

В. М. ПИСАРЕНКО, А. А. ШАДРИН, А. В. ГАЛАГАН

**РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО
УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА МЕТОДОМ ХОКНИ**

Вычисление полей пространственного заряда — наиболее трудоемкий этап решения задач электроники, когда необходимо учитывать кулоновское взаимодействие заряженных частиц. Отсутствие эффективных программ для решения трехмерного уравнения Пуассона до недавнего времени тормозило моделирование физических процессов в сложных областях взаимодействия электронных приборов. Алгоритм Хокни [1] и быстрое преобразование Фурье позволили существенно ускорить решение уравнения Пуассона. Достоинство этого алгоритма, основанного на сочетании быстрого преобразования Фурье (БПФ) и циклической редукции (ЦР), заключается в возможности получения прямого решения без затрат дополнительной памяти ЭВМ. Алгоритм Хокни, являясь достаточно общим, лег в основу метода решения трехмерного уравнения Пуассона. Первая модификация алгоритма изложена в работе [2]. Однако его реализация сопряжена с определенными трудностями. В статье показаны пути программной реализации алгоритма решения трехмерного уравнения Пуассона в прямоугольной системе координат, представлены результаты испытаний созданной программы на примере численной модели генератора со скрещенными полями. Для решения трехмерного уравнения Пуассона вводится пространственная

сетка («арматура») со сторонами N, M, V вдоль координат X, Z соответственно [2]. Для использования программ БПФ и разработанных алгоритмов циклической редукции необходимо, чтобы полнялись следующие соотношения:

$$N = 2^{N_1+1}; M = 2^{M_1+1}; V = 2^{V_1+1}, \quad (1)$$

где N_1, M_1, V_1 — целые числа, $M_1, N_1, V_1 \geq 2$. Запишем граничные условия (ГУ) для системы разностных уравнений (8) [2]:

$$U_{l,0,l} = U_{l,l}^k; U_{l,m,l} = U_{l,l}^a. \quad (2)$$

Здесь $U_{l,l}^k, U_{l,l}^a$ — распределение потенциала на нижней (катод) и верхней (анод) стенках. Если пространство взаимодействия с торцов ограничено экранами, находящимися под нулевым потенциалом, то ГУ дополняются условием $U_{i,k,0} = U_{i,k,V} = 0$ (3). В случае отсутствия экранов вдоль индексов l, i выполняются условия периодичности

$$U_{i,k,l} = U_{i \pm N, k, l}; U_{i, k, l} = U_{i, k, l \pm V}. \quad (4)$$

Такая запись граничных условий позволяет с помощью данного метода вычислять поля пространственного заряда для широкого класса электронных приборов [4].

На рис. 1 изображена укрупненная структурная схема алгоритма решения уравнения Пуассона с ГУ (1)–(4).

Программную реализацию алгоритма начинаем с вычисления трехмерного массива согласно уравнению (18) [2]. Это позволяет исключить уравнения, содержащие нечетный индекс k . Затем, на ярусах сетки с нечетным индексом k выполняем двумерный Фурье-анализ преобразованного массива зарядов. Чтобы осуществить БПФ по двум направлениям, воспользуемся программами FFS, FFA [3]. Эти программы выполняют БПФ реального массива значений функций, и для их реализации не требуется дополнительная память ЭВМ. В целях ускорения работы FFS, FFA введем массивы значений синусов и косинусов. В результате скорость их работы возрастает на 10%. Поскольку нет необходимости восстанавливать порядок гармоник после работы FFA, так как перед FFS необходимо снова делать перестановку, из подпрограмм FFA, FFS исключаются процедуры рекурсивной перестановки гармоник ORD1 и ORD2. Чтобы поставить в соответствие номера гармоник и значения

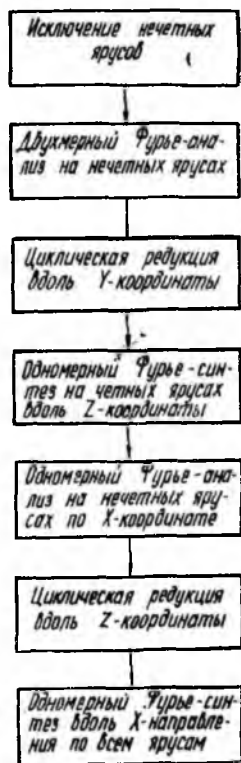


Рис. 1

$$\lambda_{j,m}^1 = 4 \left[\alpha^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{N} j \right) + \beta^2 \left(1 - \cos \frac{\delta\pi}{V} m \right) + 1 \right]^2 - 2, \quad (5)$$

где $\delta = 1$ для условия (3) и $\delta = 2$ — для (4), следует рекурсивно переставить значения массива λ_{jm}^1 с помощью процедур ORD1, ORD2. В результате получается дополнительный выигрыш (до 20 %) по времени работы FFA и FFS.

Выполнение ГУ (3) обеспечивается следующим образом. Распределение заряда в узлах «арматуры» с номерами $l = 0, 1, \dots, V - 1$ (для всех l, k , кроме граничных) «уравновешивается» зарядами, равными по величине, но противоположными по знаку в узлах $l = V, V + 1, \dots, 2V - 1$ для выполнения условия $f_{i,k,l} = -f_{i,k,2V-l}$ (6). Пространственная решетка условно удваивается, а заряд в дополнительной области «зеркально отражается», тем самым обеспечивается нулевой потенциал на границе ($l = 0$). Вдоль индекса l на удвоенном периоде $2V$ распределение заряда представляет собой нечетную функцию. В этом случае БПФ вдоль индекса l проводится специально разработанным алгоритмом синус-преобразования Фурье, который выполняется с помощью соотношений

$$A_m = \frac{2}{V} \sum_{l=1}^{V/2-1} \{(-1)^n f(l) - (-1)^{n+m} f(V-l)\} \sin\left(\frac{\pi}{V}(lm \bmod V)\right); \quad (7)$$

$$A_{V-m'} = \frac{2}{V} \sum_{l=1}^{V/2-1} \{(-1)^q f(l) - (-1)^{q-(V-m')} f(V-m')\} \times \\ \times \sin\left(\frac{\pi}{V}(lm' \bmod V)\right); \quad (8)$$

$$A_{V/2} = \frac{2}{V} \sum_{l=1}^{V/2-1} A(l \bmod 4) f(l);$$

$$n = \text{intier}(lm/V); \quad m = 1, \quad V/2 - 1; \quad (9)$$

$$q = \text{intier}(l(V-m')/V); \quad m' = 1, \quad V/2 - 1;$$

$$A(1) = 1; \quad A(2) = 0; \quad A(3) = -1; \quad A(4) = 0.$$

Обратное преобразование выполняется по тем же соотношениям, только без нормирующего множителя $2/V$. Программная реализация синус-преобразования Фурье с помощью соотношений (7)–(9) показала, что при значениях $V \leq 32$ этот алгоритм по скорости не уступает FFA, FFS, так как он работает с функцией, длина которой в два раза меньше, чем необходимо для БПФ.

Следующим этапом решения уравнения Пуассона является ЦР по вертикали по всем коэффициентам Фурье. Для ее выполнения привлекаются соотношения (26)–(30) [2]. Затем проводится одномерный Фурье-синтез вдоль Z -направления. Для периодических ГУ (4) Фурье-синтез выполняется с помощью FFS [3], а для нулевых ГУ (3) — с использованием соотношений (7)–(9). Одномерный Фурье-анализ на нечетных ярусах вдоль X -направления про-

водим с помощью подпрограммы FFA [3]. В результате исходная система (8) [2] приводится к виду (34) [2], где

$$\mu_j^0 = 2 \left\{ 1 + \beta^2 + \alpha^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{N} j \right) \right\} / \beta^2. \quad (10)$$

ЦР на нечетных ярусах вдоль Z -направления осуществляем по индексу l , привлекая соотношения (39)—(44). При выполнении ЦР целесообразно ввести дополнительный одномерный массив и делать переприсвоение: трехмерный массив — одномерный — трехмерный. За счет этого также достигается экономия времени при выполнении алгоритма ЦР.

Заканчивается реализация алгоритма выполнением одномерного Фурье-синтеза вдоль индекса j (X -направление) для всех k, l с помощью подпрограммы FFS. По указанной методике создана и испытана программа FAPUAS для решения трехмерного уравнения Пуассона

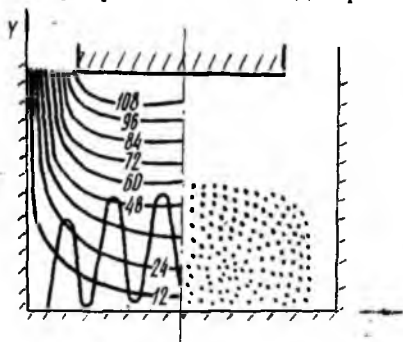


Рис. 2

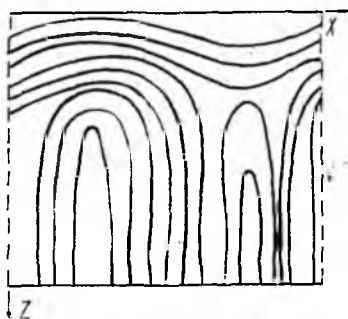


Рис. 3

зона. Программа написана на языке ФОРТРАН-4 для ОС или ДОС ЕС ЭВМ. Точность метода решения уравнения Пуассона проверена сравнением с аналитическими решениями для единичного заряда в пространстве взаимодействия, заданием простого потенциала на стенках и т. д. Относительная погрешность по сравнению с аналитическими решениями составила $10^{-4} \dots 10^{-5}$ при условии, что заряд находится в узле пространственной решетки. Скорость решения уравнения Пуассона при быстродействии 500 тыс. операций/с составила более 4000 узлов/с. Непосредственное приложение программы FAPUAS нашла в численной трехмерной модели магнетрона [4]. На рис. 2 показано распределение потенциала в $Y-Z$ -плоскости пространства взаимодействия магнетронного диода при наличии пространственного заряда, откуда следует, что вблизи торцевых экранов существует неоднородное статическое поле, вызывающее колебательное движение электронов вдоль магнитного поля. Траектория одного из электронов показана сплошной линией. Распределение суммарного потенциала (статического, высокочастотного и кулоновского) в $X-Z$ -плоскости представлено на рис. 3. Здесь показана неоднородность распределения потенциала вблизи торцевых экранов. Именно она приводит к усилению колебательного движения электронов вдоль оси Z .

Таким образом, программа решения трехмерного уравнения Пуассона подтвердила реализуемость алгоритма [2]. Результаты испытаний подтвердили высокую эффективность и точность алгоритма. Это позволяет существенно расширять возможности моделирования электронных приборов различных типов. На примере моделирования генератора со скрещенными полями показано существенное влияние третьего измерения на результаты расчета интегральных и дифференциальных характеристик приборов.

Разработанная программа является составной частью пакета прикладных программ для моделирования физических процессов в трехмерных областях взаимодействия электронных, ионных и полупроводниковых приборов.

Список литературы: 1. *Hockney R. W.* A Fast Direct Solution of Poisson's Equation Using Fourier Analysis // J. of the ACM. 1965. Vol. 12, N 1. P. 95—113. 2. *Шадрин А. А., Шейн А. Г.* Модификация сверхбыстрого алгоритма решения уравнения Пуассона для простых областей взаимодействия электронных приборов // Радиотехника. 1975. Вып. 29. С. 96—105. 3. *Bergland G. D.* A Radix-Eight Fast Fourier Transform Subroutine for Real-Valued // IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics. 1969. AU-17, N 2, June. P. 138—144. 4. *Писаренко В. М., Шадрин А. А.* Численная трехмерная модель генератора М-типа // Радиотехника. 1985. Вып. 75. С. 71—78.

Поступила в редколлегию 26.10.87