — первым, шестой — пятым, а седьмой останется под тем же номером. Тогда условная матрица 5) примет вид

$$\begin{array}{ll}
 \begin{array}{l} 1, -5 \\ 6, 2 \\ 3, -5, 7 \\ 6, 4, -7 \\ -5, 7 \\ 6, -7 \\ -7 \end{array} & \begin{array}{l} 1, -5 \\ 2, 6 \\ 3, -5, 7 \\ 4, 6, -7 \\ -5, 7 \\ 6, -7 \\ -7 \end{array} \text{ или } \begin{array}{l} 1, -5 \\ 2, 6 \\ 3, -5, 7 \\ 4, 6, -7 \\ -5, 7 \\ 6, -7 \\ -7 \end{array} \text{ — более упорядоченная.}
 \end{array}$$

Последний вид условной матрицы говорит о том, что она треугольная, так как по диагонали имеются все элементы и каждому диагональному элементу нет равного в строках, расположенных ниже, чем он сам.

Значение этого определителя будет равно произведению элементов, стоящих на диагонали. У нас два элемента отрицательных: -5 и -7 ; их произведение будет положительным. Затем мы шесть раз меняли местами столбцы матриц. Каждая перемена меняла знак определителя на противоположный, а в результате он остался неизменным. Таким образом, значение определителя положительное и, если учесть тот факт, что каждый элемент условной матрицы определяет местоположение в полной матрице, то значение определителя равно $+1$.

Для проверки описанного метода была составлена программа вычислительной машине М-20 и найден ряд условных определителей. Эти же определители разворачивались в их полный обычный вид и вычислялись по стандартной программе. Их значения совпадали. Программа вычисления условного определителя после каждого элементарного преобразования анализировала его на присутствие в нем свойств, определяющих значение определителя, равное нулю. Тем самым в случае нулевого зна-

чения определителя это обнаруживалось сразу же, не доводя определитель до треугольного вида.

Метод вычисления определителя путем сведения его к определителю более низкого порядка заключается в следующем. Условный определитель перед каждым преобразованием анализируется. Если есть строка, содержащая один элемент, эта строка вычеркивается, а у всех остальных элементов условного определителя, которые имеют значение по абсолютной величине, большее вычеркнутого, это значение понижается на единицу, а равные вычеркнутому — вообще выбрасываются.

Если строки с одним элементом нет, ищется такой элемент, который по своему абсолютному значению не имел бы равного во всем условном определителе. Тогда строка с таким единственным элементом вычеркивается, а значения других элементов, больших по абсолютной величине бывшего единственного элемента, понижаются на единицу.

Если нет элементов ни первого, ни второго случая, тогда ищем такой элемент, который встречался бы только в двух строках, но имел противоположные знаки. Эти строки складываем и записываем на место одной из слагаемых строк. Тогда в другой из слагаемых строк будет элемент, единственный во всем определителе, что свело его ко второму случаю. Рассмотрим тот же пример, в котором имеет место первый случай.

$$\begin{array}{rcccccc}
 5, & -6 & & 4, & -5 & & 3, & -4 & & 2, & -3 & & 1, & -2 & & 1, & -2 \\
 1, & 3 & & 1, & 3 & & 1, & 2 & -1 & -1, & 3 & -1 \\
 4, & -5, & 7 & -4, & 6, & & -3, & 5 & -2, & 4 & -3 \\
 2, & -3, & -7 & 2, & -3 & -6 & -2, & -5 & -1, & -5 \\
 \hline
 -4 & & & -2 & & & -1 & & & & & \\
 \hline
 -2 & & & -1 & & & & & & & & \\
 \hline
 -1 & & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

Последний определитель второго порядка; значение его легко вычислить, оно равно -1 . Затем проверяется количество перемен знака определителя после каждого преобразования. Так, в первом преобразовании мы вычеркнули пятую строку и четвертый столбец $5 + 4 = 9$ — нечетное число, значит это преобразование изменило знак определителя на противоположный. Последнее преобразование произошло путем вычеркивания третьей строки и третьего столбца $3 + 3 = 6$; оно четное, следовательно, знак определителя не изменился. Подсчитав таким образом все знаки, в результате получаем, что знак определителя изменился на противоположный, а, значит, окончательное значение определителя равно $+1$, как и по предыдущему методу.

Этот метод, как и предыдущий, проверен на вычислительной машине. Оба метода могут быть использованы для исследования систем линейных алгебраических уравнений. Из последнего метода видно, что с таким же успехом можно рассмотреть вычисление миноров условных матриц и обращение условных матриц.

Подводя итог изложенному выше, можно с уверенностью сказать, что математическое описание топологии сети условной матрицей инцидентий позволит разработать методы решения задач проветривания сложных шахт, основываясь на операциях, предложенных для условных матриц.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Берж. Теория графов и ее применение. Изд-во иностр. лит-ры, 1962.
 2. А. А. Волков, А. Г. Евдокимов, Р. Т. Волколупова. Топологический анализ шахтных вентиляционных сетей. «Изв. вузов, Горный журнал», № 1, 1967.
 3. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. Изд-во «Наука», 1965.
-