

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕЛИНЕЙНОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ

Введение

Взаимодействие электромагнитных сигналов с нелинейной средой имеет важное значение во многих физических явлениях и их использовании в радиотехнических и оптических устройствах, в частности в современной оптоэлектронике. Свойства нелинейных сред широко используются например в полностью оптических логических селекторах [1], для генерирования вторичных и высших гармоник, для компрессии сверхкоротких импульсов и др. [2]–[5].

Для решения линейных электродинамических задач имеется широкий выбор методов, основанных как на дифференциальном, так и интегральном подходах, однако для нелинейных задач такой выбор значительно беднее, особенно среди интегральных методов. В данной статье предлагается метод, основанный на интегральных уравнениях Вольтерра во временной области (МИУВ) [6], [7], которые эквивалентны электродинамическим уравнениям Максвелла. Данный подход для ряда задач превосходит по точности широко используемый в настоящее время метод конечных разностей во временной области FDTD [8] и обладает высокой стабильностью при моделировании нелинейных сред.

Формулировка задачи

Рассмотрим электромагнитный сигнал $E_0(t, x)$, который распространяется в однородной линейной неограниченной среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε . В момент времени $t_0 = 0$ среда в области $0 < x < L$ приобретает нелинейные свойства (например вследствие воздействия мощного внешнего поля) и описывается следующей функцией поляризации:

$$P(t, x) = \varepsilon_0(\varepsilon_1 - 1)E(t, x) + \gamma E^3(t, x).$$

Геометрия задачи представлена на рис. 1.

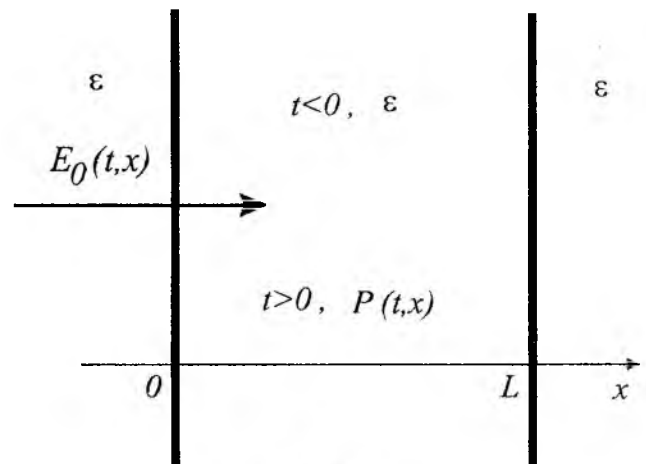


Рис. 1

Электромагнитное поле внутри и вне слоя после момента времени $t > t_0$ описывается следующим уравнением:

$$E(t, x) = E_0(t, x) - \frac{1}{2v} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t dt' \int_0^L dx' \delta\left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v}\right) \left[\frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} P(t', x') - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} E(t', x') \right], \quad (1)$$

где $v = c/\sqrt{\varepsilon}$, c – скорость света в вакууме, $\delta(t)$ дельта-функция Дирака, L – толщина слоя и ε_0 – диэлектрическая постоянная.

Для реализации численного счета перейдем к безразмерным координатам, нормированным на толщину слоя: $\tau = vt/L$, $\xi = x/L$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$E(\tau, \xi) = E_0(\tau, \xi) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau d\tau' \int_0^1 d\xi' \delta(\tau - \tau' - |\xi - \xi'|) \left[\frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} P(\tau', \xi') - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} E(\tau', \xi') \right]. \quad (2)$$

Учитывая, что $\delta(\tau - \tau' - |\xi - \xi'|) = \delta(\tau - \tau' - \xi + \xi') + \delta(\tau - \tau' + \xi - \xi')$, можно вычислить аналитически интеграл по пространственной координате ξ в уравнении (2):

$$E(\tau, \xi) = E_0(\tau, \xi) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} (H + L). \quad (3)$$

$$\text{где } H = \int_{\substack{0 < \tau' < \tau \\ 0 \leq \xi + \tau - \tau' \leq 1}} \tilde{P}(\tau', \xi + (\tau - \tau')) d\tau' \text{ и } L = \int_{\substack{0 < \tau' < \tau \\ 0 \leq \xi + \tau - \tau' \leq 1}} \tilde{P}(\tau', \xi - (\tau - \tau')) d\tau'. \quad (4)$$

Два интеграла L и H в уравнении (3) соответствуют двум, сходящимся к вычисляемой точке, диагональным линиям (нижняя и верхняя линии соответственно). В рассматриваемом случае среда в слое является нестационарным диэлектриком с кубической нелинейностью, следовательно, функция \tilde{P} в интегралах (4) определяется как

$$\tilde{P}(\tau, \xi) = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} P(\tau, \xi) - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} E(\tau, \xi) = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} - 1 \right) E(\tau, \xi) + \frac{\gamma}{\varepsilon \varepsilon_0} E^3(\tau, \xi), \quad (5)$$

где $\frac{\gamma}{\varepsilon \varepsilon_0}$ – коэффициент нелинейности.

Реализация алгоритма численного счета

Для решения уравнения (3) построим квадратную пространственно-временную сетку с равными шагами $\Delta \xi = \Delta \tau = h$ и введём следующие обозначения:

$$\tau_n = hn, \quad \xi_i = hi, \quad E_i^n = E(\tau_n, \xi_i), \quad L_i^n = L(\tau_n, \xi_i), \quad H_i^n = H(\tau_n, \xi_i), \quad (6)$$

Уравнение (3) в обозначениях (6) примет вид:

$$E_i^n = E_{0i}^n - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} [L_i^n + H_i^n]. \quad (7)$$

В уравнении (7) проведем дискретизацию производной и заменим интегралы суммами, учитывая, что делитель дифференцирования сократится с множителем интегрирования:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} L_i^n = L_i^n - L_i^{n-1}, \quad L_i^n = \sum_{m=l}^{n-1} k_m P_{i-n+m}^m, \quad H_i^n = \sum_{m=l}^{n-1} k_m P_{i+n-m}^m, \quad (8)$$

где l – нижний предел интегрирования по времени и в итерационном алгоритме вычисляется неявно, k_m – весовой коэффициент, выбирается в зависимости от применяемой формулы интегрирования.

После подстановки (8) в уравнение (7) последнее примет вид

$$E_i^n = E_{0i}^n - \frac{1}{2} [L_i^n - L_i^{n-1} + H_i^n - H_i^{n-1}]. \quad (9)$$

Используя полуоткрытую формулу трапеций для интегрирования (8)

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x) dx = h \left(\frac{1}{2} f_1 + f_2 + \dots + f_{n-2} + \frac{3}{2} f_{n-1} \right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad (10)$$

можно переопределить операцию интегрирования как

$$L_i^n = \frac{1}{2} P_{i-n+l}^l + \sum_{m=l+1}^{n-2} P_{i-n+m}^m + \frac{3}{2} P_{i-l}^{n-1} = LS_{i-2}^{n-2} + \frac{3}{2} P_{i-l}^{n-1}, \quad (11)$$

где переменная $LS_{i-2}^{n-2} = \frac{1}{2} P_{i-n+l}^l + \sum_{m=l+1}^{n-2} P_{i-n+m}^m$ является переменной-аккумулятором, позволяющей избежать повторных операций суммирования и приводящей процедуру нахождения

интеграла L_i^n к единственной операции сложения двух слагаемых. Однако на каждой итерации необходимо обновлять LS_i^n в соответствии с итерационным соотношением

$$LS_i^0 = \frac{1}{2}P_i^0 \text{ и } LS_i^n = LS_{i-1}^{n-1} + P_i^n \text{ для } n > 0. \quad (12)$$

Для интеграла H вычислительные соотношения аналогичны. Приведенные выше выражения позволяют реализовать итерационный алгоритм для построения решения уравнения (7).

Результаты моделирования – Плоская волна в линейном и нелинейном диэлектрических слоях

Рассмотрим преобразование плоской волны в нелинейном слое. Исходный сигнал задан функцией $E_0 = \cos(2\pi\eta(\tau - \xi))$; где η – нормированная частота, $\eta = \frac{\omega L}{2\pi v} = \frac{L}{\lambda}$ – соответствует количеству полных длин волн λ , помещающихся в слое толщиной L , где λ – длина падающей волны в фоновой среде. Параметры среды $\varepsilon = 9$, $\varepsilon_1 = 11$, нормированная частота исходной волны $\eta = 1$. Длительность моделирования процесса τ_{\max} равна 100 в безразмерных единицах (что соответствует 1пс), шаг интегрирования $h=0.01$. Таким образом количество узлов $NX=100$ и $NT=10000$, требуемый объем оперативной памяти равен 6kb, объем памяти для хранения результатов равен 8Mb. Длительность вычислительного процесса равна ~2.8с на ПК Celeron-700 МГц с 128 Mb ОЗУ.

Сравнение результатов для случаев линейного и нелинейного диэлектрических слоев, изменение формы волны и её замедление в нелинейном диэлектрическом слое с разными коэффициентами нелинейности ($\gamma = 0.1$, $\gamma = 1$) представлены на рис. 2:

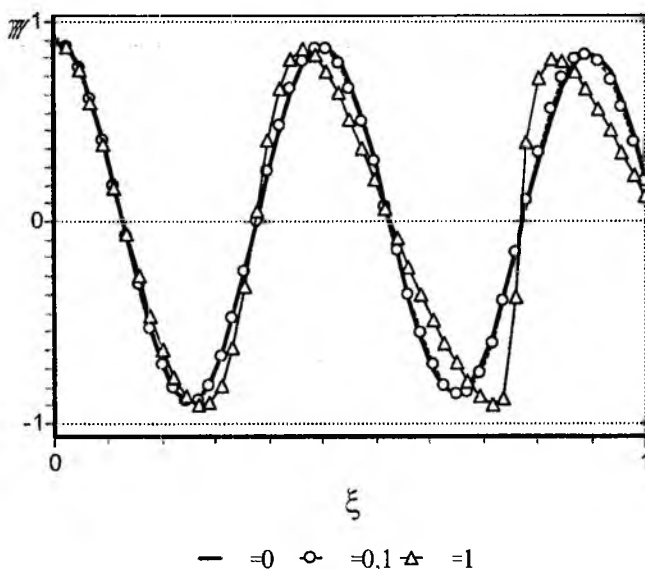


Рис. 2

Как и ожидалось, увеличение коэффициента нелинейности ведет к более сильному изменению формы сигнала и его замедлению.

Моделирование распространения солитона в нелинейной среде

Рассмотрим взаимодействие солитона подобного сигнала вида $E(\tau, \xi) = \text{sech}\left(\frac{\tau - \xi}{T}\right) \cos\left(\frac{\xi}{\Lambda}\right)$, где T – нормированная длительность сигнала и Λ – опорная частота, с линейным и нелинейным слоями. Данный вид сигнала был получен как решение

нелинейного уравнения Шредингера для нелинейных сред, поэтому представляет интерес исследовать, удовлетворяет ли это решение рассматриваемому уравнению Вольтерра. Для сравнения также рассмотрим преобразование сигнала в виде гауссова импульса

$$E(\tau, \xi) = e^{-\frac{(\tau - \tau_0 - \xi)^2}{2\sigma^2}} \cos(2\pi\eta(\tau - \xi)).$$

Для численного эксперимента выбраны следующие параметры: диэлектрическая проницаемость сред $\varepsilon = 9$, $\varepsilon_1 = 9$, коэффициент нелинейности слоя $\gamma = 0,25$; параметры солитона $T = 0,2$ и $\Lambda = 0,02$; параметры гауссова импульса $\sigma = 0,2$, $\tau_0 = 0$ и $\eta = 10$. Длительность моделирования τ_{\max} процесса равна 5 в безразмерных единицах и шаг интегрирования $h = 0,001$. Таким образом количество узлов $NX = 1000$ и $NT = 5000$, используемый объем оперативной памяти $\sim 91\text{Mb}$. Продолжительность моделирования равна $\sim 16\text{с}$ на ПК Athlon-1800 с 512Mb ОЗУ. Результаты моделирования представлены на рис. 3.

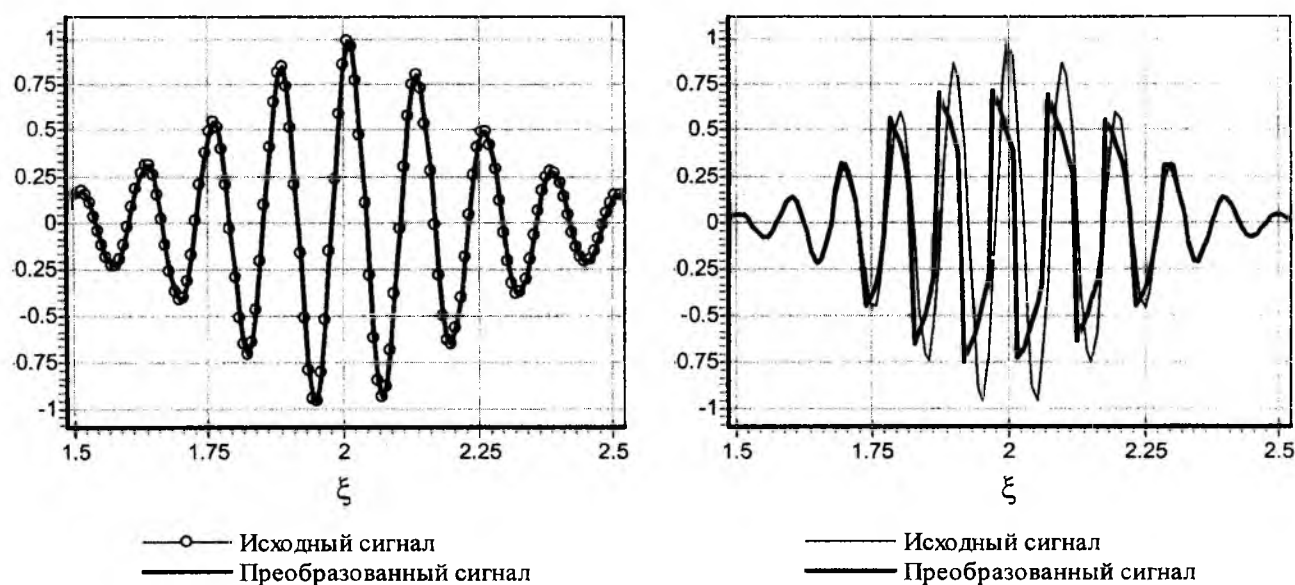


Рис. 3

На графиках отчетливо видно существенное влияние нелинейности среды в слое на гауссов импульс, который при этом значительно искажается, и отсутствие изменений солитонного сигнала, что косвенно подтверждает адекватность решения, полученного рассматриваемым методом интегральных уравнений Вольтерра для рассматриваемого класса задач.

Заключение

В данной работе представлен численно-аналитический метод для моделирования взаимодействия электромагнитного сигнала произвольной формы с плоским слоем, заполненным нелинейной диэлектрической средой. Метод основан на использовании интегральных уравнений Вольтерра во временной области, которые эквивалентны уравнениям Максвелла во временной области с начальными условиями. Разработано программное обеспечение для автоматизации проведения численных экспериментов. Представлены результаты численного моделирования взаимодействия плоской электромагнитной волны, гауссова импульса и солитонного сигнала с нелинейным диэлектрическим слоем.

Список литературы: 1. *T.Yabu, M.Geshiro and others*, All-Optical Logic Gates Containing a Two-Mode Nonlinear Waveguide. *IEEE J. of Quantum Electronics*, vol. 38, No. 1, 2002. 2. *R. J. Hawkins and J.S. Kallman*, Lasing in tilted-waveguide semiconductor laser amplifiers, *Optical and Quantum Electronics*, Vol. 26, pp. 207 – 217, 1994. 3. *S.C. Hagness, R.M. Joseph and A. Taflove*, Subpicosecond electrodynamic of distributed Bragg reflector microlasera: Results from finite difference time domain simulations, *Radio Science*, Vol, 31, No 4, pp. 931 – 941, 1996. 4. *J. W.D. Chi, C.L. Chao and M.K. Rao*, Time-domain large-signal investigation on non-linear interactions between an optical pulse and semiconductor waveguide, *IEEE J. of Quantum Electronics*, Vol. 37, No 10, pp. 1329 – 1336, 2001. 5. *Y.Jeong and B. Lee*, Characteristics of second-harmonic generation including third-order non-linear interactions, *IEEE J. of Quantum Electronics*, Vol. 37, No 10, pp. 1292 – 1300, 2001. 6. *Нерух А.Г., Хижняк Н.А.* Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики. Харьков: Тест–Радио, 1991. 7. *A.G. Nerukh, I.V. Scherbatko, M. Marciniak*, Electromagnetics of Modulated Media with Applications to Photonics, Nat. Institute of Telecommunic. Publishing House, Warsaw, 2001. 8. *F.V. Fedotov, A.G. Nerukh, I.V. Scherbatko*. Comparison of the FDTD and direct-integrating methods for electrodynamic problem in time-varying medium; 5th International conference on applied electromagnetics. 8-10 October 2001, Niš, Yugoslavia. 9. *K.M. Yemelyanov, F.V. Fedotov, A.G. Nerukh*: Numerical Simulations of Electromagnetic Transients in Nonstationary Plasma Layers, Proc. of 2001 3rd International Conference on Transparent Optical Networks, June 18-21, 2001, Cracow, Poland, pp. 226 – 229. 10. *F.V. Fedotov, A.G. Nerukh, T.M. Benson, Ph. Sewell*. Simulation of an Electromagnetic Signal Propagation through a Layer of Nonlinear Dielectric using Integral Equations Approach. 10th International Workshop on Optical Waveguide Theory and Numerical Modelling. 5th–6th April 2002, Nottingham, UK, p. 41.

*Харьковский национальный
университет радиоэлектроники*

Поступила в редколлегию 29.04.2003