УДК 621.391

Ю. П. ВИРЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук, *И. Н. ДОМНИНА*,
А. С. МАЗМАНИШВИЛИ, д-р физ.-мат. наук

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ ОПТИЧЕСКОЙ СВЯЗИ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ КОГЕРЕНТНЫХ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СЛУЧАЙНОЙ ПОМЕХИ

В оптических системах связи полезные сообщения при передаче преобразуются в последовательность двойных (бинарных) символов. Передача сигнального (когерентного) излучения соответствует символу «1», а символу «0» отвечает его отсутствие, априорная вероятность каждого из этих символов может быть принята за 0,5. Однако на когерентное излучение накладывается помеха, что обуславливает возможность ошибочного приема. В квантовом режиме работы системы связи, когда регистрируются одиночные отсчеты, вероятность ошибки $P_{\text{ош}}$ отлична от нуля даже в отсутствие помехи:

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \exp(-m_c), \tag{1}$$

где m_c — среднее число отсчетов когерентного излучения, а при наличии аддетивного шума она возрастает.

В работе изучена помехоустойчивость длинных линий оптической связи, при этом в качестве помехи рассмотрено излучение, обладающее свойством гармонического случайного процесса [1]. Такой процесс описывается дифференциальным уравнением второго порядка $\ddot{\alpha} + 2\gamma\dot{\alpha} + \omega^2\alpha = f(t)$ (2) с белым шумом $f(t)$ в качестве порождающего процесса, $\langle f(t) f^*(t)\rangle = \sigma\delta(t - t')$ и интенсивностью $\sigma_\alpha = \langle |\alpha|^2\rangle = \sigma/4\beta\omega^3$ (3). Для рассмотрения системы, характеризуемой высокой помехоустойчивостью, в дальнейшем примем, что отношение сигнал к шуму велико:

$$m_c \gg m_ш; \tag{4}$$

$$m_c = \int_0^T \mathrm{d}t\, |\beta(t)|^2; \quad m_ш = T\sigma_\alpha, \tag{5}$$

где $\beta(t)$ — комплексная амплитуда когерентного излучения, T — длительность приема символа.

Вероятность $P(m)$ регистрации m фотоотсчетов при детектировании суперпозиции когерентного излучения и шума можно охарактеризовать в терминах производящей функции отсчетов $Q(\lambda) = \langle\exp(-\lambda m)\rangle$. Таким образом, окончательное решение задачи можно найти, если удастся произвести указанное усреднение по всем реализациям случайного процесса $\alpha(t)$ и затем определить функцию распределения поглощенной энергии

$$I = \int_0^T \mathrm{d}t\, |\beta(t) + \alpha(t)|^2. \tag{6}$$

Случайный процесс (2) является двухкомпонентным нормальным марковским процессом. С учетом этого перейдем при вычислении производящей функции $Q(\lambda) = \langle\exp(-\lambda I)\rangle$ (7), к векторным переменным

$$a(t) = \left(\alpha(t),\ \frac{\dot{\alpha}(t)}{\omega}\right); \quad b(t) = (\beta(t),\ 0), \tag{8}$$

тогда

$$I = \int_0^T dt\, [(a(t) + b(t));\ V(a(t) + b(t))^+]; \tag{9}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

— матрица наблюдения. Параметр ε в ней введен формально для обеспечения условия $\det V \neq 0$. Как это будет видно из результирующих выражений, они зависят от V в положительных степенях, поэтому в них будет осуществлен предельный переход $\varepsilon \to 0$. В терминах уравнения (2) процессу $a(t)$ отвечают диссипативная матрица системы A и ковариантная матрица S:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 2\gamma \end{pmatrix} \quad (11); \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma\omega^{-2} \end{pmatrix} \quad (12),$$

а также корреляционный оператор с ядром

$$K(t, t') \equiv \langle a(t) \otimes a^+(t') \rangle = \Theta(t - t') \exp(-At + At') L + \\ + \Theta(t' - t) L \exp(A^+ t - A^+ t'), \tag{13}$$

где, в свою очередь, матрица L — решение стационарного уравнения Ляпунова $AL + LA^+ = S$ (14). Перейдем в новое линейное пространство с помощью преобразований

$$a_V(t) = V^{1/2} a(t); \quad b_V(t) = V^{1/2} b(t);$$

$$A_V = V^{1/2} A V^{-1/2}, \quad S_V = V^{1/2} S V^{1/2}, \quad L_V = V^{1/2} L V^{1/2}, \tag{15}$$

зафиксировав при этом некоторый квадратный корень из матрицы V, при этом матрица $K(t, t')$ также перейдет в матрицу $K_V(t, t')$, а

$$Q(\lambda) = \left\langle \exp\left\{-\lambda \int_0^T dt \, |a_V(t) + b_V(t)|^2\right\}\right\rangle. \tag{16}$$

Воспользуемся теперь разложением случайного процесса $a_V(t)$ в ортонормированном базисе функций $\{e_n(t)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, отвечающим корреляционному оператору $K_V(t, t')$:

$$e_n(t) = \lambda_n \int_0^T dt' K_V(t, t') e_n(t'), \tag{17}$$

где $\{\lambda_n\}$ набор собственных чисел.

Стандартным путем [1] найдем

$$Q(\lambda) = Q_a(\lambda) \exp\left\{-\lambda \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + 2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|^2}{\lambda_n + 2\lambda}\right\}, \tag{18}$$

$$\text{где } b_n = \int_0^T dt e_n(t) \beta_V^+(t); \quad Q_a(\lambda) = \left\langle \exp\left\{-\lambda \int_0^T dt \, |\alpha(t)|^2\right\}\right\rangle \tag{19}$$

— производящая функция отсчетов шумового излучения. Пусть $f_1(t)$, $f_2(t)$ произвольные двухкомпонентные функции. Под скалярным произведением (f_1, f_2) понимаем

$$(f_1, f_2) = \int_0^T dt \, f_1(t) f_2^*(t), \tag{20}$$

в терминах этого обозначения

$$Q(\lambda) = \langle \exp\{-\lambda (a_V + b_V, a_V + b_V)\} \rangle = \\ = Q_a(\lambda) \exp\{-\lambda (b_V, (I + \lambda K_V)^{-1} b_V)\}. \tag{21}$$

Рассмотрим оператор $(I + \lambda K_V)^{-1}$. Пусть некоторая двухкомпонентная функция $\varphi(t)$ такова, что $\varphi = (I + \lambda K_V)^{-1} b_V$. Это означает, что $(I+\lambda K_V)\varphi = b_V$. В развернутой форме это уравнение для $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) + \lambda \int_0^T dt' K_V(t, t') \varphi(t') = b_V(t). \tag{22}$$

Используем векторные функции

$$k_n(t) = \int_0^t \exp(A_V t - A_V t') L_V e_n(t')\, dt'; \tag{23}$$

$$g_n(t) = \int_t^T \exp(A_V^+ t' - A_V^+ t)\, e_n(t')\, dt',$$

тогда интегральное уравнение (22) эквивалентно следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{k}_n &= (A_V - \lambda L_V) k_n - \lambda L_V^2 g_n + L_V b_V; \\ \dot{g}_n &= \lambda k_n + (-A_V^+ + \lambda L_V) g_n - b_V \end{aligned} \tag{24}$$

с граничными условиями

$$k_n(0) = 0, \quad (\dot{k}_k + L_V \dot{g}_n - A_V k_n)|_{t=T} = 0. \tag{25}$$

Решение линейного векторного уравнения (24) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} k_n(t) \\ g_n(t) \end{pmatrix} = \exp(H_V t) \begin{pmatrix} 0 \\ g_0 \end{pmatrix} + \int_0^t dt' \exp(H_V t - H_V t') \begin{pmatrix} L_V b_V(t') \\ -b_V(t') \end{pmatrix}, \tag{26}$$

где (4×4) — матрица

$$H = \left(\begin{array}{c|c} A_V - \lambda L_V & -\lambda L_V^2 \\ \hline \lambda & -A^+ + \lambda L_V \end{array}\right). \tag{27}$$

Обозначим фундаментальное решение системы (24) следующим образом:

$$\exp(H_V t) = \left(\begin{array}{c|c} E_1(\lambda, t) & E_2(\lambda, t) \\ \hline E_3(\lambda, t) & E_4(\lambda, t) \end{array}\right), \tag{28}$$

введя при этом четыре (2×2)-матрицы E_1, E_2, E_3, E_4. Тогда

$$k_n(t) = E_2(\lambda, t) g_0 + \int_0^t dt' [E_1(\lambda, t-t') L_V - E_2(\lambda, t-t')] b_V(t');$$

$$g_n(t) = E_4(\lambda, t) g_0 + \int_0^t dt' [E_3(\lambda, t-t') L_V - E_4(\lambda, t-t')] b_V(t'). \tag{29}$$

Определяя аналогично производные от этих функций, находим векторную постоянную

$$g_0 = E_4^{-1}(\lambda, T)\int\limits_0^T dt'\,[E_4(\lambda, T-t')L_V - E_3(\lambda, T-t')]\,b_V(t'). \tag{30}$$

Итак, искомым решением интегрального уравнения (22) является векторная функция

$$\begin{aligned}\varphi(t) = b_V(t) + \lambda[E_2(\lambda, t) + L_V E_4(\lambda, t)]\,E_4^{-1}(\lambda, T)\times\\ \times\int\limits_0^T dt'\,[E_3(\lambda, T-t')L_V - E_4(\lambda, T-t')]\,b_V(t') -\\ -\lambda\int\limits_0^t dt'\,[E_1(\lambda, t-t')L_V - E_2(\lambda, t-t') -\\ -L_V E_3(\lambda, t-t')L_V + L_V E_4(\lambda, t-t')]\,b_V(t'),\end{aligned} \tag{31}$$

что позволяет записать аналитическое выражение для искомой производящей функции фотоотсчетов

$$Q(\lambda) = Q_a(\lambda)\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^T dt\,\varphi(t)\,b_V^{+}(t)\right\}. \tag{32}$$

Условие относительной малости интенсивности шумового излучения означает, что в выражении для полного среднего числа отсчетов $\langle m\rangle = m_c + m_ш$ (33) второе слагаемое значительно меньше первого. Это позволяет, считая отношение $m_ш/m_c$ малым параметром, найти асимптотическое представление для функций $Q(\lambda)$ и $P(m)$. С этой целью воспользуемся матричным аналогом формулы Коши для функции от матриц, а также формулами обращения матрицы, образованной матрицами-блоками [2]. Из (27), (28) находим

$$E_1(\lambda, t) = \oint\frac{dz}{2\pi i}(zI + A_V^{+} - \lambda L_V)\,R(z)\,e^{zt};$$

$$E_2(\lambda, t) = -\oint\frac{dz}{2\pi i}(zI + A_V^{+} - \lambda L_V)\,R(z)\,\lambda L_V^2(zI + A_V^{+} - \lambda L_V)\,e^{zt};$$

$$E_3(\lambda, t) = \lambda\oint\frac{dz}{2\pi i}R(z)\,e^{zt};\quad E_4(\lambda, t) = \oint\frac{dz}{2\pi i}R(z)\,e^{zt}, \tag{34}$$

где резольвентный множитель равен

$$R(z) = [(zI - A_V + \lambda L_V)(zI + A_V^{+} - \lambda L_V) + \lambda^2 L_V^2]^{-1}, \tag{35}$$

а контур интегрирования в (34) должен охватывать спектр резольвенты на z-плоскости. В отсутствие шума $R(z) = [(zI - A_V)(zI + A_V^{+})]^{-1}$, т. е. спектр сосредоточен в точках, определяемых собственными числами матриц $R_1 = -A_V^{+}$ и $R_2 = A_V$. Считая, что интенсивность гармонического шума мала и ограничиваясь поэтому линейным приближением в резольвенте, получаем

$$R(z) = [(zI + A_V^+ - \lambda L_V)(zI - A_V + \lambda L_V)]^{-1}, \tag{36}$$

что дает

$$\int_0^T dt\, \varphi(t)\, b_V^+(t) = \int_0^T dt\, |b_V(t)|^2 - 2\lambda \int_0^T dt \int_0^t dt'\, b_V(t) L_V \operatorname{sh}(A_V^+ t - A_V^+ t')\, b_V^+(t') + \int_0^T dt \int_0^T dt'\, b_V(t) L_V \exp(A_V^+ t - A_V^+ t')\, b_V^+(t'), \tag{37}$$

а также $Q_a(\lambda) = \det\exp(-\lambda L_V)$ **(38).** Из (32) и (37) вытекает, что производящая функция суперпозиции когерентного и шумового полей может быть записана в виде

$$Q(\lambda) = Q_a(\lambda)\exp(-\lambda < m > + \lambda^2 I), \tag{39}$$

где, с учетом преобразования (15)

$$I = 2\int_0^T dt \int_0^t dt'\, b(t) VL \operatorname{sh}(A^+ t - A^+ t') V b^+(t') + \int_0^T dt \int_0^T dt'\, b(t) VL \exp(A^+ t - A^+ t') V b^+(t'). \tag{40}$$

Поэтому для распределения $P_{c+ш}(m)$ числа отсчетов суперпозиционного излучения имеет место гауссова аппроксимация

$$P_{c+ш}(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi I}} \exp\left\{-\frac{(m - \langle m\rangle)^2}{2I}\right\}. \tag{41}$$

В случае передачи символа «0» когерентное излучение отсутствует. Учитывая, что $\omega \gg \gamma$ из (39) находим

$$P_ш(m) = \left(\frac{\gamma T}{2\pi m_ш}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\gamma T}{2}\left(\sqrt{\frac{m}{m_ш}} - \sqrt{\frac{m_ш}{m}}\right)^2\right\}. \tag{42}$$

Эта вероятность имеет экспоненциальную асимптотику при $m \gg m_ш$.

Вероятность принятия ошибочного решения $P_{ош}$ найдем для случая, когда регистрация символов осуществляется с помощью идеального приемника Зигерта — Котельникова [3; 4]. Здесь она определяется областью перекрытия функций $P_{c+ш}(m)$ и $P_ш(m)$. Поскольку обе функции нормированы на единицу и имеют острый максимум, то

$$P_{ош} \approx \sum_{m=0}^{\infty} P_{c+ш}(m)\, P_ш(m). \tag{43}$$

Переходя от дискретной переменной к непрерывной и интегрируя, с учетом $m_c \gg m_ш$ получаем

$$P_{ош} = \sqrt{\frac{\gamma T}{2\pi m_ш}} \exp\left\{-\frac{\gamma T}{2}\left(\frac{m_c}{m_ш} - R\right)\right\}, \quad R = \frac{\gamma T}{2m_ш^2} I. \tag{44}$$

Таким образом, с увеличением параметра γ, имеющего физический смысл ширины спектрального контура излучения шума, вероятность ошибки $P_{\text{ош}}$ уменьшается. Осуществляя вычисление функций от (2×2) -матриц, имеем

$$I = -\frac{\sigma z^*}{i\Omega}\int_0^T \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}t'\, \beta(t)\, \beta^*(t')\, \operatorname{sh} z\,(t-t') - \\ -\frac{\sigma z^*}{2i\Omega}\int_0^T \mathrm{d}t \int_0^T \mathrm{d}t'\, \beta(t)\, \beta^*(t')\, e^{z(t-t')} - \text{к. с.}, \tag{45}$$

где $\Omega = (\omega^2 - \gamma^2)^{1/2}$; $z = \gamma + i\Omega$.

Имея в виду предельные характеристики помехоустойчивости, принимаем далее, что частота когерентного сигнала совпадает с ω. Временную динамику импульса сигнального излучения выберем в виде

$$\beta(t) = \frac{m_c}{\pi}\left(\frac{2\mu}{1 - e^{-2\mu T}}\right)^{1/3} e^{-\mu t - i\omega t}, \tag{46}$$

сохраняющем полное число сигнальных отсчетов m_c. Тогда

$$I = \frac{2\mu m_c m_{\text{ш}}}{1 - e^{-2\mu T}}\left[\frac{1 - e^{-2\mu T}}{2\mu T\,(\gamma - \mu)} - \frac{1 - e^{-(\mu+\gamma)T}}{T\,(\gamma^2 - \mu^2)}\right]. \tag{47}$$

Из (44) — (47) следует искомое выражение для вероятности ошибочного приема $P_{\text{ош}}$. Поскольку $\partial I/\partial\mu < 0$, то с укорочением сигнального импульса вероятность $P_{\text{ош}}$ уменьшается. Для импульсов с постоянной во времени амплитудой ($\mu = 0$) запишем

$$P_{\text{ош}} = \left(\frac{\gamma T}{2\pi m_{\text{ш}}}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{m_c}{2m_{\text{ш}}}\,(\gamma T - 1 + e^{-\gamma T})\right\}. \tag{48}$$

Полученные выражения указывают, что определяющими факторами, влияющими на величину $P_{\text{ош}}$, являются, помимо m_c и $m_{\text{ш}}$, длительность регистрации T и ширина спектральной линии шума. Если частота когерентного сигнала и центральная частота помехи отличаются более, чем на γ, то значение интеграла (45) быстро уменьшается до нуля, что в этом случае дает

$$P_{\text{ош}} = \left(\frac{\gamma T}{2\pi m_{\text{ш}}}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\gamma T}{2}\,\frac{m_c}{m_{\text{ш}}}\right). \tag{49}$$

Список литературы: 1. *Мазманишвили А. С.* Континуальное интегрирование как метод решения физических задач. К., 1987. 224 с. 2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., 1969. 367 с. 3. *Гальярди Р. М.*, *Карп Ш.* Оптическая связь. М., 1978. 424 с. 4. *Шереметьев А. Г.* Статистическая теория лазерной связи. М., 1974. 264 с.

Поступила в редколлегию 28.06.88