

**МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ  
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ  
ТОРСАТРОНА «УРАГАН-2М»**

---

Рассматриваются модели, методы и алгоритмы трехмерного моделирования винтовой обмотки торсатрона «Ураган-2М». Обосновывается применение метода кинематического моделирования как наиболее приемлемого для получения твердотельной и поверхностной моделей элементов магнитной системы. Описывается метод конечно-элементного анализа для расчетов напряженно-деформированного состояния магнитной системы торсатрона.

**1. Введение**

Тороидальная магнитная система стеллараторного типа «Ураган-2М» («У-2М») является сложным техническим объектом, предназначенным для удержания высокотемпературной плазмы специально созданным магнитным полем. Данная система относится к типу магнитных ловушек – торсатронов, характерной особенностью которых является однонаправленное движение токов по проводникам полюсов винтовой обмотки (ВО) [1]. Экспериментальные исследования магнитной конфигурации торсатрона обозначили ряд задач, решение которых зависит от расчетов напряженно-деформированного состояния элементов магнитной системы. К таким задачам относятся: определение экстремальных значений токов в проводниках полюсов ВО, при которых происходят деформации, приводящие к существенным возмущениям в магнитной конфигурации физической установки; расчет абсолютных значений усилий, порождающих такие деформации; определение напряжений в элементах магнитной системы, при которых они достигают предела текучести. Разработанные компьютерные программы позволяют в приемлемые сроки осуществить расчеты напряжений и деформаций, возникающих в элементах магнитной системы ВО под воздействием пондеромоторных сил. Основой таких расчетов является трехмерная геометрическая модель магнитной системы «У-2М», построенная с использованием разработанных математических моделей, методов и технологий. К ним относятся: объектно-ориентированный анализ для разбиения торсатрона на подсистемы и связи между ними; методы аналитической геометрии и вычислительной математики для получения геометрических моделей объектов сложной пространственной формы – полюсов ВО; метод конечно-элементного анализа для построения объемной и поверхностной моделей ВО. Для успешного использования перечисленных методов необходимо учитывать особенности конструкции «У-2М», которые непосредственно определяют систему ограничений на управляемые параметры.

**2. Постановка и особенности задачи**

Магнитная система торсатрона состоит из ряда обмоток, наиболее сложной из которых является ВО. Она характеризуется как объект сложной пространственной формы и больших габаритных размеров. ВО «У-2М» двухзаходная, обеспечивающая четыре периода магнитного поля. Это означает, что в секторе, ограниченном прямым углом, который составлен из меридиональных сечений тора, геометрия ВО однозначно определена (рис. 1). Количество проводников в полюсе ВО – двадцать. Сечение проводника имеет трапециевидальную форму с размерами  $20 \times 24 \times 100$  мм. Геометрические характеристики ВО задаются набором меридиональных сечений тора через каждые  $0,5^\circ$  при обходе вокруг главной оси тора. В состав магнитной системы торсатрона входит еще ряд плоских кольцевых обмоток, плоскости которых расположены перпендикулярно к главной оси тора.

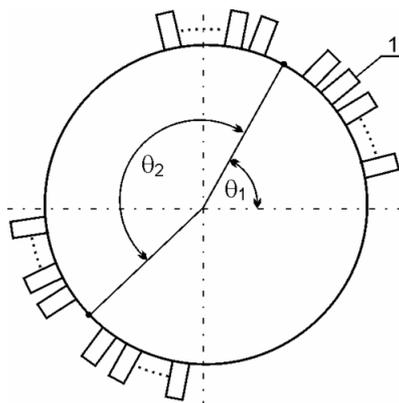


Рис. 1. Меридиональное сечение полюсов ВО «У-2М»: 1 – проводник в полюсе ВО;  $\theta_1$  и  $\theta_2$  – углы расположения центра полюса

### 3. Методы геометрического моделирования ВО «У-2М»

Для получения математической модели геометрии ВО торсатрона «У-2М» использован кинематический метод моделирования [2,3]. Этот метод наиболее полно соответствует действиям разработчиков при параметрическом синтезе проектных решений. Суть метода заключается в том, что формообразование поверхности полюсов магнитных обмоток торсатрона образуется при движении в пространстве плоской кривой, форма которой в процессе движения либо изменяется по известному правилу, либо остается неизменной. Таким образом, для задания кинематической поверхности ВО необходимо задать семейство плоских кривых и закон изменения плоской кривой в пространстве.

Пусть  $\psi_i(V)$  – семейство плоских кривых, зависящее от параметра  $U$  и принадлежащее фиксированной плоскости  $R_0^2$ .  $T_i : R_0^2 \rightarrow R^3$  – семейство отображения этой плоскости в пространстве. В этом случае поверхность полюса ВО задается композицией отображений

$$\psi(U, V) = T_i \psi_i(V),$$

где  $U, V$  – криволинейные координаты поверхности.

Для конкретного случая изготовления ВО торсатрона «У-2М» контур плоских кривых задает поверхность в виде набора сечений. В таком случае поверхность ВО «У-2М» представлена как движущаяся в пространстве изменяющаяся кривая, поочередно принимающая форму меридиональных сечений. При этом между сечениями поверхность интерполируется линейными отрезками, соединяющими характерные точки элементов конструкции на соседних сечениях.

Таким образом, поверхность полюсов ВО «У-2М» может быть представлена в виде сетки (растр), состоящей из элементов – образующих и отрезков, соединяющих соседние образующие вершины проводников полюсов магнитных обмоток. При таком представлении моделируемой поверхности координаты вершин раstra однозначно определены в выбранной системе координат. При необходимости определения координат точек на моделируемой поверхности, находящихся вне вершин раstra, используются сплайны Безье [4].

Для восстановления поверхности по Безье в каждой ячейке раstra ВО необходимо к имеющимся четырем точкам раstra добавить еще двенадцать точек, чтобы в каждой ячейке оказалось шестнадцать опорных узлов. По этим шестнадцати узлам строится аппроксимирующая поверхность Безье для ячейки. Преимущество кинематического способа задания поверхности по сравнению с другими методами, использующими затягивание корсета поверхности, созданного образующими и направляющими, заключается в том, что в таком случае для описания поверхности сложной формы (в нашем случае поверхности ВО) требуется значительно меньшее количество промежуточных сечений благодаря дополнительным возможностям управления плоскостью сечения. При этом метод учитывает множество факторов, необходимых в процессе проектирования, в частности, простоту описания, затраты на хранение и редактирование, эффективность представления для конкретной ВО, этапы технологического оснащения, интуитивные представления разработчиков и т.д.

#### 4. Метод конечно-элементного анализа для расчета НДС торсатрона «У-2М»

Метод конечных элементов (МКЭ) [5,6] занимает лидирующее положение при решении задач механики твердого тела благодаря возможности моделирования широкого круга объектов и явлений. Популярными альтернативными методами – метод конечных разностей и метод граничных элементов (граничных интегральных уравнений) сейчас занимают достаточно узкие ниши, ограниченные исследовательскими или специальными задачами.

В основе МКЭ при построении геометрии магнитной системы «У-2М» лежит дискретизация объема ВО для решения уравнений механики сплошной среды в предположении, что соотношения выполняются в пределах каждой из элементарных областей. Такие элементы соответствуют реальной части пространства ВО (рис. 2, 3, 4).

Обозначения на рис. 2-4:  $\xi, \varphi, \eta$  – локальная система координат элемента;  $X, Y, Z$  – глобальная система координат ВО;  $u, v, w$  – перемещения в локальной системе координат для оболочечного элемента;  $\theta_\xi, \theta_\varphi, \theta_\eta$  – углы поворота относительно локальных осей в узле и в глобальной системе координат  $U, V, W$ .

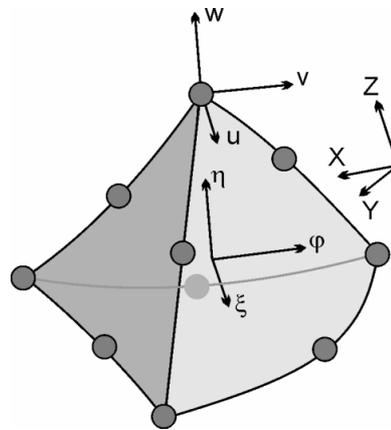
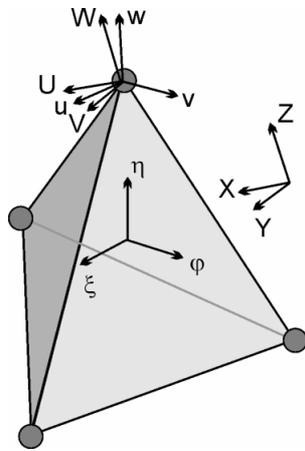


Рис. 2. Объемный линейный конечный элемент    Рис. 3. Объемный параболический конечный элемент

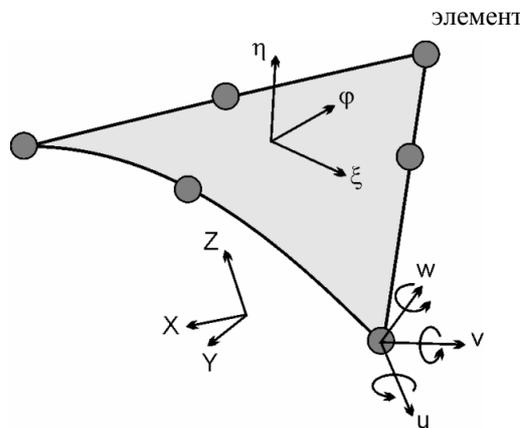


Рис. 4. Параболический конечный элемент поверхности

В пределах КЭ ВО назначены свойства объекта – характеристики жесткости и прочности материала (медные проводники полюсов ВО) и описываются поля интересующих величин – перемещений, деформаций и напряжений. Перемещения, деформации и напряжения назначаются в узлах элемента, а затем вводятся интерполирующие функции, при помощи которых соответствующие значения можно вычислить в любой точке внутри элемента ВО или на его границе. Математическое описание элемента сводится к тому, чтобы связать действующие в узлах факторы: перемещения и усилия. Такая последовательность действий при описании возникающих в магнитной системе «У-2М» перемещений и усилий последовательно реализуется.

Задача решается методом прямого поиска в предположении линейной постановки:

1. Поле перемещений  $\Delta$  в пределах элемента ВО (для объемной задачи  $\Delta = [u, v, w]^T$ ) посредством интерполяционных функций, собранных в матрицу  $[N]$ , выражается через угловые перемещения  $\{\Delta\}$ . Применение интерполяционных функций обеспечивает получение значений перемещений в любой точке элемента ВО в зависимости от координат и величин перемещений в узлах. В матричном виде соотношения выглядят так:

$$\Delta = N \cdot \{\Delta\},$$

где  $\{\Delta\} = [u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots, u_k, v_k, w_k]^T$  – для объемной задачи моделирования полюсов ВО торсатрона «У-2М»;  $k$  – число узлов конечного элемента.

2. Поле деформаций  $\varepsilon$  выражается через степень свободы  $\{\Delta\}$  посредством деформирования поля перемещений согласно соотношениям, собранным в матрицу  $[D]$  и связывающим деформации с перемещениями ВО:

$$\varepsilon = [D] \cdot \{\Delta\}.$$

3. С учетом уравнений состояния, в основе которых лежит закон Гука и коэффициенты которых образуют матрицу  $[E]$ , устанавливается связь сначала между полем напряжений и полем деформаций

$$\sigma = [E] \cdot \varepsilon,$$

а затем между состояниями свободы в узлах КЭ, на которые разбит объем полюсов магнитной обмотки торсатрона

$$\sigma = [E] \cdot [D] \cdot \{\Delta\}.$$

4. Формируются выражения для сил  $\{F\}$ , действующих в вершинах элемента, в зависимости от поля напряжений  $\sigma$ , для чего используется матрица преобразования напряжений в узловые силы  $[A]$ :

$$\{F\} = [A] \cdot \{\sigma\}.$$

5. Связываются выражения для узловых сил и перемещений в узлах ВО торсатрона

$$\{F\} = [k] \cdot \{\Delta\},$$

где  $[k] = [A] \cdot [E] \cdot [D]$  – матрица жесткости конечного элемента.

6. Для придания матрице  $[k]$  свойства симметрии заменяем матрицу преобразования жесткости матрицей, трансформированной к матрице преобразования перемещений в деформации  $[D]$ . Тогда

$$[k] = [D]^T \cdot [E] \cdot [D].$$

Приведенные зависимости позволяют, зная перемещения в узлах ВО, получить величины сил, а также решить обратную задачу – по силам найти перемещения. Прямая формулировка используется для получения матриц жесткости КЭ, а также для описания процесса теплообмена в проводниках ВО торсатрона «У-2М».

Для получения матриц жесткости пространственных элементов полюсов ВО используются вариационные принципы, в частности, принцип минимума потенциальной энергии. Полученная таким образом матрица жесткости вычисляется по соотношению

$$[k] = \left[ \int_V [D]^T [E] [D] dx dy dz \right].$$

Проблема интегрирования по объему тела сложной формы либо в случае оболочного элемента – по криволинейным поверхностям решается за счет того, что выражения записываются в локальной системе координат, связанной с элементом  $\xi, \eta, \zeta$ , причем координаты изменяются в интервале  $[-1, +1]$ . В этом случае выражения для элементарного объема полюса ВО приобретает вид

$$dx dy dz = |J| d\xi d\varphi d\eta,$$

где  $|J|$  – определитель матрицы Якоби, тогда

$$[k] = \begin{bmatrix} +1+1+1 \\ \int \int \int [D]^T [E] [D] \det[J] d\xi d\varphi d\eta \\ -1-1-1 \end{bmatrix}.$$

Аналитический расчет интегралов в выражении для матрицы жесткости невозможен даже для треугольных КЭ с криволинейными сторонами. Поэтому используют численное интегрирование. Его суть заключается в том, что интегрирование заменено суммированием произведений подынтегральных выражений, вычисленных в определенной системе точек. Этот процесс сопровождается расчетом величины определителя якобиана. Отрицательная величина является следствием вырожденности данного конечного элемента.

Примеры используемых конечных элементов при моделировании объема и поверхности полюсов ВО приведены на рис. 2-4: объемный тетраэдрический с линейным полем перемещений в пределах ограничиваемой им области; объемный тетраэдрический с параболическим полем перемещений; треугольный элемент оболочки с параболическим полем перемещений.

Методом кинематического моделирования, подробно изложенным в статье, получены трехмерные модели геометрии магнитной системы – винтовых обмоток торсатрона «У-2М». Результаты расчета и моделирования приведены на рис. 5 и 6.

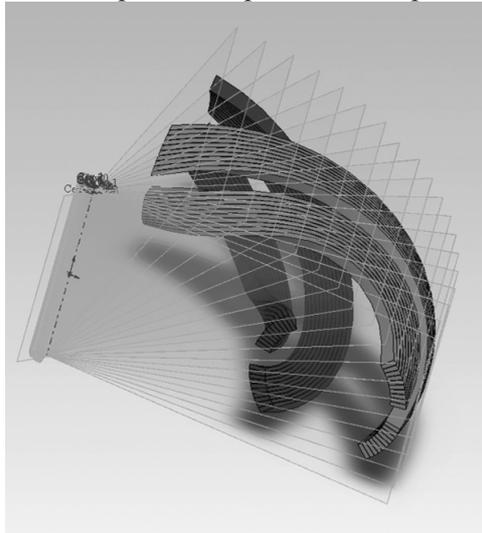


Рис. 5. Трехмерная модель ВО на одном периоде поля



Рис. 6. Трехмерная модель ВО «У-2М» с различных точек наблюдения

## 5. Выводы

Представлены математические модели, методы и алгоритмы трехмерного моделирования винтовой обмотки торсатрона «У-2М». В качестве базового метода геометрического моделирования обосновано применение метода кинематического моделирования как метода, в полной мере соответствующего действиям разработчиков тороидальных магнитных систем, предназначенных для решения задач управляемого термоядерного синтеза. Для получения трехмерной модели ВО в качестве рисующей кривой использован набор меридиональных сечений ВО, расположенных на торе, с последующим образованием растра и восстановлением координат на моделируемой поверхности с применением сплайна Безье.

Разработаны математические модели для решения задач расчета напряженно-деформированного состояния ВО «У-2М» методом конечно-элементного анализа.

**Список литературы:** 1. Волков Е.Д., Супруненко В.А., Шишкин А.А. Стелларатор. Киев: Наук. думка, 1983. 310 с. 2. Воробьева В.П., Мартынов С.А., Слабостицкая Е.А., Хажмурадов М.А. Разработка математической модели для автоматизированного проектирования геометрии винтовых обмоток магнитных систем // АСУ и приборы автоматики. 1999. Вып. 109. С. 101-107. 3. Воробьева В.П., Мартынов С.А., Слабостицкая Е.А., Рудаков В.А., Хажмурадов М.А. Моделирование на ПЭВМ поверхностей винтовых обмоток магнитных систем // АСУ и приборы автоматики. 2001. Вып. 115. С. 5-9. 4. Воробьева В.П., Круголь М.С., Мартынов С.А., Усков В.В., Хажмурадов М.А. Моделирование поверхностей сложной пространственной формы стеллараторных магнитных ловушек // АСУ и приборы автоматики. 2002. Вып. 119. С. 7-9. 5. Черненко В.М. Имитационное моделирование. М.: Высш. шк., 1990. 6. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984.

*Поступила в редколлегию 21.06.2009*

**Мартынов Сергей Алексеевич**, канд. техн. наук, младший научный сотрудник Национального Научного Центра Харьковский Физико-технический институт (ННЦ ХФТИ). Научные интересы: автоматизированное проектирование сложных систем. Адрес: Украина, 61108, Харьков, ул. Академическая, 1, (057)335-65-94. e-mail: khazhm@kipt.kharkov.ua

**Воробьева Вера Павловна**, ведущий инженер-программист Национального Научного Центра Харьковский Физико-технический институт (ННЦ ХФТИ). Научные интересы: математическое моделирование физических процессов, программирование. Адрес: Украина, 61108, Харьков, ул. Академическая, 1, (057)335-65-94. e-mail: khazhm@kipt.kharkov.ua

**Круголь Михаил Савельевич**, начальник группы Национального Научного Центра Харьковский Физико-технический институт (ННЦ ХФТИ). Научные интересы: разработка автоматизированного проектирования технических и программных средств для сложных систем. Адрес: Украина, 61108, Харьков, ул. Академическая, 1, (057)335-65-94. e-mail: khazhm@kipt.kharkov.ua

**Юркин Анатолий Юрьевич**, ведущий инженер-электроник Национального Научного Центра Харьковский Физико-технический институт (ННЦ ХФТИ). Научные интересы: разработка автоматизированного проектирования технических и программных средств для сложных систем. Адрес: Украина, 61108, Харьков, ул. Академическая, 1, (057)335-65-94. e-mail: khazhm@kipt.kharkov.ua

**Хажмурадов Манап Ахмадович**, д-р техн. наук, профессор, начальник отдела Национального Научного Центра Харьковский Физико-технический институт. Научные интересы: математическое моделирование физических процессов и систем, автоматизация проектирования, программирование. Адрес: Украина, 61108, Харьков, ул. Академическая, 1, тел. (057)335-68-46. e-mail: khazhm@kipt.kharkov.ua