УДК 621.385

В. Е. КОНОВАЛОВ, П. В. НЕШМОНИН, В. В. КРИВОШЕЯ

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ МИНИМУМА ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЛОВО

Необходимое условие генерации в ЛОВО — обращение в нуль высокочастотного поля в некотором сечении пространства взаимодействия, удаленном от выхода. В том случае, когда высокочастотное поле с удалением от выхода достигает положительного минимума, ЛОВО может работать в усилительном режиме, если подать входной сигнал в сечении пространства взаимодействия, соответствующем этому минимуму. Распределение амплитуды высокочастотного поля вдоль пространства взаимодействия получается в результате численного решения системы нелинейных уравнений, соответствующих математическим моделям ЛОВО различной строгости [1; 2]. При этом высокочастотное поле — сложная функция продольной координаты, рабочих параметров и граничных условий. Практический интерес имеет нахождение зависимости генерационного или усилительного режимов от рабочих параметров. В общем случае такая зависимость может трактоваться как функция отклика и представлять собой гиперповерхность в n-мерном пространстве рабочих параметров и граничных условий, а мерность определяется числом варьируемых факторов, т. е. рабочих параметров и граничных условий.

В качестве первого приближения в описании искомой зависимости можно выбрать полиномиальную модель первого порядка:

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i,$$

где y — функция отклика, равная амплитуде высокочастотного поля в первом положительном минимуме (усилительный режим) или равная нулю (генерационный режим); x_i — варьируемые факторы, кроме $x_0 = 1$, a_i — эффект i-го фактора, а a_0— свободный член.

Для нахождения коэффициентов a_i в записанном уравнении регрессии необходимо выбрать варьируемые факторы модели и произвести расчет функции отклика в некоторых точках факторного эксперимента. В качестве математической модели ЛОВО используем одномерную нелинейную модель [1; 3] со следующими рабочими параметрами и граничными условиями: параметр радиуса действия силы пространственного заряда $B = 1{,}0$; параметр «холодных» потерь $d = 0$; интервалы варьирования параметров скорости, пространственного заряда и усиления соответственно следующие: $b = 1{,}5 — 2{,}0$; $QC = 0—0{,}25$; $C = 0{,}05—0{,}1$; на выходе безразмерная амплитуда высокочастотного поля варьируется $A_0 = 0{,}5 — 1{,}0$; ее производная по продольной координате $\left.\frac{dA(y)}{dy}\right|_{y=0} = 0$; сдвиг фазы между «горячей» волной и волной, движущейся с невозмущенной скоростью пучка, $\theta(0) = 0$; производная по продольной координате этого фазового сдвига $\left.\frac{d\theta(y)}{dy}\right|_{y=0} = -b$; переменная скорость пучка $U(0, \Phi_0) = 0$; дискретизация начальной фазы $\varphi(0, \Phi_{0,j}) = \Phi_{0,j} = \frac{2\pi j}{m}$, где $j = 0, 1, 2, \ldots m$. Тогда варьируемым фактором полиномиальной модели x_1, x_2, x_3, x_4 соответствуют следующие граничные условия и рабочие параметры математической модели ЛОВО — A_0, b, QC, C. Переход от значений рабочих параметров и граничного условия для амплитуды высокочастотного поля на выходе к x_i и обратно выполняется по соотношениям кодировки и декодировки соответственно:

$$x_i = \frac{D_i - \frac{D_{i\text{макс}} + D_{i\text{мин}}}{2}}{\frac{D_{i\text{макс}} - D_{i\text{мин}}}{2}};$$

$$D_i = \frac{D_{i\text{макс}} + D_{i\text{мин}}}{2} + x_i \frac{D_{i\text{макс}} - D_{i\text{мин}}}{2}.$$

Здесь D_i — значение рабочего параметра или граничного условия.

С целью оценки чувствительности выходной зависимой переменной к вариации каждого фактора предпочтительно применять полный факторный эксперимент типа 2^n, где n — число варьируемых на двух уровнях факторов. При этом граничные значения интервалов варьирования рабочих параметров соответствуют верхним (+1) и нижним (—1) уровням факторов. Такой план будет содержать число экспериментов, равное 2^n, т. е. в нашем случае 16. Запишем матрицу планирования, задающую координаты точек, в которых выполняется машинный эксперимент для нахождения y_k ($k = 1, 2, \ldots N$): (1), *a*, *b*, *ab*, *c*, *ac*, *bc*, *abc*, *d*, *ad*, *bd*, *abd*, *cd*, *acd*, *bcd*, *abcd*. Здесь для обозначения верхних уровней факторов x_1, x_2, x_3, x_4 используются буквы латинского алфавита *a*, *b*, *c*, *d*, а (1) — обозначает опыт, в котором все факторы находятся на нижнем уровне [4].

Для сокращения числа машинных экспериментов, пренебрегая эффектами взаимодействия нескольких факторов, перейдем к плану дробного факторного эксперимента типа 2^{4-1}, являющегося полурепликой полного факторного эксперимента 2^4. Поскольку при использовании предпочтение отдается дробным факторным планам с наибольшей разрешающей способностью, то выберем генерирующее соотношение для построения плана 2^{4-1} в виде $x_4 = x_1x_2x_3$ с определяющим контрастом, характеризующим, с какими факторами смешана оценка некоторого данного фактора, $I = x_1x_2x_3x_4$ [5]. В результате получим матрицу планирования дробного факторного эксперимента с разрешающей способностью IV, т. е. 2^{4-1}_{IV}, представленную в таблице.

x_0	План x_1	x_2	x_3	x_4	y_A	y_L	Кодовое обозначение
+	—	—	—	—	0,08	0,88	(1)
+	+	+	—	—	0,23	0,80	*ab*
+	+	—	+	—	0,46	1,22	*ac*
+	—	+	+	—	0,16	1,02	*bc*
+	+	—	—	+	0,63	0,54	*ad*
+	—	+	—	+	0,09	0,68	*bd*
+	—	—	+	+	0,09	0,88	*cd*
+	+	+	+	+	0,34	1,12	*abcd*

Знаком «+» и «—» обозначены верхний и нижний уровни варьируемых факторов. В столбце y_A представлены данные расчета амплитуды высокочастотного поля в сечениях первых минимумов распределения поля вдоль пространства взаимодействия ЛОВО, полученные для значений рабочих параметров и граничного условия согласно точкам плана дробного факторного эксперимента типа 2_{IV}^{4-1}. В столбце y_L приведены отстояния указанных выше минимумов от выхода ЛОВО в нормированных единицах длины $2\pi CN$, где C — параметр усиления; N — отношение продольной координаты к длине замедленной волны. Общее число точек плана 2_{IV}^{4-1} вдвое меньше, чем для плана полного факторного эксперимента ($M = 8$).

Расчет коэффициентов полиномиальной модели выполняется по формуле

$$b_i = \frac{1}{M}\sum_{j}^{M} x_{ji} y_j.$$

Тогда полиномиальные модели для минимума поля y_A и отстояние минимума поля от выхода ЛОВО y_L запишутся в виде

$$y_A = 0{,}261 + 0{,}155x_1 — 0{,}055x_2 + 0{,}002x_3 + 0{,}027x_4;$$
$$y_L = 0{,}892 + 0{,}027x_1 + 0{,}012x_2 + 0{,}016x_3 — 0{,}087x_4.$$

Об адекватности представления результатов полиномиальной моделью можно судить на основании F-критерия [5]. Для этого вычисляют F-отношение:

$$F = \frac{s_R^2}{s_y^2}$$

и проверяют гипотезу об адекватности модели путем сопоставления расчетного значения F со значением $F_{кр}$, найденным из таблиц, 95%-го F-распределения Фишера при заданных степенях свободы φ_1 и $M - 1$. Здесь

$$s_R^2 = \frac{S_R^2}{\varphi_1} = \frac{\sum_{j=1}^{M}(\hat{y}_j - y_j)^2}{M-(n+1)} \text{ — остаточная дисперсия;}$$

$$s_y^2 = \frac{1}{M-1}\sum_{j=1}^{M}(y_j - y)^2 \text{ — дисперсия, характеризующая ошибку эксперимента;}$$

$\varphi_1 = M - (n + 1)$ — число степеней свободы эксперимента; $n + 1$ — число оцениваемых коэффициентов полинома; $M - 1$ — число степеней свободы при определении дисперсии s_y^2; y_j — результат j-го машинного эксперимента; $\hat{y}_j$ — значение, рассчитанное по полиномиальной модели для j-й точки плана; y — выбранное среднее по всем результатам машинного эксперимента.

Если $F_{кр} \geqslant F$, модель считается адекватной, а при $F > F_{кр}$ гипотеза об адекватности отклоняется. В нашем случае при степенях свободы $\varphi_1 = 3$ и $M - 1 = 7$ $F_{кр} = 4{,}35$ и превосходит расчетные значения F-отношений для обеих моделей $\tilde{y}_A$ и $\tilde{y}_L$, равные 0,53 и 0,4 соответственно,— модели адекватны.

Кроме того, может быть выполнена проверка значимости коэффициентов модели. Коэффициент a_i считается значимо отличающимся от нуля, если $|a_i| > t_{кр}s_i$, где $t_{кр}$ — критическое значение распределения Стьюдента для заданного уровня значимости α и φ_1 степеней свободы (если оценка s_i^2 имеет φ_1 степеней свободы). Оценки s_i^2 дисперсий σ_i^2 величин a_i получают по формуле $s_i^2 = C_{ii}s_R^2$, где C_{ii} — i-й элемент главной диагонали дисперсионной матрицы $C = (x^{\tau}x)^{-1}$, x — матрица планирования (таблица).

Проверка значимости коэффициентов при $1 - \alpha = 0{,}9$, $\varphi_1 = 3$ показывает, что коэффициенты a_2, a_3 и a_4 модели $\tilde{y}_A$ и a_1, a_2, a_4 модели $\tilde{y}_L$ незначимы и, следовательно, могут быть исключены из модели, так как $t_{кр}s_i$ для обеих моделей равна примерно 0,12.

Окончательно получаем $\tilde{y}_A = 0{,}261 + 0{,}155x_1$; $\tilde{y}_L = 0{,}292 + 0{,}167x_3$. Разумеется, что представление сложного характера гиперповерхности отклика с овражными ситуациями полиномом первого порядка не может быть точным. Его следует рассматривать как первое приближение, позволяющее сократить затраты для поиска экстремумов, в окрестности которых значительно точнее функцию отклика опишут полиномы более высокого порядка, например второго или третьего. Кроме того, не формализован выбор интервалов варьирования параметров математической модели и, следовательно, остается разумная свобода в их выборе. Тем не менее сравнение результатов машинного эксперимента, полученных в работе [3], с расчетными значениями по приведенным моделям показывает их удовлетворительное соответствие.

Как легко видеть из полиномиальных моделей, в заданных интервалах варьирования рабочих параметров b, QC, C и граничного условия A_0 на амплитуду высокочастотного поля в минимуме его распределения вдоль пространства взаимодействия ЛОВО наибольшее влияние оказывает выбор A_0, а на отстояние минимума от выхода — параметр пространственного заряда QC.

Список литературы. 1. *Роу Дж.* Теория нелинейных явлений в приборах сверхвысоких частот: Пер. с англ. М., 1969. 615 с. 2. *Кац А. М., Ильина Е. М., Манькин И. А.* Нелинейные явления в СВЧ приборах *О*-типа с длительным взаимодействием. М., 1975. 296 с. 3. *Коновалов В. Е., Нешмонин П. В., Молчанова О. Г.* Регрессионный анализ генерационного режима ЛОВО // Радиотехника. 1986. Вып. 79. С. 115—118. 4. *Джонсон Н., Лион Ф.* Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы планирования эксперимента: Пер. с англ. М., 1981. 520 с. 5. *Хартман К., Лецкий Э., Шефер В.* Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов: Пер. с нем. М., 1977. 552 с.

Поступила в редколлегию 17.08.87