Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Кафедра прикладной математики

Колосова С.В., Ламтюгова С.Н., Сидоров М.В.

ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ К РЕШЕНИЮ ВНЕШНИХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ

Радиоэлектроника и информатика. – 2012. – № 3 (58). – С. 13 – 17.

УДК 517.9 : 532.5

ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ К РЕШЕНИЮ ВНЕШНИХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ

КОЛОСОВА С.В., ЛАМТЮГОВА С.Н., СИДОРОВ М.В.

(Системы и процессы управления)

Рассматривается применение методов R-функций, последовательных приближений и Галеркина-Петрова к расчету осесимметричных стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости (обтекание конечных тел вращения).

Введение

Актуальность исследования. Многие явления, наблюдаемые в атмосфере и океане, а также проблемы гидроаэродинамики, теплоэнергетики, химической кинетики, биомедицины можно изучать в рамках модели несжимаемой вязкой жидкости. Задачи, представляющие практический интерес, как правило, описываются уравнениями Навье–Стокса [1 – 3], существенной особенностью которых является нелинейность, а также наличие малого параметра при старшей производной (величина обратная числу Рейнольдса). Кроме того, задачи для уравнений Навье-Стокса часто приходится решать в областях сложной геометрии, в т.ч. область может быть и бесконечной (задачи обтекания тел, течения жидкости в трубах и пр.). В большинстве случаев при численном решении задач обтекания условия на бесконечности сносятся на некоторый контур, расположенный достаточно далеко от обтекаемого тела, что приводит к чрезмерным затратам ресурсов ЭВМ.

Существует множество подходов к расчету вязких течений. В основном эти подходы используют метод конечных разностей и метод конечных элементов [4 – 12]. Эти методы просты в реализации, но не обладают необходимым свойством универсальности – при переходе к новой области (особенно неклассической геометрии) необходимо генерировать новую сетку, а часто и заменять сложные участки границы простыми, составленными, например, из отрезков прямых. Точно учесть геометрию области, а также краевые условия (в т.ч. и условие на бесконечности), можно, воспользовавшись конструктивным аппаратом теории R-функций акад. НАН Украины В.Л. Рвачева [13]. Метод R-функций в задачах гидродинамики использовался в работах [14 – 18], но рассматривались задачи расчета течений идеальной жидкости [14], или же вязкой в ограниченных областях [15 – 17] или при наличии винтовой симметрии [18].

Задачи внешнего обтекания тел вязкой жидкостью с использованием метода R-функций не рассматривались, хотя они составляют важный класс прикладных задач. Поэтому разработка новых, а также совершенствование существующих методов математического моделирования внешних стационарных задач динамики вязкой несжимаемой жидкости методом R-функций является актуальной научной проблемой.

Цели и задачи исследования. Целью данной работы является создание современного и эффективного метода математического моделирования стационарных задач обтекания тел вращения. В данной работе не обсуждается степень строгости, условия применимости использованных уравнений движения жидкости, они рассматриваются как математические модели, подлежащие численной алгоритмизации. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи: на основании методов теории R-функций построить полную структуру решения краевой задачи для функции тока; заменить исходную нелинейную задачу последовательностью линейных краевых задач; для решения линейных задач на каждом шаге итерационного процесса разработать численный алгоритм на основании метода Галеркина-Петрова.

1. Постановка задачи

Рассмотрим стационарное обтекание тела вращения потоком вязкой несжимаемой жидкости. Будем считать, что в пространстве введена декартова система координат (x, y, z), а обтекаемое тело образовано вращением вокруг оси Oz фигуры Ω, лежащей в плоскости Oxz (фигура Ω односвязная, конечная и симметричная относительно оси Oz). Кроме того, предположим, что поток жидкости равномерный, его скорость равна U_∞ и он сонаправлен с осью Oz. Такие течения удобно рассматривать в сферической системе координат (r, θ, φ):

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$

$$z = r\cos\theta,$$

$$0 \le r < +\infty,\quad 0 \le \theta \le \pi,\quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Стационарные уравнения Навье-Стокса в сферической системе координат имеют вид [3]:

$$v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} +$$
$$+\nu\left(\Delta v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} - \frac{2v_\theta\,\mathrm{ctg}\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right),$$

$$v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2\mathrm{ctg}\theta}{r} =$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \nu\left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} -\right.$$
$$\left. - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right), \qquad (1)$$

$$v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi\,\mathrm{ctg}\theta}{r} =$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \nu\left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2\sin^2\theta} +\right.$$

$$\left.\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\sin\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r v_\theta\sin\theta\right)+\frac{\partial\left(r v_\varphi\right)}{\partial\varphi}=0\,.$$

Здесь v_r, v_θ, v_φ – радиальная, угловая и осевая компоненты скорости жидкости соответственно, p – давление, ν – кинематический коэффициент вязкости, ρ – плотность жидкости,

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,.$$

Совокупность уравнений (1) представляет собой систему нелинейных уравнений в частных производных относительно неизвестных функций v_r, v_θ, v_φ, p. В виду сложности системы (1) ее прямой численный анализ затруднен.

В сделанных выше предположениях относительно обтекаемого тела осевая компонента скорости v_φ равна нулю, v_r, v_θ и p являются функциями только от r и θ, а уравнение неразрывности (четвертое уравнение в (1)) интегрируется введением функции тока ψ по формулам

$$v_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,,\ v_\theta=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\,. \tag{2}$$

Исключая из оставшихся двух первых уравнений перекрестным дифференцированием давление, для функции тока $\psi=\psi(r,\theta)$ получим нелинейное уравнение четвертого порядка [19]

$$\nu E^2\psi=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial E\psi}{\partial r}-\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial E\psi}{\partial\theta}\right)+$$
$$+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(2\,\mathrm{ctg}\theta\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)E\psi\ \text{ вне }\ \bar{\Omega}\,, \tag{3}$$

где $E\psi=\dfrac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\dfrac{\sin\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)$, $E^2\psi=E\left(E\psi\right)$.

Уравнение (3) следует дополнить условиями на $\partial\Omega$ и на бесконечности (при $r\to\infty$).

Если граница обтекаемого тела неподвижна и непроницаема, то из условий прилипания следуют такие краевые условия:

$$\psi\big|_{\partial\Omega}=0\,,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega}=0\,, \tag{4}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Условие на бесконечности имеет вид

$$\psi\sim\frac{1}{2}U_\infty r^2\sin^2\theta\ \text{ при }\ r\to\infty \tag{5}$$

и означает, что при неограниченном удалении от обтекаемого тела поток становится равномерным.

Соответствующая (3) - (5) линейная задача (приближение Стокса) была рассмотрена в [20].

Итак, для расчета течения около рассматриваемого тела вращения нужно решить краевую задачу (3) – (5).

2. Построение структуры решения

Для решения задачи (3) – (5) воспользуемся методом R-функций: с помощью конструктивных средств теории R-функций построим структуру решения краевой задачи (3) – (5), т.е. пучок функций, точно удовлетворяющий краевым условиям на $\partial\Omega$ и условию при $r\to\infty$.

Пусть вне $\bar{\Omega}$ известна достаточно гладкая функция $\omega(r,\theta)$, обладающая следующими свойствами:

1) $\omega(r,\theta)>0$ вне $\bar{\Omega}$;

2) $\omega(r,\theta)=0$ на $\partial\Omega$;

3) $\dfrac{\partial\omega(r,\theta)}{\partial\mathbf{n}}=-1$ на $\partial\Omega$,

где $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Для областей произвольной формы, ограниченных кусочно-гладким контуром, такая функция ω может быть построена в виде единого аналитического выражения благодаря использованию R-функций [13].

Введем в рассмотрение достаточно гладкую функцию $y=f_M(x)$ [21], удовлетворяющую следующим требованиям:

а) $f_M(0)=0$;

б) $f_M'(0)=1$;

в) $f_M'(x)\ge 0\ \ \forall x\ge 0$;

г) $f_M(x)\equiv 1\ \ \forall x\ge M\ \ (M=\mathrm{const}>0)$.

Условиям а) – г) удовлетворяет, например, функция

$$f_M(x)=\begin{cases}1-\exp\dfrac{Mx}{x-M}, & 0\le x<M;\\ 1, & x\ge M.\end{cases}$$

Кроме того, очевидно, что такая $f_M(x)\in C^\infty[0,+\infty)$.

Обозначим

$$\omega_M(r,\theta)=f_M[\omega(r,\theta)]\,. \tag{6}$$

Легко проверить, что функция $\omega_M(r,\theta)$ удовлетворяет условиям 1) – 3). Кроме того,

$$\omega_M(r,\theta)\equiv 1\,,\ \text{если}\ \omega(r,\theta)\ge M\,.$$

Заметим, что это условие означает, что если функция $\omega(r,\theta)$ монотонно возрастает при удалении от $\partial\Omega$, то функция $\omega_M(r,\theta)$ вида (6) отлична от единицы лишь в некоторой кольцеобразной области

$$\left\{0\le\omega(r,\theta)<M\right\},$$

которая содержится во внешности $\bar{\Omega}$ и прилегает к $\partial\Omega$.

Известно [19], что уравнение (3) имеет частное решение вида

$$\psi=\psi(r,\theta)=\left(c_1r^2+c_2r^{-1}\right)\sin^2\theta\,,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные, причем такая ψ удовлетворяет и уравнению $E\psi=0$. Тогда функция

$$\psi_0 = \psi_0(r,\theta) = \omega_M^2(r,\theta)\frac{1}{2}U_\infty r^2 \sin^2\theta \qquad (7)$$

удовлетворяет краевым условиям (4) и условию (5). Кроме того, на функции ψ_0 вида (7) в области $\{\omega(r,\theta) \ge M\}$ уравнение (3) обращается в тождество.

Из сказанного выше следует теорема.

Теорема 1. При любом выборе достаточно гладких функций Φ_1 и Φ_2 ($\Phi_1 \to 0$ при $r \to +\infty$) краевым условиям (4) и условию на бесконечности (5) удовлетворяет пучок функций

$$\psi = \psi_0 + \omega_M^2\Phi_1 + \omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2\,, \qquad (8)$$

где функция ψ_0 имеет вид (7).

Таким образом, формула (8) задает структуру решения краевой задачи (3) – (5).

3. Построение итерационного процесса

Обозначим нелинейный оператор в правой части уравнения (3) буквой B:

$$B\psi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial E\psi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial E\psi}{\partial\theta}\right) +$$

$$+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(2\,\mathrm{ctg}\theta\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)E\psi\,.$$

В задаче (3) – (5) сделаем замену

$$\psi = \psi_0 + u\,,$$

где u – новая неизвестная функция, а ψ_0 – функция вида (7).

Тогда для функции u получим краевую задачу с однородными краевыми условиями

$$\nu E^2 u = B(\psi_0 + u) - \nu E^2\psi_0 \text{ вне } \bar{\Omega}\,, \qquad (9)$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0\,,\ \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0\,, \qquad (10)$$

$$\lim_{r\to+\infty} u = 0\,. \qquad (11)$$

Заметим, что в силу свойств функции ψ_0 вида (7), в области $\{\omega(r,\theta) \ge M\}$ имеем

$$E^2\psi_0 = 0\,,$$

$$B(\psi_0 + u) = Bu + U_\infty\cos\theta\frac{\partial Eu}{\partial r} - U_\infty\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial Eu}{\partial\theta}\,.$$

Для решения задачи (9) – (11) воспользуемся методом последовательных приближений. Пусть начальное приближение $u^{(0)}$ задано. Например, можно взять $u^{(0)} = 0$.

Если k-е приближение $u^{(k)}$ построено, то новое $(k+1)$-е приближение $u^{(k+1)}$ находим как решение линейной задачи

$$\nu E^2 u^{(k+1)} = B(\psi_0 + u^{(k)}) - \nu E^2\psi_0 \text{ вне } \bar{\Omega}\,, \qquad (12)$$

$$u^{(k+1)}\big|_{\partial\Omega} = 0\,,\ \left.\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0\,, \qquad (13)$$

$$\lim_{r\to+\infty} u^{(k+1)} = 0\,. \qquad (14)$$

В соответствии с теоремой 1 структура решения задачи (12) – (14) имеет вид

$$u^{(k+1)} = \omega_M^2\Phi_1^{(k+1)} + \omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2^{(k+1)}\,.$$

Для аппроксимации неопределенных компонент $\Phi_1^{(k+1)}$, $\Phi_2^{(k+1)}$ воспользуемся методом Галеркина-Петрова.

Известно [22, 23], что общее решение уравнения $E^2\psi = 0$ при отсутствии в физической постановке сингулярностей может быть записано в виде

$$\psi(r,\theta) = \sum_{n=2}^{\infty}\Big(A_n r^n + B_n r^{1-n} + C_n r^{n+2} +$$

$$+ D_n r^{3-n}\Big)J_n(\cos\theta)\,, \qquad (15)$$

где A_n, B_n, C_n, D_n – произвольные постоянные, $J_n(\zeta)$ – функции Гегенбауэра первого рода. Представлением (15) воспользуемся для выбора координатных последовательностей.

Для аппроксимации неопределенной компоненты $\Phi_1^{(k+1)}$ воспользуемся функциями системы

$$\Big\{r^{-1}J_2(\cos\theta), r^{-1}J_4(\cos\theta), r^{-2}J_3(\cos\theta), r^{-2}J_5(\cos\theta), \ldots,$$

$$r^{-n}J_{n+1}(\cos\theta), r^{-n}J_{n+3}(\cos\theta), \ldots\Big\}, \qquad (16)$$

а для аппроксимации неопределенной компоненты $\Phi_2^{(k+1)}$ воспользуемся функциями системы

$$\Big\{J_3(\cos\theta), r J_2(\cos\theta), r^2 J_2(\cos\theta), r^4 J_2(\cos\theta), r^3 J_3(\cos\theta),$$

$$r^5 J_3(\cos\theta), \ldots, r^n J_n(\cos\theta), r^{n+2}J_n(\cos\theta), \ldots\Big\}. \qquad (17)$$

Итак, функции $\Phi_1^{(k+1)}$ и $\Phi_2^{(k+1)}$ представим в виде

$$\Phi_1^{(k+1)} \approx \Phi_{1,m_1}^{(k+1)} = \sum_{n=1}^{m_1}\alpha_n^{(k+1)}\tau_n\,,$$

$$\Phi_2^{(k+1)} \approx \Phi_{2,m_2}^{(k+1)} = \sum_{n=1}^{m_2}\alpha_{n+m_1}^{(k+1)}\tau_{n+m_1}\,,$$

где $\tau_1, \ldots, \tau_{m_1}$ – первые m_1 функций системы (16), а $\tau_{m_1+1}, \ldots, \tau_{m_1+m_2}$ – первые m_2 функций системы (17).

Тогда

$$u^{(k+1)} \approx u_N^{(k+1)} = \sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{(k+1)}\varphi_n\,, \qquad (18)$$

где $N = m_1 + m_2$,

$$\varphi_1 = \omega_M^2\tau_1,\ \ldots,\ \varphi_{m_1} = \omega_M^2\tau_{m_1}\,,$$

$$\varphi_{m_1+1} = \omega_M^2(1-\omega_M)\tau_{m_1+1}\,, \ldots,$$

$$\varphi_N = \omega_M^2(1-\omega_M)\tau_{m_1+m_2}\,.$$

Таким образом, построенные функции φ_n образуют координатную последовательность.

Обозначим

$$F = B(\psi_0 + u^{(k)}) - \nu E^2 \psi_0 . \qquad (19)$$

При подстановке $u_N^{(k+1)}$ из (18) в уравнение (12) получим невязку

$$R_N = \nu E^2 u_N^{(k+1)} - F = \nu \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{(k+1)} E^2 \varphi_n - F . \qquad (20)$$

Изучим поведение невязки R_N (20) и функции F (19) в области $\{\omega(r,\theta) \ge M\}$. Заметим, что в этой области

$$u^{(k+1)} = \Phi_1^{(k+1)} \approx \sum_{n=1}^{m_1} \alpha_n^{(k+1)} \tau_n ,$$

$$u^{(k)} = \Phi_1^{(k)} \approx \sum_{n=1}^{m_1} \alpha_n^{(k)} \tau_n .$$

Поскольку функции τ_n – частные решения уравнения $E^2 u = 0$, то $E^2 u_N^{(k+1)} = 0$ в области $\{\omega(r,\theta) \ge M\}$. Функция F в этой области имеет вид

$$F = Bu^{(k)} + U_\infty \cos\theta \frac{\partial E u^{(k)}}{\partial r} - U_\infty \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial E u^{(k)}}{\partial \theta}$$

и допускает оценку

$$F = O\left(\frac{1}{r^4}\right) \text{ при } r \to +\infty .$$

Таким образом, в области $\{\omega(r,\theta) \ge M\}$ невязку можно сделать сколь угодно малой за счет подходящего выбора M.

Для нахождения коэффициентов $\alpha_1^{(k+1)}, ..., \alpha_N^{(k+1)}$ воспользуемся методом Галеркина-Петрова [24], взяв в качестве проекционной систему функций $\{f_i\}$, где $f_i = \omega_M^2 \tau_i$. Тогда $\alpha_1^{(k+1)}, ..., \alpha_N^{(k+1)}$ найдем из условия ортогональности невязки R_N (20) элементам $f_1, ..., f_N$ проекционной последовательности:

$$(R_N, f_i) = 0 , \; i = \overline{1, N} , \qquad (21)$$

причем в силу сделанных выше замечаний интегрирование в (21) при вычислении скалярных произведений можно производить только по конечной области $\{0 \le \omega(r,\theta) < M\}$.

Подставляя (20) в (21) получим, что $\alpha_1^{(k+1)}, ..., \alpha_N^{(k+1)}$ – это решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_N^{(k+1)} \left(\nu E^2 \varphi_n , f_i\right) = (F, f_i) , \;\; i = 1, 2, ..., N . (22)$$

Решив систему (22), получим новое приближение $u^{(k+1)}$. Итерации следует прекратить, когда $\left\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\right\| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – малое число.

Предварительные результаты работы были доложены на Пятнадцатой Всеукраинской (Десятой международной) студенческой научной конференции по прикладной математике и информатике СНКПМИ-2012 [25].

Выводы

В работе впервые разработан численный метод расчета внешних течений вязкой несжимаемой жидкости, основанный на совместном применении методов последовательных приближений, R-функций и Галеркина-Петрова. Разработанный метод отличается от известных методов универсальностью (алгоритм не изменяется при изменении геометрии области) и тем, что структура решения точно учитывает как краевые условия на границе обтекаемого тела, так и условие на бесконечности. Предложенный метод позволяет проводить математическое моделирование разных физико-механических и биологических внешних течений. Сказанное выше и определяет *научную новизну* и *практическую значимость* полученных результатов.

Литература: **1.** *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: РХД, 2003. Т. 1. 452 с.; Т. 2. 452 с. **2.** *Ландау Л.Ф., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2003. 736 с. **3.** *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с. **4.** *Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 1. 384 с.; Т. 2. 392 с. **5.** *Гущин В.А., Матюшин П.В.* Математическое моделирование пространственных течений несжимаемой жидкости // Мат. моделирование. 2006. 18, № 5. С. 5–20. **6.** *Приходько А. А., Редчиц Д. А.* Численное моделирование нестационарного течения в следе за цилиндром на основе уравнений Навье-Стокса // Прикладна гідромеханіка. 2005. 7 (79), № 1. С. 56–71. **7.** *Рябенький В.С., Торгашов В.А.* Безытерационный способ решения неявной разностной схемы для уравнений Навье-Стокса в переменных: завихренность и функция тока // Мат. моделирование. 1996. 8, № 10. С. 100–112. **8.** *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с. **9.** *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991. Т.1. 504 с; Т. 2. 552 с. **10.** *Chung T. J.* Computational fluid dynamics. UK: CUP, 2002. 1012 p. **11.** *Liu J.-G., Wienan E.* Simple Finite Element Method in vorticity formulation for incompressible flow // Math. of Computation. 2003. 10, № 2. P. 1130 – 1145. **12.** *Pozrikidis C.* Fluid dynamics: theory, computation, and numerical simulation. USA: Kluwer academic publishers, 2001. 557 p. **13.** *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. **14.** *Колосова С.В.* Применение проекционных методов и метода R-функций к решению краевых задач в бесконечных областях. Дисс. … к.ф.-м.н.: 01.01.07 Вычислительная математика. Харьков: ХИРЭ, 1972. 85 с. **15.** *Колосова С.В., Сидоров М.В.* Применение метода R–функций к расчету плоских течений вязкой жидкости // Вісн. ХНУ. Сер. Прикл. матем. і мех. 2003. № 602. С. 61 – 67. **16.** *Суворова И.Г.* Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы // Вестн. НТУ ХПИ. Харьков, 2004. № 31. С. 141 – 148. **17.** *Тевяшев А.Д., Гибкина Н.В., Сидоров М.В.* Об одном подходе к математическому моделированию плоских стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях // Радиоэлектроника и информатика. 2007. № 2. С. 50–57. **18.** *Максименко-Шейко К.В.* Математическое моделирование теплообмена при движении жидкости по каналам с винтовым типом симметрии методом R-функций // Доп.

НАН України. 2005. № 9. С. 41 – 46. **19.** *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 432 с. **20.** *Колосова С.В., Ламтюгова С.М., Сидоров М.В.* Про один метод розв'язання зовнішніх задач гідродинаміки в'язкої рідини у наближенні Стокса // Тринадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука: Матеріали конференції. Т. 2. К.: НТУУ, 2010. С. 150. **21.** *Стрельченко А.Й., Колосова С.В., Рвачов В.Л.* Про один метод розв'язування крайових задач // Доп. АН УРСР, сер. А. № 9. 1972. С. 837 – 839. **22.** *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 576 с. **23.** *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. – 630 с. **24.** *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 420 с. **25.** *Ламтюгова С.М.* Застосування методів послідовних наближень та R-функцій до розрахунку зовнішніх вісесиметричних в'язких течій // П'ятнадцята всеукраїнська (десята міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики СНКПМІ-2012: Тези доповідей. Львів: ЛНУ, 2012. С. 229 – 231.

Поступила в редколлегию 00.00.0000

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Колосов А.И.

Колосова Светлана Васильевна, канд. физ.-мат. наук, проф. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы математической физики. Увлечения и хобби: театр, искусство и литература. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

Ламтюгова Светлана Николаевна, аспирант каф. прикладной математики ХНУРЭ, ассистент каф. высшей математики ХНАГХ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, математическая физика, теория R-функций и её приложения. Увлечения и хобби: искусство и литература. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

Сидоров Максим Викторович, канд. физ.-мат. наук, доц. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, математическая физика, теория R-функций и её приложения, стохастический анализ и его приложения. Увлечения и хобби: всемирная история, история искусств. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.