УДК 519.21 : 004.77

Е.С. ИЕВЛЕВ

О ВЫБОРЕ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ПЕРЕДАЧИ ПАКЕТИРОВАННЫХ ДАННЫХ В КОРПОРАТИВНЫХ КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЯХ

В связи со стремительным развитием компьютерных технологий одной из наиболее актуальных становится задача разработки моделей управления сетевыми процессами. Сложность ее решения состоит в том, что сетевые процессы в современных компьютерных сетях имеют случайных характер. Анализ результатов многочисленных экспериментов по исследованию сетевых процессов показывает, что переход к технологии пакетной коммутации и создание интегрированных информационных приложений сопровождается сложными явлениями, исследование которых может быть проведено в рамках теоретико-вероятностных подходов [1].

Целью данной работы является выбор закона распределения продолжительности передачи пакетированных данных в корпоративных компьютерных сетях (ККС) для построения вероятностных моделей управления сетевыми процессами.

Во всех корпоративных компьютерных сетях, в которых передача данных (пакетов) подвержена влиянию случайных воздействий, принимается, что продолжительность такой передачи является случайной величиной [1]. Предполагается, что случайные величины продолжительности (времени) передачи пакетов подчинены принятому для данной ККС закону распределения, причем его тип принимается одинаковым для всех передач. Что касается параметров распределения, то последние задаются для каждой передачи на основе либо нормативных данных, либо априорных соображений, либо из статистического опыта.

В системах ККП, например, можно задать три параметра: нижняя грань области определения a (оптимистическое время передачи пакета), верхняя грань b (пессимистическое время передачи пакета) и мода распределения m (наиболее вероятное время передачи пакета). Практически для всех систем ККС априорно можно принять, что плотность распределения временных оценок продолжительности передачи пакетов обладает тремя свойствами: непрерывностью, унимодальностью и двумя неотрицательными точками пересечения этой плотности с осью абсцисс. Простейшим распределением с подобными свойствами является бета-распределение. Общий его вид характеризуется, помимо наличия большого количества случайных факторов, каждый из которых в отдельности оказывает незначительное, несущественное влияние, наличием нескольких, также случайных факторов, число которых невелико, а влияние существенно. В результате воздействия существенных факторов распределение вероятностей обычно делается асимметричным. Отсюда вытекает возможность выбора бета-распределения в качестве априорно типового. Анализ статистических данных (хронометражи продолжительности передачи пакетированных данных) также подтверждают возможность использования бета-распределения в качестве априорного.

Формула плотности бета-распределения имеет следующий вид:

$$B(p,q,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{B(p,q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1} & \text{при } 0\le x\le 1,\\ 0 \text{ при } x<0,\ x>1,\end{cases}\qquad (1)$$

где $B(p,q)$ – бета-функция, причем

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{\tilde{A}(p)\tilde{A}(q)}{\tilde{A}(p+q)},$$

а гамма-функция $\tilde{A}(z)$ определяется по формуле

$$\tilde{A}(z)=\int_0^z e^{-t}t^{z-1}dt,$$

причем для целых z функция $\tilde{A}(z)=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(z-1)=(z-1)!$

Вид функции (1) зависит от показателей p и q, причем для $p>2$ (и, соответственно, для $q>2$) функция распределения обращается в 0 в левой (или правой) конечной точке вместе с ее первой производной. Для $1<p<2$ (и, соответственно, $1<q<2$) кривая имеет вертикальную касательную в левой (правой) конечной точке. Для $0<p<1$ (и, соответственно, $0<q<1$) функция уходит в бесконечность, если значения x соответствуют левой (правой) конечной точке, причем вертикальная прямая, проведенная из левой крайней точки, будет ее асимптотой. Для $p\le 0$ (и, соответственно, $q\le 0$) интеграл равен бесконечности, так что функция распределения перестает существовать.

Рассмотрим одно из обоснований целесообразности принятия закона бета-распределения, основанное на построении модели случайной величины времени окончания передачи пакетированных данных в ККП.

Пусть начало передачи пакета T_0, а окончание представляет собой случайную величину, изменяющуюся в интервале (T_1,T_2).

Плотность распределения случайной величины окончания передачи пакета определим, исходя из следующих предположений:

1. Весь интервал времени передачи пакета (T_0,τ) состоит из интервалов, относящихся к передаче, и интервалов, относящихся к задержкам.

2. Длительность времени, равная T_1-T_0, относится к передаче, а длительность $\tau-T_1$ – к задержкам.

3. Отрезок времени T_1-T_0 разбит на n одинаковых частей длительностью $(T_1-T_0)/n$.

Если на первом интервале $\left(T_0,T_0+\dfrac{T_1-T_0}{n}\right)$ возникает задержка, то после момента

$t_1 = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{n}$ передача пакета прекращается, и в последующий интервал времени от t_1 до $t_1' = t_1 + \Delta$, где $\Delta = (T_2 - T_1)/n$, возникшая задержка устраняется и передача снова возобновляется только с момента t_1'. Если на интервале (T_0, t_1) не возникает задержек, то после t_1 передача пакета продолжается. Затем учитывается возможность затруднений на следующем этапе передачи $\left(t_1', t_1' + \frac{T_1 - T_0}{n}\right)$ в первом случае и (t_1, t_2), где $t_2 = t_1 + \frac{T_1 - T_0}{n}$ – во втором и т.д. Очевидно, что если на каждом этапе задержек не возникает, то передача пакета закончится в T_1, а если задержки возникают на каждом этапе, то передача пакета окончится в момент T_2. Если в общей сложности возникает m задержек, то передача пакета закончится в момент $\tau = T + m\Delta = T_1 + m\frac{T_2 - T_1}{n}$.

4. Событие, заключающееся в том, что на i -м этапе возникла задержка, определяется i -й выборкой из некоторой генеральной совокупности.

5. Единичный элемент генеральной совокупности содержит долю p «благоприятствуя задержкам».

6. С каждым этапом генеральная совокупность увеличивается на ϑ, причем, если на предыдущем этапе возникли задержки, то ϑ благоприятствовало им и не благоприятствовало в противном случае. Если через A_i^k обозначить событие, заключающееся в том, что на $(i+1)$ -м этапе возникла задержка при условии, что на предыдущих i этапах возникло k задержек, то вероятность события A_i^k будет иметь вид [2]:

$$P(A_i^k) = \frac{p + k\vartheta}{1 + i\vartheta} \quad (1 \le k \le i \le n).$$

7. Разность вероятностей задержек на i -м этапе при наличии $k+1$ и k задержек на предыдущих этапах относится к вероятности задержек на i -м этапе при полном их отсутствии на предыдущих. Эта разность описывается соотношением

$$\frac{P(A_i^{k-1}) - P(A_i^k)}{P(A_i^0)} = \frac{\vartheta}{p}.$$

Из этой формулы видно, что рассматривается такой закон задержек, для которого относительная их величина постоянна. При этом можно показать, что распределение вероятностей для случайной величины m имеет вид:

$$P_{m,n} = C_n^m \frac{\prod_{i=0}^{m-1}(p + i\upsilon)\prod_{i=0}^{n-m-1}(1 - p + i\upsilon)}{\prod_{i=1}^{n-1}(p + i\upsilon)} \quad (1 \le k \le i \le n). \tag{2}$$

Отметим, что отсутствие зависимости вероятности задержек от предыдущего этапа является частным случаем ($\upsilon = 0$) написанного выражения для $p_{m,n}$ и представляет собой известное биномиальное распределение. Далее находится предельное выражение для вероятности $p_{m,n}$ при условии, что n неограниченно возрастает. Из формулы (2) получим

$$\frac{p_{m-1,n}}{p_{m,n}} = \frac{n - m}{m + 1} \cdot \frac{p + m\upsilon}{1 - p + (n - m - 1)}, \tag{3}$$

откуда, обозначив $\frac{p}{\upsilon} = \alpha$, $\frac{p}{\upsilon}\left(\frac{1}{p} - 1\right) = \beta$, будем иметь

$$\frac{p_{m-1,n} - p_{m,n}}{p_{m,n}} = \frac{(\alpha - 1)n + (2 - \alpha - \beta)m - \beta + 1}{(m+1)(\beta + n - m - 1)} = \frac{(\alpha - 1) + (2 - \alpha - \beta)\frac{m}{n} + \frac{1 - \beta}{n}}{n\frac{m}{n}(1 + \frac{m+1}{n} + \frac{\beta}{n})}.$$

Полагая $\frac{m}{n} = x$, $\frac{m+1}{n} = x + \Delta x$, $p_{m,n} = y$, $p_{m+1,n} = y + \Delta y$, устремляя $n \to \infty$ или $\Delta x \to 0$ и интегрируя получаем $y = Cx^{n-1}(1-x)^{\beta-1}$, откуда видно, что плотность вероятности случайной величины $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n}$, выражается формулой

$$P_{\xi}(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{n-1}(1-x)^{\beta-1},$$

в которой $B(\alpha,\beta)$ – функция Эклера, совподающая с (1).

Следовательно, ξ является случайной величиной, распределенной по закону бета-распределения (1). Замена переменных $x = (t-\alpha)^{\alpha-1}(b-\alpha)$ приводит к известной формуле бета-распределения с плотностью

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^{\alpha-\beta-1} B(\alpha,\beta)} (t-a)^{\alpha-1}(b-t)^{\beta-1} & \text{при } a \le t \le b, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, в данной статье обоснован выбор бета-распределения в качестве априорно-типового для описания продолжительности передачи пакетированных данных в корпоративных компьютерных сетях.

Список литературы: 1. *Городецкий А.Я., Заборовский В.С.* Фрактальные процессы в компьютерных сетях: Учебное пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2000. 102 с.. **2**. *Голенко Д.И.* Моделирование и статистический анализ псевдослучайных величин на электронных вычислительных машинах. М.: Наука,1965. 228 с.

Поступила в редколлегию 12.12.2012

Иевлев Евгений Сергеевич, аспирант кафедры программной инженерии ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Леніна, 14, тел.: (057) 7021-640, e-mail: lmd@kture.kharkov.ua.