УДК 004.85:517.2

ЗАСТОСУВАННЯ ЗГОРТКОВИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦЯ

Школін О.В.
Науковий керівник – канд. техн. наук, доц. Гибкіна Н.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ
м. Харків, Україна
тел. +38(050) 323-65-43, email:oleh.shkolin@nure.ua

This work is devoted to developing and training a convolutional neural network to model acoustic wave distribution inside the simplified human skull in 2 dimensions. The neural network is trained in a fixed-point iteration manner, where at each iteration the PDE loss is minimized. The PDE is defined to be an inhomogeneous Helmholtz differential equation where the discretization and derivatives computation is performed by Fourier spectral method. The resulting method allows to compute the solution with float precision faster than classical methods.

Рівняння Гельмгольця часто виникає при вивченні фізичних процесів, які моделюються рівняннями в частинних похідних, залежних як від просторових, так і від часової змінної. Рівняння Гельмгольця є незалежною від часу формою хвильового рівняння, яке одержується як результат застосування техніки відокремлення змінних для зменшення вимірності задачі. Отримане диференціальне рівняння має наступний вигляд:

$$\Delta u(x) + \frac{\omega^2}{c(x)^2} u(x) = f(x),$$

де $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – шукана функція амплітуди розповсюдження звукових хвиль у просторі; $\omega \in \mathbb{R}_+$ – кутова частота джерела хвиль; $c(x)$ – функція розподілу швидкості звуку у просторі; $f(x)$ – функція-індикатор джерела у просторі; $x = (x_1, x_2)$.

Існує багато методів чисельного розв'язання диференціальних рівнянь. Найбільш популярні серед них – це метод скінченних об'ємів, метод скінченних елементів та метод скінченних різниць. Всі вони дискретизують початкове рівняння на заданій сітці та в результаті зводять задачу розв'язання диференціального рівняння до розв'язання скінченної системи лінійних рівнянь.

У даній роботі пропонується розв'язати задачу для рівняння Гельмгольця, застосувавши згорткову нейронну мережу UNet, яка була натренована за допомогою наступного ітеративного метода [1]:

$$r_k = \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) u_k - f,$$

$$(\delta u_{k+1}, h_{k+1}) = \mathrm{UNet}(u_k, r_k, h_k),$$

$$u_{k+1} = u_k + \delta u_{k+1},$$

де $u_k \in \mathbb{C}^{N \times N}$ – k-та апроксимація розв'язку рівняння Гельмгольця, дискретизована на скінченній сітці розміром $N \times N$; $f \in C^{N \times N}$ – дискретизація функції джерела; $c \in \mathbb{R}_{+}^{N \times N}$ – дискретизація функції розподілу швидкості звуку у просторі; $h_k \in \mathbb{R}^{N \times N}$ – матриця стану нейронної мережі на k-й ітерації.

Функція втрат, яка мінімізується за параметрами моделі, має наступний вигляд:

$$L = \sum_{k=0}^{T} \|r_k\|^2$$

для фіксованого горизонту T. Мінімізація проводиться за параметрами нейронної мережі за допомогою алгоритму стохастичного градієнтного спуску Adam [2].

Дискретизація диференціального оператора $\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}$ проводиться за допомогою спектрального метода Фур'є [3], суть якого полягає в тому, що похідна функції може бути обчислена у просторі частот добутком на набір хвильових чисел:

$$f' = \mathcal{F}^{-1}\left\{ik\mathcal{F}\left\{f\right\}\right\},$$

де $\mathcal{F}$ та $\mathcal{F}^{-1}$ – пряме та обернене перетворення Фур'є; k – набір хвильових чисел, $i^2 = -1$.

Умова абсорбції хвиль на межі розглядуваної області виконується за допомогою підходу PerfectlyMatchedLayer (PML) [4], який модифікує обчислення градієнта так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{1}{1 + i\frac{\sigma_x(x)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial x},$$

де $\sigma_x(x)$ – деяка зростаюча функція в області дії PML.

Список використаних джерел:

1. Stanziola, A., Arridge, S. R., Cox, B. T., & Treeby, B. E. (2021). A Helmholtz equation solver using unsupervised learning: Application to transcranial ultrasound. *Journal of Computational Physics*, 441, 110430.

2. Kingma, D. and Ba, J. (2015). Adam: A Method for Stochastic Optimization. *Proceedings of the 3rd International Conference on Learning Representations (ICLR 2015)*.

3. Smith, J. O. (2007). *Mathematics of the Discrete Fourier Transform (DFT) with Audio Applications*. 2nd Ed. W3K Publishing.

4. Johnson, S. (2021). *Notes on Perfectly Matched Layers* (PMLs).