

Н. Р. ПИВНЕНКО

РАССЕЯНИЕ ОСНОВНОЙ МОДЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВОЛНОВОДА
НА ПРОНИЦАЕМОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВСТАВКЕ

Рассмотрим прямоугольный волновод, направленный вдоль оси z , сечение которого в плоскости $z = 0$ совпадает с областью $0 < x < a$, $0 < y < b$. Стенки волновода — идеально проводящие; внутренность его заполнена однородным изотропным магнитоэлектриком с материальными параметрами ϵ , μ . Поместим в волновод вставку в форме отрезка кругового цилиндра радиуса r и длиной b так, чтобы она расположилась перпендикулярно широким стенкам волновода. Считаем, что ось вращения упомянутого цилиндра совпадает с прямой $x = x_p$; $-\infty < y < +\infty$; $z = 0$, тогда внутренность вставки будет задана условиями $(x - x_p)^2 + z^2 < r^2$; $0 < y < b$. Вставка не пересекает боковых стенок волновода, что предполагает выполнение неравенств $x_p > r$; $x_a < a - r$. Она изготовлена из однородного изотропного магнитоэлектрика с материальными параметрами ϵ_p , μ_p .

Пусть на эту вставку набежит основная мода прямоугольного волновода, y -компонента электрического поля которой характеризуется выражением

$$E_{0y}(\vec{R}) = U_0(x, z) = \sin \kappa_1 x \exp(i\gamma_1 z). \quad (1)$$

Здесь и далее временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен; $\vec{R} = (x, y, z)$; $\kappa_1 = \pi/a$; $\gamma_1 = \sqrt{k^2 - (\pi/a)^2}$; $k = k_0 \sqrt{\epsilon_p \mu_p}$; $k_0 = \omega/c$, c — скорость света в вакууме

Возникает вопрос о расчете поля внутри вставки и вне ее, который и рассматривается в данной работе. Основой анализа служит метод решения аналогичной задачи для идеально проводящей вставки, развитый в работе [1].

В силу специфики задачи электромагнитное поле не зависит от координаты y . Выберем в качестве искомой величины y -компоненту электрического поля $E_y(\vec{R}) \equiv U(x, z)$. Как следует из уравнений Максвелла, функция U подчиняется уравнениям

$$(\Delta_{\perp} + k_p^2)U = 0, \quad (x, z) \in S_p; \quad (2)$$

$$(\Delta_{\perp} + k^2)U = 0, \quad (x, z) \in S_{\text{ext}} \quad (3)$$

соответственно в сечении $S_p = \{(x - x_p)^2 + z^2 < r^2\}$ и во внешней к S_p области $S_{\text{ext}} = \{(x - x_p)^2 + z^2 > r^2, 0 < x < a, -\infty < z < +\infty\}$.

того, она подчиняется условию $u = 0$ при $x = 0, a$ и условиям сопряжения на контуре $L = \{(x - x_p)^2 + z^2 = r^2\}$ поперечного сечения вставки:

$$U_{\text{ext}} = U_p, \quad \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_{\text{ext}} = \frac{1}{\mu_p} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_p. \quad (4)$$

Использованные здесь обозначения имеют следующий смысл: Δ_{\perp} — оператор Лапласа по переменным x, z ; $\partial/\partial n$ — производная по нормали к контуру L ; индексы ext и p сопровождают предельные значения соответствующих величин на контуре L со стороны области S_{ext} или S_p .

Сформулируем интегральные соотношения для поля, вытекающие из поставленной выше задачи. С этой целью введем в рассмотрение функцию Грина $G_0(x, z | x', z')$ как решение уравнения

$$(\Delta_{\perp} + k^2) G_0(x, z | x', z') = \delta(x - x') \delta(z - z') \quad (5)$$

в полосе $0 < x < a, -\infty < z < +\infty$, которое подчиняется граничным условиям $G_0 = 0$ при $x = 0, a$ и условиям излучения при $z \rightarrow +\infty$. Используя стандартные выкладки, из (3), (5) получаем формулу Грина для поля во внешности вставки:

$$U(x, z) = U_0(x, z) + \int_L [-U_{\text{ext}}(x', z') \partial G_0 / \partial n' + G_0(\partial U(x', z') / \partial n')_{\text{ext}}] dl', \quad (x, z) \in S_{\text{ext}}. \quad (6)$$

Здесь и далее $G_e = G_e(x, z | x', z')$; производная $\partial/\partial n$ берется по нормали к L , направленной внутрь S_{ext} ; dl' — элемент длины контура L . Воспользовавшись условиями (4), приведем представление (6) к виду

$$U(x, z) = U_0(x, z) + \int_L \{U_p(x', z') \partial G_0 / \partial n' - (\mu/\mu_p) G_e \times \\ \times [\partial U(x', z') / \partial n']_p\} dl', \quad (x, z) \in S_{\text{ext}}, \quad (7)$$

который содержит предельные значения поля и его нормальной производной на L со стороны области S_p .

Устремим в (7) точку наблюдения из области S_{ext} на контур L . С учетом первого из условий (4) получим соотношение

$$U_p(x_L, z_L) = U_0(x_L, z_L) + \lim_{(x, z) \rightarrow (x_L, z_L)} \int_L \{U_p(x', z') \partial G_0 / \partial n' - \\ - (\mu/\mu_p) [\partial U(x', z') / \partial n']_p G_e\} dl', \quad (x_L, z_L) \in L, \quad (8)$$

которое играет роль нелокального граничного условия к уравнению (2) относительно поля внутри включения. Найдем последнее в явном виде.

Общее решение уравнения (2), ограниченное в каждой точке области S_p , дается выражением

$$U(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n J_n(k_p \rho \exp(in\varphi)) \quad (x, z) \in S_p. \quad (9)$$

Здесь ρ, φ — система полярных координат с центром в точке $x = x_p, z = 0$: $x = x_p + \rho \cos \varphi, z = \rho \sin \varphi$; J_n — функция Бесселя; E_n — неопределенные коэффициенты. Они находятся как решение беско-

нечной системы линейных алгебраических уравнений, получаемой в результате подстановки разложения (9) в граничное условие (8):

$$E_n + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{nm} E_m = F_n; \quad n = 0; \pm 1; \mp 2... \quad (10)$$

Коэффициенты C_{nm} и заданные правые части F_n системы уравнений определены выражениями

$$C_{nm} = -\frac{a}{2\pi} (I_n(k_p r))^{-1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \exp(im\varphi - in\varphi') \times \\ \times \left[I_m(k_p r) \frac{\partial}{\partial \rho'} \Big|_{\rho'=1} G_0(x_p + r \cos \varphi, r \sin \varphi | x_p + \rho' \cos \varphi', \rho' \sin \varphi') - \right. \\ \left. - (\mu/\mu_p) \dot{I}_m(k_p r) G_0(x_p + r \cos \varphi, r \sin \varphi | x_p + \rho' \cos \varphi', \rho' \sin \varphi') \right]; \quad (11)$$

$$F_n = \frac{1}{2\pi} (I_n(k_p r))^{-1} \int_0^{2\pi} d\varphi \exp(-in\varphi) U_0(x_p + r \cos \varphi, r \sin \varphi),$$

где \dot{I}_m — производная по аргументу функции Бесселя. Согласно работе [1] система уравнений (10) поддается численному решению методом редукции.

Считаем, что это решение нам известно. Тогда поле в поперечном сечении вставки будет определяться выражением (9), а вне ее в области S_{ext} — прямой квадратурной формулой (7). Первое слагаемое из правой части цитированной формулы представляет собой набегающую волну, а второе — интегральное слагаемое, описывает поле, рассеянное вставкой.

Заметим, что величины C_{nm} , F_n можно вычислить в явном виде. Воспользуемся выражением для G_0 , найденным методом изображений [1; 2]:

$$4iG_0(x, z | x', z') = H_0^{(1)}(kD_0^-) - H_0^{(1)}(kD_0^+) + \\ + \sum_{q=1}^{+\infty} [H_0^{(1)}(kD_q^-) - H_0^{(1)}(kD_q^+) + H_0^{(1)}(kL_q^-) - H_0^{(1)}(kL_q^+)]; \quad (12)$$

$$D_q^\pm \equiv [(x \pm x' + 2aq)^2 + (z - z')^2]^{1/2};$$

$$L_q^\pm \equiv [(x \pm x' - 2aq)^2 + (z - z')^2]^{1/2},$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода. Тогда итоговое выражение для C_{nm} , полученное с применением теоремы сложения для цилиндрических функций [3], принимает вид

$$C_{nm} = \frac{\pi a}{2i} (I_n(k_p r))^{-1} \left[A_{nm} + I_n(kr) \sum_{q=2}^{+\infty} B_{nm}^{(q)} \right] \quad m; \quad (13)$$

$$\Delta_m = I_m(k_p r) \dot{I}_m(kr) - (\mu/\mu_p) \dot{I}_m(k_p r) I_m(kr); \quad (14)$$

$$A_{nm} = (-1)^m H_{m-n}^{(1)}(2kx_p) I_n(kr) - \delta_{nm} H_m^{(1)}(kr);$$

$$E_{nm}^{(q)} = H_{m-n}^{(1)}(kd_q) - H_{m+n}^{(1)}(kh_q) + (-1)^m [H_{m+n}^{(1)}(kd_q) - H_{m-n}^{(1)}(kh_q^{(\pm)})], \quad (15)$$

где δ_{nm} — символ Кронекера; $d_q = 2aq$, $h_q^{(\pm)} = 2(aq \pm x_p)$.

Представим поле $U_0(x, z)$ в виде суммы двух парциальных плоских волн и разложим каждую из них по цилиндрическим волнам [3]. Воспользовавшись этим результатом в формуле (11), получим итоговое выражение в виде

$$2iF_n = [\chi_1^n \exp(-i\kappa_1 x_p) - \chi_1^{-n} \exp(i\kappa_1 x_p)] (I_n(kr))^{-1}, \quad \chi_1 = (\kappa_1 + i\gamma_1)/k. \quad (16)$$

Примем во внимание выражение для G_0 , найденное методом разделения переменных [1; 2]:

$$G_0(x, z | x', z') = \sum_{n=1}^{+\infty} i \sin \kappa_n x \sin \kappa_n x' \frac{e^{i\gamma_n |z-z'|}}{a\kappa_n} (-1)^n; \\ \kappa_n = \pi n/a, \quad \gamma_n = \sqrt{k^2 - (\pi n/a)^2} \quad (\text{Im } \sqrt{} \geq +0). \quad (17)$$

Подставив его в интегральное соотношение (7), приходим к следующему разложению рассеянного поля $U_{sc} = U - U_0$ по модам волновода:

$$U_{sc}(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \kappa_n x e^{i\gamma_n |z|} R_n^{\pm} \quad (\pm z > r). \quad (18)$$

Амплитудные коэффициенты R_n^{\pm} даются выражением

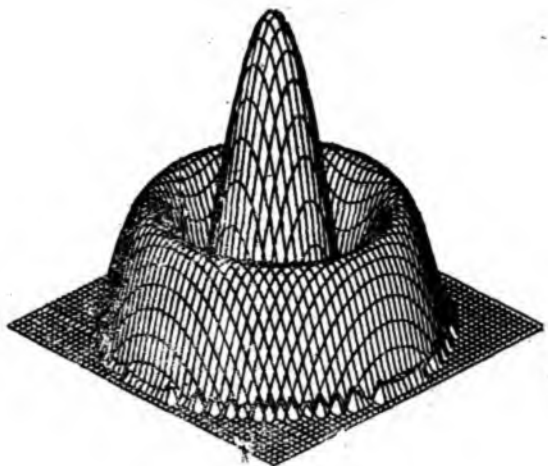
$$R_n^{\pm} = (\pi r/a\kappa_n) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E_m \Delta_m [\chi_n^m \exp(-i\kappa_n x_p) - (\mp 1)^m \chi_n^{-m} \exp(i\kappa_n x_p)], \\ \chi_n = (\kappa_n + i\gamma_1)/k. \quad (19)$$

Приведенные выражения исчерпывающим образом описывают аналитическое решение поставленной задачи. Оно может оказаться полезным при теоретическом исследовании ряда практических проблем СВЧ техники, в частности, при создании СВЧ фильтров.

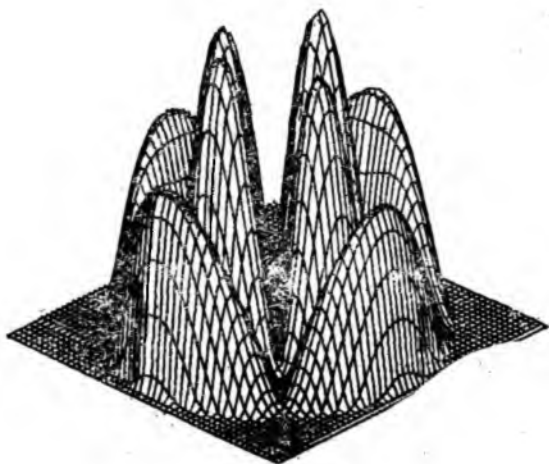
Последнее приложение связано с резонансным характером зависимости амплитудных коэффициентов R_n^{\pm} от частоты при высоких значениях ϵ_p или μ_p . В свою очередь, это обстоятельство вызвано резонансной зависимостью каждого из коэффициентов E_m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) от k_0 . Резонансные частоты определяют спектр собственных колебаний цилиндрической вставки.

Результаты проведенного нами численного эксперимента относятся к решенной выше задаче рассеяния основной моды (1) прямоугольного волновода. Последний полагался полым: $\epsilon = \mu = 1$; считалось также, что размер широкой стенки равен π , цилиндр располагался по середине: $x_p = \pi/2$, радиус его равнялся $r = \pi/10$; $\epsilon_p = 100$, $\mu_p = 1$. Все величины, имеющие размерность длины, измерены одной и той же единицей длины, которая не конкретизируется. Показано, что в окрестности каждой из резонансных частот m -й гармоники внутреннего поля (т. е. величины E_m) последняя становится доминирующей в разложении (9). Низшая резонансная частота собственных колебаний:

для данного азимутального индекса m с ростом m увеличивается. Распределение модуля $|E_y(\rho, \varphi)|$ — единственной отличной от нуля компоненты электрического поля, по поперечному сечению $y = \text{const}$ вставки на резонансной частоте соответствующего типа колебаний приведено на рисунке. Позиция a отвечает резонансу на первой (низшей) резонансной частоте собственного колебания с азимутальным индексом $m = 0$; $k_0 = 1,90$, $n = 1$, позиция b — резонансу на второй резонансной частоте ($n = 2$) колебаний с $m = 2$; $k_0 = 2,70$. Целое число n нумерует резонансные частоты зависимости $E_m = E_m(k_0)$.



a



b

Список литературы: 1. Петленко В. А., Хижняк Н. А. Рассеяние электромагнитных волн идеально проводящими телами в прямоугольном волноводе // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 9. С. 1323—1331. 2. Самарский А. А., Тихонов А. Н. Уравнения математической физики. М., 1971. 273 с. 3. Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З. Основы теории дифракции. М., 1983. 226 с.

Поступила в редколлегию 21.06.89