

НОМОГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ ДЛЯ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Л. А. Срибнер

Одесса

Развитие технической кибернетики приводит к автоматизации все более сложных процессов, повышению требований к качеству их регулирования, а следовательно, к усложнению законов регулирования, к широкому использованию вычислительных устройств в автоматических системах [6]. При этом требования к вычислительным устройствам все время повышаются, в частности, возрастают требования к функциональным устройствам.

Рассматриваемый вопрос о воспроизведении функции нескольких независимых переменных в вычислительных устройствах непрерывного действия представляет значительные трудности. Эти трудности еще усугубляются, если зависимая переменная (т. е. переменная, которую необходимо воспроизвести) не может быть явно выражена из определяющей ее аналитической зависимости (функционального уравнения).

В настоящее время разработаны методы воспроизведения функций одной и двух независимых переменных [1, 2, 5, 6]. Для воспроизведения функции более двух независимых переменных обычно рекомендуют применять схемы, представляющие собой комбинации функциональных устройств одной или двух независимых переменных, однако общих методов синтеза таких схем не приводят [2].

Из общих методов решения этой задачи известен метод разложения функции в ряд, каждый член которого представляет собой функцию только одного независимого переменного [8].

Однако устройства, выполненные по этому методу, получаются сравнительно сложными. Поэтому возникает задача синтеза функциональных устройств для воспроизведения функций нескольких переменных из функциональных устройств одного переменного, т. е. задача представления функций нескольких переменных через функции одной переменной. Необходимо отметить, что с аналогичной задачей встретилась номография. В ней эта задача была решена для широкого класса уравнений с тремя неизвестными, два из которых принимаются за независимые, а одно за зависимую переменную [3].

Номография развилась как теория построения специальных чертежей, служащих для нахождения без вычислений значений одного из переменных по известным значениям остальных переменных, связанных функциональной зависимостью. Однако современная номография имеет тенденцию к превращению в общую теорию номографических приборов. Из работ в этом направлении следует в первую очередь отметить работы французских номографов Оканя (D'Ocagne), Маргулиса (W. Margoulis) и советского номографа Г. С. Хованского [4, 7].

Таким образом, номография решает те же задачи, что и вычислительная техника, однако в номографии используются только геометрические модели аналитических зависимостей. Номографические методы могут быть успешно использованы не только для построения геометрических, но также и электронных, электромеханических, механических и других моделей.

В настоящее время в связи с развитием вычислительной техники возникла потребность в расширении содержания номографии, в создании более общих номографических методов, пригодных для синтеза различных вычислительных устройств.

В данной работе рассматриваются методы синтеза функциональных устройств для воспроизведения произвольных функций нескольких переменных, включая и те случаи, когда определяемые функции не могут быть явно выражены из функциональных уравнений, причем используется ряд результатов, полученных в номографии.

При этом предполагается, что рассматриваемые функциональные уравнения могут быть приведены к системе уравнений, состоящей из алгебраической суммы произведений однозначных монотонно изменяющихся гладких функций (однозначных монотонных функций, всюду имеющих непрерывную производную), т. е. рассматриваются только так называемые номографические уравнения.

Будем рассматривать схемы не только электронных моделирующих вычислительных устройств, но и схемы различных счетно-решающих устройств, под которыми понимают механические или электромеханические машины непрерывного действия [1, 5].

В связи с этим рассмотрим вначале элементарные функциональные блоки, из которых может быть синтезирована схема вычислительного устройства, независимо от их технической реализации.

Блок функционального преобразования (рис. 1, а) при подаче на его вход величины x преобразует ее в величину $f(x)$. Если входная и выходная величины есть электрические, то этот блок может быть выполнен электромеханическим в виде следящей системы, перемещающей движок функционального сопротивления, включенного на входе операционного усилителя [1]. В подобном же случае блок может быть выполнен с цифровым управляемым сопротивлением ЦУС на входе операционного усилителя. Здесь ЦУС управляется через кодирующее устройство (например, диодную матрицу) от генератора импульсов, который при помощи вспомогательных ЦУС, производит компенсацию входного напряжения [5]. Во многих случаях могут быть применены функциональные устройства других типов. Если входная и выходная величины являются механическими перемещениями, то блок выполняется в виде функционального кулачка. При ручном вводе входной величины блок представляет собой функциональную шкалу.

Блок постоянного коэффициента (рис. 1, б) применяется только с суммирующим блоком. Значение постоянного коэффициента a равно коэффициенту, на который делится слагаемое, поданное на суммирующий блок. Будем считать, что значение коэффициента a может быть как положительным, так и отрицательным. Техническая реализация такого блока настолько известна, что не требует никаких пояснений.

Блок функционального коэффициента (рис. 1, в) может включаться взамен блока постоянного коэффициента. Значение коэффициента φ рассматриваемого блока является функцией одного из переменных z .

В случае электрических (электронных) вычислительных устройств этот блок выполняется в виде функционального сопротивления или ЦУС. Управление этим сопротивлением производится следящей системой или

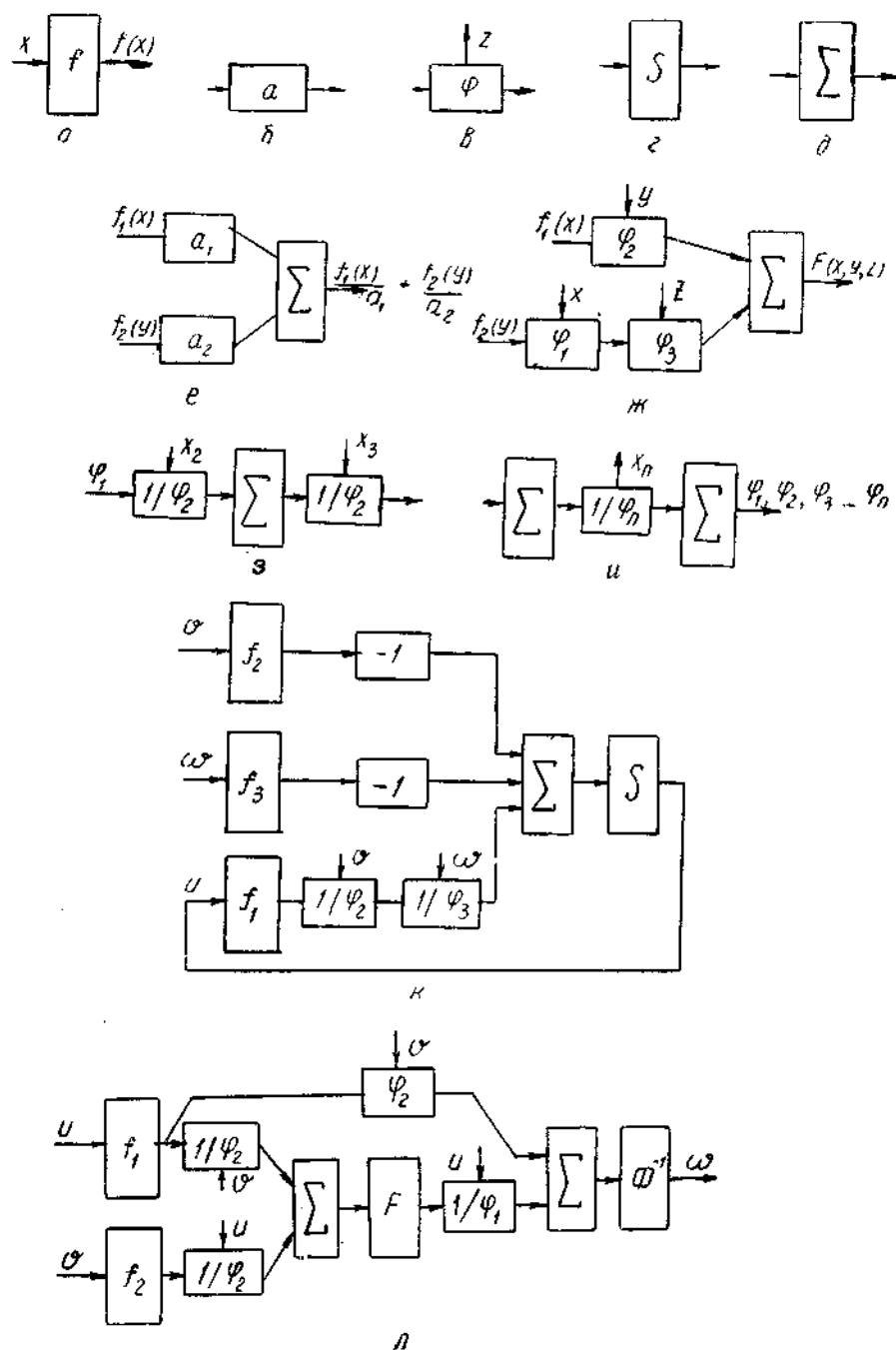


Рис. 1.

генератором импульсов (через кодирующее устройство) блока функционального преобразования.

В механических устройствах блок может быть выполнен, например, в виде механического вариатора, т. е. передачи с регулируемым передаточным отношением. Блок интегрирования (рис. 1, *з*) выполняет операции интегрирования. Суммирующий блок (рис. 1, *д*) — операцию алгебраического суммирования. Техническая реализация этих двух последних блоков также пояснений не требует.

Рассмотрим теперь синтез вычислительных устройств, моделирующих произвольные номографические выражения. Введем следующие определения:

Определение 1. Выражение, состоящее из алгебраической суммы произведений однозначных монотонно изменяющихся функций, имеющих непрерывную производную по каждому из аргументов, называется номографическим выражением.

Определение 2. Номографическое выражение, состоящее из алгебраической суммы произведений, в котором каждый множитель зависит не более чем от одного переменного, называется номографически рациональным.

Число различных функций, входящих в номографически рациональное выражение называется номографическим порядком этого выражения.

Определение 3. Номографическое выражение, не являющееся номографически рациональным, называется номографически трансцендентным.

Определение 4. Номографическим уравнением называется равенство вида $F = 0$, где F — номографическое выражение.

Определения 1–4 являются обобщением определений, положенных в основу существующей номографической классификации уравнений, изложенной, например, в монографиях Н. А. Глаголева [3].

На рис. 1, *е* показан суммирующий блок, на который через блоки постоянных коэффициентов со значениями a_1 и a_2 подаются входные величины $f_1(x)$ и $f_2(y)$. На выходе получаем величину, равную выражению

$$\frac{f_1(x)}{a_1} + \frac{f_2(y)}{a_2}.$$

На рис. 1, *ж* показан суммирующий блок, на который через блок функционального коэффициента со значением $\varphi_2(y)$ подана входная величина $f_1(x)$, а через блоки со значениями $\varphi_1(x)$ и $\varphi_3(z)$ — вторая входная величина $f_2(y)$. На выходе блока получаем выходную величину

$$F(x_1 y_1 z) = \frac{f_1(x)}{\varphi_2(y)} + \frac{f_2(y)}{\varphi_1(x) + \varphi_3(z)}.$$

При этом полагаем, что при последовательном включении блоков коэффициентов значение их общего коэффициента равно сумме значений отдельных коэффициентов. Закон вычисления значения общего коэффициента по значениям коэффициентов последовательно соединенных блоков зависит от технической реализации этих блоков и может, например, быть равным произведению значений коэффициентов блоков. Будем и в дальнейшем полагать, что значение общего коэффициента равно сумме значений коэффициентов.

Перейдем непосредственно к синтезу схем устройств, моделирующих номографические уравнения.

Произвольное номографическое рациональное уравнение, согласно определению 2 и определению 4, представляет собой выражение, состоящее из суммы произведений функций (каждое одного переменного), равное нулю.

Функции одного переменного могут быть воспроизведены каждая в отдельности своим блоком функционального преобразования. Схема для получения произведения произвольного числа функций приведена на рис. 1, и. Произведения функций для получения номографического выражения могут быть просуммированы на суммирующем блоке.

Это выражение, согласно определению 4, должно равняться нулю, для чего зависимая (вычисляемая) переменная должна принять определенное значение при заданных значениях остальных переменных.

Решить такое уравнение можно методом отыскания установившегося решения соответствующего дифференциального уравнения [5] $\frac{dF}{dt} = 0$ (1), где буквой F обозначено рассматриваемое номографически рациональное выражение. Для решения уравнения этим методом подают выход суммирующего блока на вход блока интегрирования, с выхода которого снимают значения зависимой переменной. При выполнении равенства (1) с выхода интегрирующего блока снимается значение зависимой переменной, а на входе блока будет нулевое значение, так как выполняется равенство (1).

На рис. 1, к в качестве примера приведена схема для решения уравнения

$$f_1(u) = [f_2(v) + f_3(w)] \frac{\varphi_2(v) + \varphi_3(w)}{\varphi_2(v) \varphi_3(w)}.$$

Кроме описанного наиболее общего метода решения номографических уравнений, применяются и другие способы. Например, если функция ответного переменного может быть явно выражена, то ее выражают через остальные функции и по этому равенству непосредственно синтезируют схему вычислительного устройства.

Следует отметить, что номографические уравнения во многих случаях преобразовывают к простейшему виду (каноническим формам), значительно более удобным для синтеза схем вычислительных устройств. Разработка методов приведения номографических уравнений к каноническим формам составляет одну из основных задач номографии. Для многих практически важных случаев она уже решена [3, 4].

Рассмотрим теперь моделирование номографически трансцендентных уравнений, в которых имеются номографически рациональные выражения, частное деление двух номографически рациональных выражений либо номографически трансцендентное выражение. В последнем случае после конечного числа знаков функций всюду есть номографически рациональные выражения либо частичные деления двух номографически рациональных выражений. Такие номографически трансцендентные уравнения могут моделироваться.

Действительно, входящие в номографически трансцендентное выражение функции нескольких переменных могут быть реализованы схемой для реализации номографического выражения, входящего под знак функции, выход которой подан на вход блока функционального преобразователя, воспроизводящего указанную функцию. Это всегда возможно, так как под знаком функции могут находиться выражения только трех видов: номографически рациональные выражения, частное деление двух номографически рациональных выражений и номографически трансцендентные выражения.

Номографирование выражений для первого случая уже рассмотрено выше. Во втором случае задача сводится к раздельному номографированию числителя и знаменателя, которые номографически рациональны, а затем к получению частного. Последнее достигается подачей на вход

блока функционального коэффициента величины, соответствующей числителю, причем значение коэффициента блока должно являться тождественной функцией знаменателю.

В третьем случае выражение слова рассматривается как исходное. После рассмотрения конечного числа трансцендентных выражений задачи всегда сводятся к номографически рациональным выражениям, т.е. к первому или второму случаю.

На рис. 1, а приведена схема для решения следующего номографически трансцендентного уравнения:

$$\Phi(w) = \varphi_1(u) F[f_1(u) \varphi_3(v) + f_2(v) \varphi_1(u)] + \frac{f_1(u)}{\varphi_2(v)}.$$

Рассматривая функциональное уравнение и соответствующие им схемы вычислительных устройств, можно сделать вывод, что формула уравнения однозначно определяет структуру устройства, т.е. по формуле легко составляется схема устройства и, наоборот, по имеющейся схеме легко восстановить первоначальную формулу.

Несмотря на то, что задача приведения уравнений к простейшему виду (каноническим формам) в общем виде не решена даже для уравнений, состоящих из функций, каждая из которых зависит только от одной переменной [3], можно для всех уравнений синтезировать схемы для их воспроизведения. В этих случаях схемы получаются более сложными. Поэтому, естественно, интерпретировать преобразование функциональных уравнений к канонической форме как минимизацию структуры вычислительного устройства, т.е. получение схемы с минимальным числом блоков. Синтез вычислительных устройств для воспроизведения функций производится в следующем порядке:

- 1) приведение аналитических зависимостей к канонической форме (или по крайней мере их упрощение);
- 2) структурный синтез схем вычислительных устройств;
- 3) масштабирование;
- 4) составление уточненной схемы вычислительного устройства.

Рассмотрим теперь два простых примера синтеза схем вычислительных устройств.

Пример № 1. Синтезируем схему электронного вычислительного устройства для решения номографического уравнения третьего порядка

$$A_0 f_1(u) f_2(v) f_3(w) + A_1 f_1(u) f_2(v) + A_2 f_2(v) f_3(w) + A_3 f_3(w) f_1(u) + \\ + B_1 f_1(u) + B_2 f_2(v) + B_3 f_3(w) + C = 0,$$

где $A_0, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ и C — постоянные коэффициенты; $f_1(u), f_2(v), f_3(w)$ — произвольные функции аргументов u, v и w .

В номографиях [3, 4] доказано, что уравнение всегда можно привести к следующей канонической форме:

$$\varphi_1(u) + \varphi_2(v) = \varphi_3(w),$$

где $\varphi_1(u), \varphi_2(v)$ и $\varphi_3(w)$ — какие-то функции аргументов u, v и w .

Схема вычислительного устройства, синтезированного по приведенному уравнению, показана на рис. 2, а.

На этой схеме в качестве суммирующего блока использован операционный усилитель $\mathcal{U}$. В качестве функциональных блоков φ_1, φ_2 и φ_3^{-1} могут быть использованы любые функциональные устройства, например, диодные функциональные преобразователи [1, 5]. На схеме φ_3^{-1} обозначена функция, обратная функции $\varphi_3(w)$.

Пример № 2. Необходимо синтезировать механическое счетно-решающее устройство с ручным вводом данных и визуальным отчетом резуль-

татов вычислений для решения номографического уравнения четвертого порядка:

$$A_0 f_1(u) f_2(v) f_3(w) + A_1 f_1(u) f_3(w) + A_2 f_2(v) f_3(w) + A_3 f_3(w) + \\ + B_0 f_1(u) f_2(v) g_3(w) + B_1 f_3(u) g_3(w) + B_2 f_2(v) g_3(w) + B_3 g_3(w) + \\ + C_0 f_1(u) f_2(v) + C_1 f_1(u) + C_2 f_2(v) + C_3 = 0,$$

где $A_0, A_1, A_2, A_3, B_0, B_1, B_2, B_3, C_0, C_1, C_2$ и C_3 — постоянные коэффициенты; $f_1(u), f_2(v), f_3(w)$ и $g_3(w)$ — произвольные функции аргументов u, v, w .

В номографии [3, 4] доказано, что это уравнение всегда может быть приведено к одной из двух возможных канонических форм: форме Коши или форме Кларка — в зависимости от выполнения или невыполнения условия пропорциональности коэффициентов вспомогательного тождества Кларка [3]. Предположим, что уравнение приводится к канонической форме Коши:

$$F_1(u) G_3(w) + F_2(v) H_3(w) + F_3(w) = 0, \\ \text{где } F_1(u), F_2(v), G_3(w), F_3(w) \text{ и } H_3(w) \text{ — какие-то функции аргументов } u, v \text{ и } w.$$

Разделив это уравнение на $G_3(w)$, получим

$$\varphi_3(w) = \varphi_1(u) + \varphi_2(v) \psi_3(w), \\ \text{где}$$

$$\varphi_3(w) = \frac{-F_3(w)}{G_3(w)}$$

$$\text{и } \psi_3(w) = \frac{H_3(w)}{G_3(w)}.$$

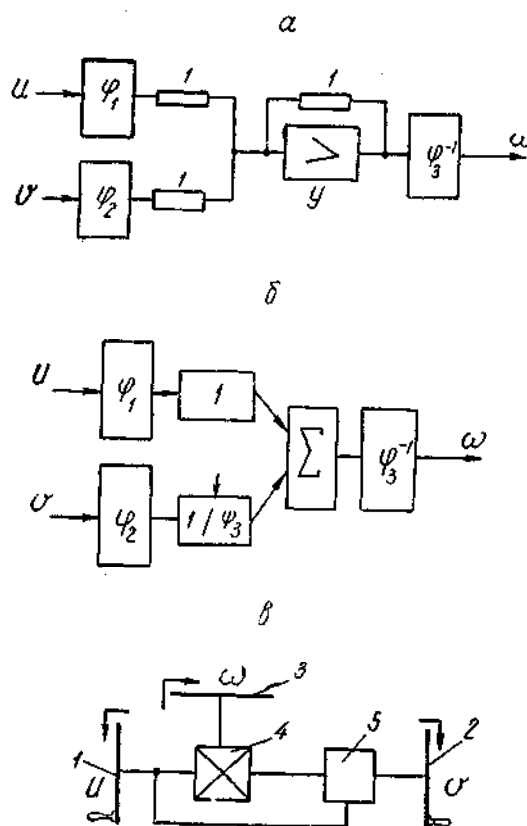


Рис. 2.

На рис. 2,б приводится структурная схема устройства, а на рис. 2,в — его кинематическая схема.

Работа счетно-решающего устройства происходит следующим образом. Независимые переменные u и v вводятся в устройство при помощи функциональных шкал 1 и 2. При повороте этих шкал их угловые перемещения складываются дифференциалом 4, поворачивающим шкалу, по которой производится считывание значений ответного переменного w . Между шкалой 2 и дифференциалом 4 установлен вариатор 5; его передаточное отношение является функцией входного переменного u .

Рассмотренные методы синтеза функциональных устройств являются дальнейшим развитием номографических методов. В номографии изучается теория и методы построения геометрических моделей аналитических зависимостей в виде специальных плоских или пространственных чертежей. Применение, кроме геометрического, также и других методов

моделирования, что сделано в настоящей работе, значительно расширяет возможности номографических методов.

Необходимо подчеркнуть, что в номографии разработаны методы приведения аналитических зависимостей к канонической форме далеко не для всех случаев. Поэтому перед номографией, естественно, ставится задача — разработать общие методы приведения аналитических зависимостей к удобному для моделирования виду.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Кобринский. Математические машины непрерывного действия. Гостехтеоретиздат, 1964.
 2. Г. Корн, Т. Корн. Электрические моделирующие устройства. Изд-во иностр. лит-ры, 1955.
 3. Н. А. Глаголев. Теоретические основы номографии. ОНТИ, М. — Л., 1963.
 4. Б. А. Невский. Справочная книга по номографии. Гостехтеоретиздат, 1951.
 5. В. Б. Смолдов, А. Н. Лебедев и др. Вычислительные машины непрерывного действия. Изд-во «Высшая школа», 1964.
 6. А. А. Фельдбаум. Вычислительные устройства в автоматических системах. Физматгиз, 1959.
 7. Г. С. Хованский. Номограммы с ориентированным транспортом. Гостехиздат, 1957.
 8. E. W. Pike, T. R. Silverberg. Designing mechanical computis, «Machine Disign», v. 24, N 7 and v. 25, N 8, 1952.
-