ОДИН ПОДХОД К РЕШЕНИЮ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Э. А. Дедиков, Б. Е. Кухарев

Харьков

В процессе внедрения автоматизированных систем управления предприятием все больший круг технико-экономических задач планирования и управления возлагается на вычислительные машины. Большая часть этих задач может быть сформулирована в виде задачи линейного программирования. Характерная особенность этих задач — многокритериальность, т. е. для них можно назвать целый ряд критериев, по которым следует определять решение задачи. Однако в настоящее время известны методы оптимизации только по одному критерию [1]. Необходимость поиска решения с учетом всех критериев объясняется тем, что в неавтоматизированных системах специалист, принимая решение, интуитивно руководствуется не одной, а целым рядом целевых функций, что, несомненно, отражается на выборе самого решения.

Для задач экономики можно указать следующие целевые функции [2]: максимальная прибыль, максимальная рентабельность, максимальное количество продукции, минимальная себестоимость, максимальный коэффициент использования производства, максимальный объем выпуска, максимальная производительность труда.

Существует два подхода к решению многокритериальных задач. Первый заключается в нахождении оптимального плана по каждой целевой функции и определении в координатах этого плана остальных целевых функций [3]. Полученные данные сводятся в таблицу, после чего специалист выбирает тот план, который наилучшим образом удовлетворяет целям предприятия. Очевидно, что такой подход недостаточно эффективен, так как рассматривается небольшое количество (по числу критериев) планов.

Другой подход заключается в представлении процесса решения многокритериальной задачи решением на двух уровнях иерархии, где на нижнем уровне находятся все локальные критерии, а на верхнем формируется алгоритм, позволяющий объединить их в единую систему и находить компромиссное решение на основании этого алгоритма [4].

Этот подход более перспективен, так как позволяет сформулировать требования к искомому решению.

В настоящей работе рассматривается формирование требований к компромиссному решению и составление алгоритма его поиска.

Рассмотрим задачу линейного программирования с несколькими целевыми функциями

$$\text{ext}\,[\bar{L}\,(\bar{x}) = |C|\,\bar{x}] = \bar{L}^* \tag{1}$$

при условиях

$$|A|\,\bar{x} \leqslant \bar{B}; \tag{2}$$

$$\bar{x} \geqslant 0, \tag{3}$$

где $\bar{x}$ — n-мерный вектор переменных решения;

$\bar{L}\,(\bar{x})$ — k-мерный вектор целевых функций;

$\bar{L}^*$ — k-мерный вектор значений целевых функций в искомом компромиссном плане;

$\bar{B}$ — m-мерный вектор ресурсов;

$|A|$ — $(m \times n)$ — матрица коэффициентов всех линейных ограничений;

$|C|$ — $(k \times n)$ — матрица коэффициентов целевых функций.

Пусть на нижнем уровне иерархии находится k подсистем, каждая из которых имеет свой критерий оптимальности из выражения (1), а на верхнем уровне формируются 1) k-мерный вектор весовых коэффициентов $(\bar{\lambda})$ и 2) следующее требование к компромиссному решению — потери эффективности по всем критериям равны с учетом весовых коэффициентов и минимальны.

Потерю эффективности по i-й целевой функции определим следующим образом:

$$\Delta\Theta_i = \frac{|L_i^0 - L_i^*|}{L_i^0 + L_i^*},$$

где L_i^0 — экстремальное значение i-й целевой функции. Тогда изложенное выше требование можно записать

$$\lambda_1\Delta\Theta_1 = \lambda_2\Delta\Theta_2 = \ldots = \lambda_k\Delta\Theta_k \to \min. \tag{4}$$

Для нахождения компромиссного решения введем понятие чувствительности целевой функции в диапазоне ее изменения от оптимального значения L_i^0 до значения при компромиссном плане L_i^*

$$g_i = \frac{|L_i(\bar{x}) - L_i(\bar{x} + \overline{\Delta x_i})|}{(L_i^0 + L_i^*)\,\Delta x_i},$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots\ k),$$

где $L_i(\bar{x})$ — значение i-й целевой функции при текущем значении вектора решений $\bar{x}$;

Δx_i — изменение аргумента в направлении градиента i-й целевой функции.

Очевидно,

$$g_i = \frac{\partial L_i(\bar{x})}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{L_i^0 + L_i^*} = \frac{S_i}{L_i^0 + L_i^*}. \tag{5}$$

Здесь $S_i = \text{const}$, так как $L_i(\bar{x})$ — линейная форма.

В дальнейшем для определенности одну из целевых функций назовем первой. Исходя из значений чувствительности и весового коэффициента для каждой i-й целевой функции ($i \neq 1$), определим линейное уравнение, каждое решение которого удовлетворяет условию:

$$\lambda_i \Delta Э_i = \lambda_1 \Delta Э_1. \tag{6}$$

Это равенство можно получить с помощью геометрического понятия пучка плоскостей, если представить целевые функции в своих оптимальных значениях гиперплоскостями n-ой размерности. Тогда искомое уравнение будет являться гиперплоскостью той же размерности, проходящей через их пересечение. Причем, уклонения от любой ее точки до гиперплоскостей целевых функций при их оптимальных значениях связаны зависимостью

$$\frac{r_1}{r_i} = \frac{\lambda_i g_i}{\lambda_1 g_1}, \tag{7}$$

$$(i = 2,\ 3\ \ldots\ k)$$

Коэффициенты и свободный член искомой гиперплоскости являются линейной комбинацией соответствующих коэффициентов исходных целевых функций с параметром t_i

$$G_{ij} = G_{1j} + t_i G_{ij};$$

$$(j = 1,\ 2\ \ldots\ n);$$

$$H_i = L_1^0 + t_i L_i^0,$$

где t_i определяется на основании (5) и (7)

$$t_i = \pm \frac{\lambda_i (L_1^0 + L_1^*)}{\lambda_1 (L_i^0 + L_i^*)}.$$

Знак параметра t_i находим путем проверки условия

$$\operatorname{sign} F_i(\bar{x}_1^0,\ t_i) \neq \operatorname{sign} F_i(\bar{x}_i^0,\ t_i),$$

где

$$F_i(\bar{x},\ t_i) = \sum_{j=1}^{n} G_{ij} x_j - H_i.$$

В результате определяем $k-1$ искомых уравнений, полагая в (8) $F_i(x,\ t_i) = 0$.

Таким образом, введя эти уравнения в систему ограничений (2), получим новое выпуклое множество решений задачи, которое является таким подмножеством исходной, в которое входят решения, удовлетворяющие условию (6). Чтобы найти экстремальное из этих решений, т. е. удовлетворяющее условию (4), необходимо с помощью симплекс—метода определить оптимальный план по любому из исходных критериев (решение по каждому критерию приведет к одному плану).

В результате исходная многокритериальная задача (1—3) приведена к задаче линейного программирования обычного типа

$$L_i(\bar{x}) = \bar{G}_i \bar{x} \to \text{ext}$$

при условиях

$$|A|\bar{x} \leqslant \bar{B},$$

$$|G|\bar{x} = \bar{H},$$

$$\bar{x} \geqslant 0.$$

Количество ограничений в полученной задаче определяется числом $p = m + k - 1$.

Компромиссное решение исходной задачи может быть найдено с любой наперед заданной точностью за несколько итераций, в процессе которых уточняются значения параметров t_i; в первом приближении для определения t_i значения L_i^* принимаются равные L_i^0.

При данном методе компромиссное решение находится на границе области, а не внутри ее. Это определенное достоинство по сравнению с другими [2]. Однако необходимо отметить, что данный метод может быть применен только в задачах, у которых $k < n$, что, однако, незначительно сужает область его применения, так как в реальных ситуациях обычно количество целевых функций значительно меньше числа переменных.

В качестве примера, иллюстрирующего описанный метод, была решена следующая задача:

$$L_1(\bar{x}) = 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 40x_4 + 70x_5 + 28x_6 + 15x_7 + 45x_8 + 40x_9 + 70x_{10} + 40x_{11} + 65x_{12} \to \min;$$

$$L_2(\bar{x}) = 15x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 50x_4 + 30x_5 + 25x_6 + 10x_7 + 17x_8 + 25x_9 + 50x_{10} + 30x_{11} + 45x_{12} \to \max$$

при ограничениях

$$15x_1 + 30x_5 + 25x_9 \geqslant 300;$$
$$10x_2 + 25x_6 + 50x_{10} \geqslant 200;$$
$$20x_3 + 10x_7 + 30x_{11} \geqslant 1000;$$
$$50x_4 + 17x_8 + 45x_{12} \geqslant 500;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50;$$
$$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 20;$$
$$x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 30;$$
$$x_j \geqslant 0 \ (j = 1, 2, \ldots 12).$$

Весовые коэффициенты критериев приняты $\lambda_1 = 0,7$, $\lambda_2 = 1$. Экстремальные значения критериев $L_1^0 = 2600$ и $L_2^0 = 3810$. После двух итераций было получено компромиссное решение:

$$x_1 = 15,808,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,048,\ x_4 = 34,144,\ x_5 = 2,096,$$
$$x_6 = 8,\ x_7 = 9,904,\ x_8 = 0, x_9 = 0,\ x_{10} = 0,\ x_{11} = 30,\ x_{12} = 0,$$

Целевые функции принимают значение при этом $L_1^* = 3323,36$ и $L_2^* = 3207,2$, а произведения $\lambda_i \Delta Э_i$ равны соответственно 0,0855 и 0,0875, что можно считать достаточно хорошим приближением условия (4) для многих задач оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ч. Карр Ч. Хоув. Количественные методы принятия решений в управлении и экономике. Изд-во «Мир», 1966.

2. Х. Юттлер. Линейная модель с несколькими целевыми функциями. «Экономика и математические методы», 1967, № 3.

3. Л. Ш. Гафт, Л. Ф. Лучина, Л. З. Коварский. Оптимизация производственной программы промышленного предприятия. «Экономика и математические методы», 1967, № 6.

4. В. Л. Волкович. Многокритериальные задачи и методы их решения. Сб. «Кибернетика и вычислительная техника», вып. 1. Изд-во «Наукова думка», Киев, 1969.