

УДК: 004.032.26:519.174.2



А.В. Шкловец, Н.Г. Аксак

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, г. Харьков, Украина

ПОСТРОЕНИЕ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНЫХ КАРТ КОХОНЕНА НА ОСНОВЕ ТРИАНГУЛЯЦИИ ДЕЛОНЕ ДЛЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ ДАННЫХ

Для уменьшения вычислительных затрат и упрощения алгоритма аппроксимации треугольных карт Кохонена кубической параметрической сплайн-поверхностью в работе предложен метод построения четырёхугольных карт Кохонена. Аппроксимация карт Кохонена сплайн-поверхностью производится для увеличения точности визуализации многомерных данных.

ТРИАНГУЛЯЦИЯ ДЕЛОНЕ, КАРТЫ КОХОНЕНА, ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ СПЛАЙН-ПОВЕРХНОСТЬ, ОСТОВНОЙ ЛЕС

Введение

При решении задачи многомерной визуализации данных с помощью двумерных самоорганизующихся карт Кохонена, представленных в виде триангуляции Делоне, возникает проблема отображения данных на грани или в вершины треугольников карты. В результате будет искажена структура данных, а часть данных может стать неразличимыми на карте [1], что приводит к снижению точности визуализации данных. Проблема вызвана кусочно-плоской структурой карты. В работах [2–4] предлагается аппроксимировать карту параметрической кубической сплайн-поверхностью и отображать данные на кусочно-гладкие карты Кохонена. Однако аппроксимация карт Кохонена, представленных в виде триангуляции, требует больших вычислительных затрат.

1. Постановка задачи

Пусть после обучения карты Кохонена в n -мерном евклидовом пространстве множество выходных нейронов $W = \{W^1, \dots, W^N\}$ имеет координаты $W^l = (w_1^l, \dots, w_n^l)^T$, $l = \overline{1, N}$, N – количество выходных нейронов. На множестве W задана триангуляция Делоне $T = \{T^1, \dots, T^M\}$, где $T^k = \{T_1^k, T_2^k, T_3^k\}$, $k = \overline{1, M}$, M – количество треугольников, T_p^k – номер нейрона в множестве W , $T_p^k \in \{1, N\}$, $p = \overline{1, 3}$ (рис. 1) [5].

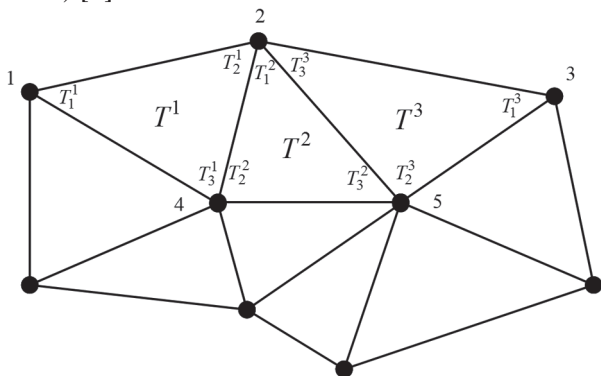


Рис. 1. Плоское изображение карты Кохонена в виде триангуляции Делоне

В работе [4] предлагается метод построения параметрической сплайн-поверхности на кусочно-плоской карте Кохонена. Идея построения заключается в сопоставлении каждому треугольнику T^k произвольной кубической поверхности $S^k(t_1, t_2)$, ограниченной треугольником с вершинами в точках $\{(0,0), (1,0), (0,1)\}$. Сплайн-поверхность будет построена, если все параметры поверхностей $S^k(t_1, t_2)$ $k = \overline{1, M}$ будут определены. Для этого формируется система линейных алгебраических уравнений относительно параметров параметрической сплайн-поверхности, представляющая собой:

1) условие прохождения параметрической сплайн-поверхности в точках $\{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ через точки вершины треугольника T^k ;

2) условия гладкого соприкосновения поверхностей $S^{k_1}(t_1, t_2)$ и $S^{k_2}(t_1, t_2)$, если соответствующие им треугольники имеют общую сторону.

Если неэквивалентных уравнений системы больше, чем переменных, то часть уравнений удаляется, что ведет к снижению гладкости сплайн-поверхности. Иначе выбирается некоторое количество переменных системы, через которые выражаются оставшиеся, а первоначально выбранные определяются из дополнительного условия оптимальности (например, условия минимального отклонения сплайн поверхности от кусочно-плоской карты).

Одной из проблем построения сплайн-поверхностей на триангуляции является формирование условия гладкого соприкосновения двух поверхностей по стороне $\{(1,0), (0,1)\}$. Чтобы описать данный случай, требуется составить большое количество уравнений, включающих в себя огромное количество переменных.

2. Метод построения четырёхугольных карт Кохонена

Для устранения этой проблемы предлагается в триангуляции попарно объединить треугольники в четырёхугольники.

Необходимым условием для существования четырёхугольных карт является чётное количество треугольников в триангуляции.

Поставим в соответствие триангуляции T ориентированный граф $G = (\tilde{T}, U)$, где $\tilde{T} = (\tilde{T}^1, \dots, \tilde{T}^M)$ — множество вершин и $U = (u^1, \dots, u^{N_u})$ — множество ребер графа, N_u — общее количество ребер (рис. 2.) по следующим правилам:

1) каждому треугольнику $T^k \in T$ соответствует вершина $\tilde{T}^k \in G$, $k = \overline{1, M}$;

2) если два треугольника $T^p \in T$ и $T^q \in T$ имеют общую сторону, то вершины $\tilde{T}^p \in G$ и $\tilde{T}^q \in G$ объединены ребром $u^i = (\tilde{T}^p, \tilde{T}^q)$.

Граф G обладает следующими свойствами:

1) из каждой вершины графа G выходит не более трёх ребер, так как треугольник имеет не более трёх сторон, имеющих общую сторону с другими треугольниками;

2) всегда существуют вершины, имеющие менее трёх смежных ребер. Этим вершинам соответствуют треугольники, образующие границу триангуляции.

Задача построения четырехугольной карты эквивалентна задаче построения остового леса $O_i \in O$ графа G , где O — множество всех остовных лесов, $i \in N$. В остовном лесу все вершины попарно соединены, при этом из каждой вершины выходит одно и только одно ребро. Построение всех остовных лесов O схоже с построением всех остовных деревьев графа G [6].

Построение всех остовных лесов O заключается в построении графа D , вершинами которого являются ребра $\{u^i | u^i \in G, u^i \in O_i\}$ из графа G , принадлежащие остовому лесу O_i . Процедура построения позволяет найти все остовные леса O_i графа G , образованные объединением ребер в вершинах ветвей графа D . На рис. 3 приведен пример построения графа D для графа G (рис. 2б), а на рис. 4 представлен процесс построения остовного леса на каждой итерации.

Процедура построения остовных лесов O .

1) Установим вершину графа D с пустым множеством ребер графа G .

2) Найдем среди всех вершин графа G такие вершины $\tilde{T}^h \in G$, из которых выходит одно и только одно ребро $u^h \in U$. Эти ребра принадлежат ос-

товному лесу ($u^h \in O_i$) и помещаются в вершину графа D .

3) Если таких вершин в графе G нет, выбираем любую вершину $\tilde{T}^i \in G$, имеющую два смежных ребра $u^i, u^j \in U$ (по свойству 2 графа G такая вершина существует) и рассмотрим два случая принадлежности остовому лесу ребер $u^i \in O_i$ и $u^j \in O_i$. При этом имеем раздвоение графа D на две ветви. В каждую новую вершину графа D помещаем рассматриваемое ребро.

4) Удаляем из графа G

а) ребра, принадлежащие остовому лесу,

б) вершины, в которые входят удаленные ребра,

в) все ребра, которые выходят из удаленных вершин.

5) Если в графе G не осталось ни одной вершины, то остовые леса O построены.

6) Если в подмножестве вершин графа G , из которых исходят удаленные ребра на шаге 4в, образовались изолированные вершины (вершины, из которых не исходит ни одно ребро), то остовой лес при данном выборе вершин в шагах 3 или 7 не существует, и данную ветвь в графе D далее не следует рассматривать. Если эта ветвь была единственная, то остовой лес O_i для данного графа G не существует.

7) Среди вершин графа G , из которых исходят удаленные ребра на шаге 4в, найдем такие h вершин $\tilde{T}^h \in G$, из которых исходит одно и только одно ребро $u^h \in U$. Эти ребра принадлежат остовному лесу ($u^h \in O_i$). Если таких вершин в графе G нет, то в подмножестве вершин графа G , из которых исходят удаленные ребра на шаге 4в, выбираем любую вершину $\tilde{T}^i \in G$, из которой исходят два ребра $u^i, u^j \in U$. Рассмотрим два случая принадлежности ребер $u^i \in O_i$ и $u^j \in O_i$ остовному лесу. Построим граф D аналогично шагам 2 и 3.

8) Переход к шагу 4.

Граф D состоит из нескольких ветвей, каждая из которых представляет собой остовной лес O графа G . Каждый остовной лес получается путем объеди-

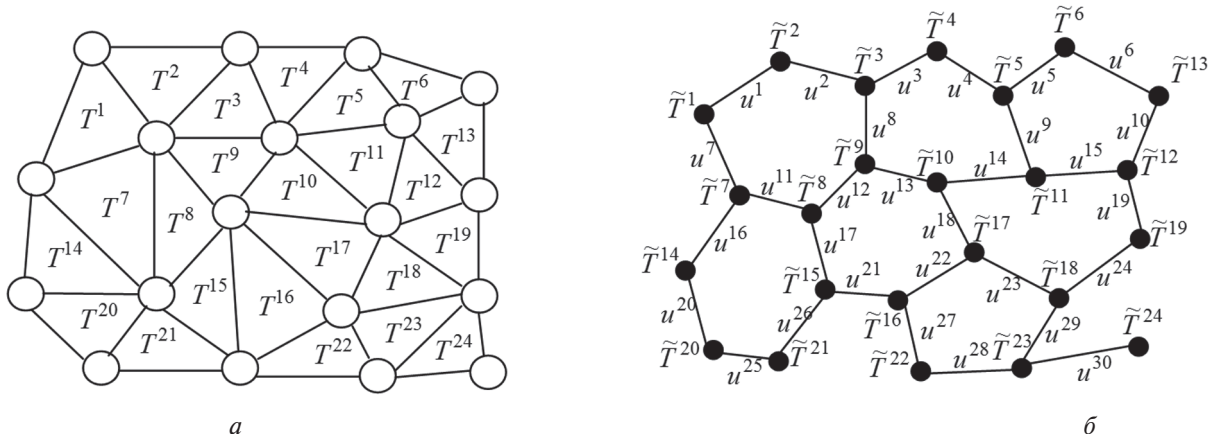


Рис. 2. а — триангуляция Делоне T , б — граф G

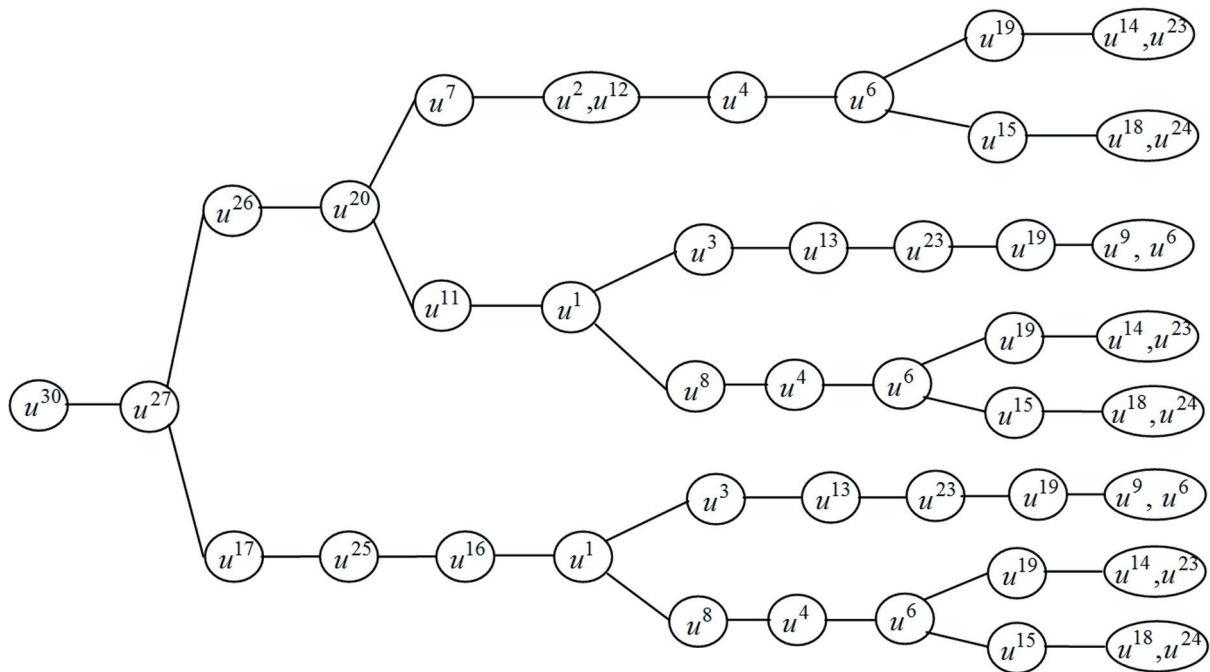


Рис. 3. Построенный граф D для графа G

Таблица 1

Остовые леса графа G

№	Остовые леса O графа G	№	Остовые леса O графа G
O_1	$\{u^{30}, u^{27}, u^{26}, u^{20}, u^7, u^2, u^{12}, u^4, u^6, u^{19}, u^{14}, u^{23}\}$	O_5	$\{u^{30}, u^{27}, u^{26}, u^{20}, u^{11}, u^1, u^8, u^4, u^6, u^{15}, u^{18}, u^{24}\}$
O_2	$\{u^{30}, u^{27}, u^{26}, u^{20}, u^7, u^2, u^{12}, u^4, u^6, u^{15}, u^{18}, u^{24}\}$	O_6	$\{u^{30}, u^{27}, u^{17}, u^{25}, u^{16}, u^1, u^3, u^{13}, u^{23}, u^{19}, u^9, u^6\}$
O_3	$\{u^{30}, u^{27}, u^{26}, u^{20}, u^{11}, u^1, u^3, u^{13}, u^{23}, u^{19}, u^9, u^6\}$	O_7	$\{u^{30}, u^{27}, u^{17}, u^{25}, u^{16}, u^1, u^8, u^4, u^6, u^{19}, u^{14}, u^{23}\}$
O_4	$\{u^{30}, u^{27}, u^{26}, u^{20}, u^{11}, u^1, u^8, u^4, u^6, u^{19}, u^{14}, u^{23}\}$	O_8	$\{u^{30}, u^{27}, u^{17}, u^{25}, u^{16}, u^1, u^8, u^4, u^6, u^{15}, u^{18}, u^{25}\}$

нения всех ребер одной ветви, записанных в вершинах графа D . Согласно рис. 5 для графа G , приведенного на рис. 4а, существует 8 остовных лесов.

На рис. 4 приведена последовательность итераций алгоритма построения остового леса O_1 графа G . На рисунке приняты следующие обозначения: жирной линией (—) показаны ребра $u^i \in U$, принадлежащие остовному лесу $u^i \in O_1$, выбранные на шагах 2, 3 и 7 и удаленные из графа G на шаге 4а; штрихованной линией (----) показаны ребра, удаленные из графа G на шаге 4в; большой заштрихованной окружностью ($\otimes$) показаны вершины, которые рассматриваются на шагах 6 и 7.

На основе полученного остового леса O_1 можно построить четырехугольную карту Кохонена $Q = \left(Q^1, \dots, Q^{\frac{M}{2}} \right)$ на основе триангуляции T . Это достигается путем удаления общих сторон треугольников из триангуляции T , которым соответствуют ребра графа G , образующие остов лес O_1 . Четырёхугольник Q^i , $i = 1, \frac{M}{2}$ определяется четырьмя точками с номерами $Q^i = \{Q_1^i, Q_2^i, Q_3^i, Q_4^i\}$,

причем номера обозначены так, что попарно соединены точки $\{Q_1^i, Q_2^i\}$, $\{Q_1^i, Q_3^i\}$, $\{Q_2^i, Q_4^i\}$ и $\{Q_3^i, Q_4^i\}$.

На рис. 5 показан пример построения четырехугольной карты для триангуляции T , приведенной на рис. 2а.

Замечания:

1) Если найдена ветвь графа D , которой соответствует остов лес O_1 графа G , то другие ветви можно не рассматривать. Вычислительная сложность предложенного метода линейно зависит от количества треугольников триангуляции T .

2) Если во всех ветвях графа D возникают изолированные вершины графа G , то алгоритм можно продолжить, и построить остовое дерево с изолированными вершинами. В результате, после построения четырехугольной карты в ней останутся треугольники, соответствующие изолированным вершинам графа G .

Выводы

В работе предложена процедура построения четырехугольных карт Кохонена на основе их треугольного аналога, которая позволяет уменьшить вычислительную сложность аппроксима-

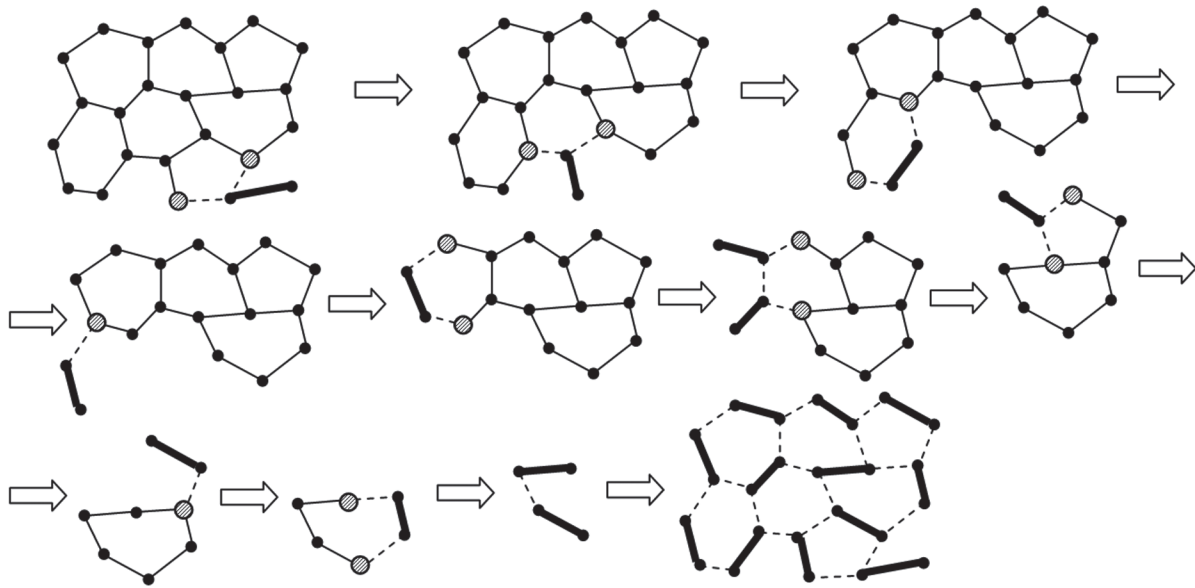
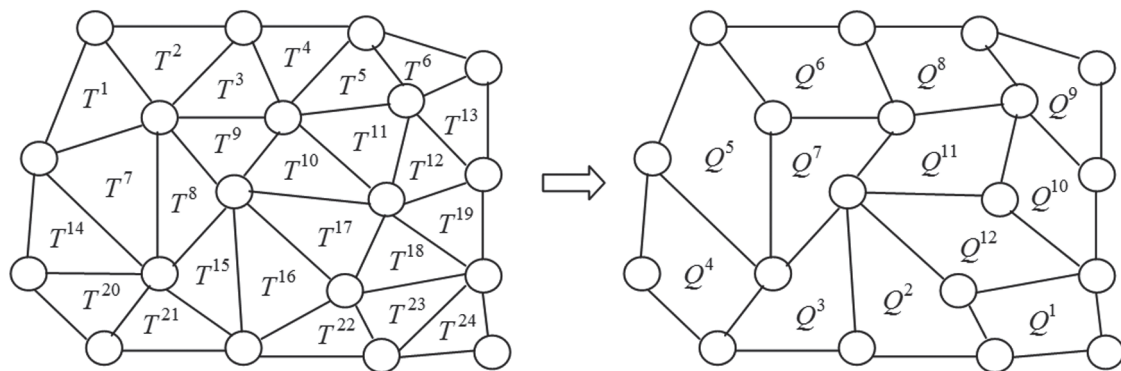
Рис. 4. Построение остового леса O_1 графа G , приведенного на рис. 26

Рис. 5. Построение четырехугольной карты Кохонена по триангуляции

ции кусочно-плоской карты Кохонена кубической параметрической сплайн-поверхностью. Приведены необходимые условия существования четырехугольных карт Кохонена. Построение таких карт ведет к существенному упрощению алгоритма аппроксимации параметрической сплайн-поверхностью и уменьшает количество скалярных операций. Показано, что предложенный метод имеет линейную вычислительную сложность. Планируется разработать метод аппроксимации сплайн поверхностями четырехугольных карт Кохонена.

Список литературы: 1. Зиновьев, А.Ю. Визуализация многомерных данных [Текст] / А. Ю. Зиновьев. — Красноярск: Изд-во КГТУ, 2000. — 168 с. 2. Аксак, Н.Г. Метод аппроксимации карт Кохонена кубическим параметрическим сплайном [Текст] / Н. Г. Аксак, А. В. Шкловец // Системы управління навігації та зв'язку. — 2010. — 2(14). — С. 70-74. 3. Метод аппроксимации сплайнами минимальной длины линейных карт Кохонена для визуализации многомерных данных [Текст]: сб. науч. тр. / НИЯУ МИФИ. М.: НИЯУ МИФИ, 2010. — 280 с. 4. Аппроксимация двумерных карт Кохонена кубическими сплайн поверхностями [Текст] // сб. науч. тр. — Евпатория: МОІНУ, 2010. — 225 с. 5. Скворцов, А. В. Триангуляция Делоне и её применение [Текст] / А. В. Скворцов. — Томск: изд-во Том. Ун-та, 2002. — 128 с.

6. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход [Текст] / Н. Кристофидес. — М: Мир, 1978. — 432 с.

Поступила в редколлегию 30.06.2011

УДК 004.032.26:519.174.2

Побудова чотирикутних карт Кохонена на основі триангуляції Делоне для візуалізації багатовимірних даних / А. В. Шкловець, Н. Г. Аксак // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. — 2011. — № 3 (77). — С. 94-97.

Запропоновано метод побудови чотирикутних карт Кохонена для зменшення кількості скалярних операцій апроксимації кусочно-плоских карт Кохонена кубічними параметричними сплайн-поверхнями для збільшення точності візуалізації багатовимірних даних.

Табл 1. Іл. 5. Бібліогр.: 6. найм.

UDK 004.032.26:519.174.2

Building a rectangular Kohonen maps based on Delone triangulation to visualize multidimensional data / A.V. Shklovets, N. G. Axak // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. — 2011. — № 3 (77). — P. 94-97.

A method for construction rectangular Kohonen maps to reduce the number of scalar operations of approximation planar Kohonen maps by cubic parametric spline surfaces to increase the accuracy of multidimensional data visualization was suggested.

Tab.: 1. Fig.: 5. Ref.: 6 items.