УДК 621.391 : 519.2

А.С. ГАВРИШ, канд. физ.-мат. наук, С.В. ЗАБОЛОТНЫЙ, канд. техн.наук, В.В. КОВАЛЬ

РЕКУРРЕНТНЫЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ОЦЕНОК МАКСИМИЗАЦИИ ПОЛИНОМА ПРИ НЕОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ВЫБОРКЕ

Введение

Для нахождения оценок параметров негауссовской случайной последовательности, при её моментно-кумулянтном представлении, хорошо себя зарекомендовал метод максимизации полинома [1]. По своей сути этот метод аналогичен методу максимального правдоподобия, а коренное отличие состоит в используемом способе описания случайной величины. С одной стороны, переход от плотности распределения к конечной последовательности моментов или кумулянтов, описывающих случайную величину, снижает потенциал метода в точности оценивания, но, с другой, – делает его более гибким и универсальным при оценке параметров негауссовских случайных последовательностей. Уравнение максимизации полинома при заданной степени s определяет общий способ нахождения оценки параметров случайной последовательности. Ключевыми элементами уравнения максимизации полинома являются его оптимальные коэффициенты, обеспечивающие минимально возможную дисперсию оценки параметра в классе полиномиальных преобразований s-й степени. Наряду со статистическими свойствами оценок большое внимание уделяется вычислительным факторам при численном решении уравнения. Известно [2], что численные методы решения уравнений можно разделить на два класса: конечные (итеративные) и рекуррентные. При итерационном оценивании используется большой объем входных данных, с необходимостью его накопления и обработки, это приводит к значительным вычислительным трудностям, поэтому особого внимания заслуживают рекуррентные процедуры, при которых используется минимум информации от предыдущих шагов. Важным достоинством рекуррентной процедуры является возможность получения оценки на любом шаге, а использование последующих выборочных значений будет дополнительно уточнять «грубую» оценку.

Учитывая идеологическую близость методов максимального правдоподобия и максимизации полинома, а также глубину исследований задачи нахождения рекуррентной оценки максимального правдоподобия [2 – 4], целесообразно было бы использовать аналогичные подходы и при численном решении уравнений максимизации полинома.

Цель работы – адаптация рекуррентных процедур для нахождения скалярной оценки параметра из решения уравнения максимизации полинома при неодинаково распределенных выборочных значениях. Поставленная цель достигается решением ряда задач:

1) разработать вычислительный метод полиномиального оценивания параметров случайной последовательности, основанный на использовании рекуррентной процедуры;

2) модернизировать рекуррентную процедуру сокращением объема обрабатываемых данных;

3) задать начальное приближение для нахождения рекуррентной оценки максимального правдоподобия.

Постановка задачи и результаты

В распоряжении наблюдателя имеется выборка независимых неодинаково распределенных значений $\vec{x} = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$ объемом N из генеральной совокупности значений случайной величины ξ. Для нахождения рекуррентной оценки параметра может быть использована только часть выборочных значений n, а оставшиеся $(N-n)$ используются для уточнения результата. В качестве случайной величины может быть рассмотрена, например аддитивно-мультипликативная смесь радиосигнала и помехи, каждая составляющая которой описывается своим набором кумулянтов [5].

Согласно методу максимизации полинома [1] скалярная оценка параметра в общем случае находится из решения уравнения максимизации полинома вида

$$\sum_{v=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}k_{iv}(\vartheta)[x_v^i - m_{iv}(\vartheta)]\bigg|_{\vartheta=\hat{\vartheta}} = 0, \tag{1}$$

где $m_{iv}(\vartheta)$ – начальные моменты i-го порядка рассматриваемой случайной величины ξ, зависящие от оцениваемого параметра ϑ и номера выборочного значения v.

Оптимальные коэффициенты $k_{iv}(\vartheta)$, $i=\overline{1,s}$ находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{s}k_{jv}(\vartheta)F_{(i,j)v}(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta}m_{iv}(\vartheta), \quad i=\overline{1,s}, \quad v=\overline{1,n}.$$

В последнем выражении функции $F_{(i,j)v}(\vartheta)$ – центрированные коррелянты размером (i,j), которые связаны с начальными моментами соотношением

$$F_{(i,j)v}(\vartheta) = m_{(i+j)v}(\vartheta) - m_{iv}(\vartheta)m_{jv}(\vartheta).$$

Для получения рекуррентной процедуры воспользуемся эвристическим приемом, предложенным в работах [6, 7].

Пусть $\breve{\vartheta}^{(n)}$ является оценкой, получаемой из решения уравнения (1), при n выборочных значений. Тогда при наблюдении совокупности $(n+1)$ выборочных значений оценка будет находиться из решения уравнения

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n+1}k_{iv}(\vartheta)[x_v^i - m_{iv}(\vartheta)]\Big|_{\vartheta=\breve{\vartheta}^{(n+1)}} = 0.$$

Для получения рекуррентной процедуры выражение для нахождения скалярной оценки удобно переписать в виде

$$f_n(x_1,\ldots,x_n/\vartheta) + f_{n+1}(x_{n+1}/\vartheta)\big|_{\vartheta=\breve{\vartheta}^{(n+1)}} = 0, \tag{2}$$

где функция $f_n(x_1,\ldots,x_n/\vartheta)$ – уравнение максимизации полинома при объеме выборки n; $f_{n+1}(x_{n+1}/\vartheta)$ – уравнение максимизации полинома, зависящее только от вновь полученного выборочного значения x_{n+1}.

Так как значение $\breve{\vartheta}^{(n+1)}$ незначительно отличается от $\breve{\vartheta}^{(n)}$, то левую часть уравнения (2) можно разложить в ряд Тейлора в окрестности значения $\breve{\vartheta}^{(n)}$, ограничившись двумя членами:

$$f_n(x_1,\ldots,x_n/\vartheta^{(n)}) + f_{n+1}(x_{n+1}/\vartheta^{(n)}) +$$
$$+(\breve{\vartheta}^{(n+1)} - \breve{\vartheta}^{(n)})\frac{d}{d\breve{\vartheta}^{(n)}}[f_n(x_1,\ldots,x_n/\vartheta^{(n)}) + f_{n+1}(x_{n+1}/\vartheta^{(n)})] = 0.$$

Используя это разложение, можем получить рекуррентное соотношение для определения очередного значения оценки

$$\breve{\vartheta}^{(n+1)} = \breve{\vartheta}^{(n)} - \frac{f_n(x_1,...,x_n/\breve{\vartheta}^{(n)}) + f_{n+1}(x_{n+1}/\breve{\vartheta}^{(n)})}{\frac{d}{d\breve{\vartheta}^{(n)}}[f_n(x_1,...,x_n/\breve{\vartheta}^{(n)}) + f_{n+1}(x_{n+1}/\breve{\vartheta}^{(n)})]}. \quad (3)$$

В выражении (3) первое слагаемое числителя $f_n(x_1,...,x_n/\vartheta^{(n)})$ обращается в нуль, поскольку $\breve{\vartheta}^{(n)}$ является решением уравнения максимизации полинома для текущего n-го шага. Распишем знаменатель дроби выражения (3), имеем

$$\frac{d}{d\breve{\vartheta}^{(n)}}[f_n(x_1,...,x_n/\breve{\vartheta}^{(n)}) + f_{n+1}(x_{n+1}/\breve{\vartheta}^{(n)})] = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}\frac{d}{d\breve{\vartheta}^{(n)}}k_{i\nu}(\breve{\vartheta}^{(n)})[x_\nu^i - m_{i\nu}(\breve{\vartheta}^{(n)})] +$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\frac{d}{d\breve{\vartheta}^{(n)}}k_{i(n+1)}(\breve{\vartheta}^{(n)})[x_{(n+1)}^i - m_{i(n+1)}(\breve{\vartheta}^{(n)})] - \sum_{\nu=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{s}k_{i\nu}(\breve{\vartheta}^{(n)})\frac{d}{d\breve{\vartheta}^{(n)}}m_{i\nu}(\breve{\vartheta}^{(n)}).$$

Для упрощения записи введем обозначения:

$$z(\vec{x}_n/\breve{\vartheta}^{(n)}) = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}\frac{d}{d\breve{\vartheta}^{(n)}}k_{i\nu}(\breve{\vartheta}^{(n)})[x_\nu^i - m_{i\nu}(\breve{\vartheta}^{(n)})],$$

$$d(x_{n+1}/\breve{\vartheta}^{(n)}) = \sum_{i=1}^{s}\frac{d}{d\breve{\vartheta}^{(n)}}k_{i(n+1)}(\breve{\vartheta}^{(n)})[x_{(n+1)}^i - m_{i(n+1)}(\breve{\vartheta}^{(n)})],$$

$$J_{s(n+1)}(\breve{\vartheta}^{(n)}) = \sum_{\nu=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{s}k_{i\nu}(\breve{\vartheta}^{(n)})\frac{d}{d\breve{\vartheta}^{(n)}}m_{i\nu}(\breve{\vartheta}^{(n)}).$$

С учетом введенных обозначений, выражение (3) перепишется в виде

$$\breve{\vartheta}^{(n+1)} = \breve{\vartheta}^{(n)} - \frac{f_{n+1}(x_{n+1}/\breve{\vartheta}^{(n)})}{z(\vec{x}_n/\breve{\vartheta}^{(n)}) + d(x_{n+1}/\breve{\vartheta}^{(n)}) - J_{s(n+1)}(\breve{\vartheta}^{(n)})}. \quad (4)$$

Выражение вида (4) представляет собой рекуррентное соотношение, в котором следующее значение оценки $\breve{\vartheta}^{(n+1)}$ определяется через текущее $\breve{\vartheta}^{(n)}$ с учетом поправки, представленной в виде дроби. Числитель поправки зависит только от последнего выборочного значения x_{n+1} и оценки, полученной на текущем шаге $\breve{\vartheta}^{(n)}$. Знаменатель поправки зависит от всей совокупности выборочных данных $\vec{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}\}$ и оценки, полученной на текущем шаге $\breve{\vartheta}^{(n)}$. Последнее утверждение лишает рекуррентное соотношение (4) преимуществ, связанных с сокращением объема обрабатываемых данных. Существует ряд способов [2, 3] упрощения рекуррентной процедуры, описываемой выражением (4). По аналогии с процедурой аналогичной процедуре Сакрисона [2, 4] можно показать, что при большом объеме выборки n справедливо соотношение

$$z(\vec{x}_n/\breve{\vartheta}^{(n)}) + d(x_{n+1}/\breve{\vartheta}^{(n)}) << J_{s(n+1)}(\breve{\vartheta}^{(n)}).$$

Тогда для приближенного вычисления искомой оценки от выражения (4) можно перейти к рекуррентной процедуре вида

$$\breve{\vartheta}^{(n+1)} = \breve{\vartheta}^{(n)} + f_{n+1}(x_{n+1}/\breve{\vartheta}^{(n)})J_{s(n+1)}^{-1}(\breve{\vartheta}^{(n)}). \quad (5)$$

В последнем соотношении поправка к оценке $\breve{\vartheta}^{(n)}$, полученной на текущем шаге, не зависит от всей совокупности выборочных значений, а только от последнего x_{n+1}, что в вычислительном плане значительно упрощает процесс нахождения оценки параметра $\breve{\vartheta}^{(n+1)}$.

Отметим, что рассмотренные рекуррентные процедуры нахождения оценок максимизации полинома являются приближенными и чувствительны к начальному приближению.

В работе [2] в качестве начального приближения $\breve{\vartheta}_0$ рекомендуется выбирать значение с учетом имеющихся представлений о величине и диапазоне изменения оцениваемого параметра, а в случае отсутствия таких сведений – принимать его равным нулю. Как альтернативу можно использовать решение уравнения (1) при степени полинома $s = 1$ при одном выборочном значении $n = 1$.

Выводы

В данной работе синтезированы вычислительные методы полиномиального оценивания параметров с использованием рекуррентных процедур. Использование рекуррентного оценивания позволяет существенно сократить вычисления по сравнению с итеративными процедурами, а результат вычислений может быть предъявлен на любом шаге. Предложенные процедуры пригодны для нахождения скалярных оценок параметров при неодинаково распределенных выборочных значениях. Наибольший интерес из рекуррентных методов представляет процедура, аналогичная процедуре Сакрисона, согласно которой текущее значение оценки зависит от значения оценки на предыдущем шаге и поправки, зависящей не от всех выборочных значений, а только от последнего. В качестве начального приближения можно использовать решение уравнения максимизации полинома при степени полинома $s = 1$ и при одном выборочном значении $n = 1$, которое чаще всего может быть найдено аналитически.

Список литературы: 1. *Кунченко, Ю.П., Лега, Ю.Г.* Оценка параметров случайных величин методом максимизации полинома. – К. : Наук. думка, 1992. – 180 с. 2. *Репин, В.Г., Тартаковский, Г.П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптации информационных систем. – М. : Сов. радио, 1977. – 432 с. 3. *Невельсон, М.Б., Хасьминский, Р.З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. – М. : Наука, 1972. – 304 с. 4. *Sakrison, D.T.* Efficient recursive estimation, application to estimating the parameters of covariance functions // Internat. Jorn. Engineering Science. – 1965. – Vol. 3, N4. – P. 461-483. 5. *Коваль, В.В.* Застосування методу максимізації поліному для оцінювання параметрів радіосигналу на фоні адитивно-мультиплікативних завад // Праці III Міжнар. наук.-практ. конф. «Обробка сигналів і негауссівських процесів» : Тези доповідей. – Черкаси : ЧДТУ, 2011. – С.116-118. 6. *Цыпкин, Я.З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. – М. : Наука, 1968. – 400 с. 7. *Цыпкин, Я.З.* Основы теории обучающихся систем. – М. : Наука, 1970. – 252 с.

Черкасский государственный
технологический университет

Поступила в редколлегию 07.10.2011