РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ПУАССОНА В ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ МЕТОДОМ НІДР (ЗВЕДЕННЯ ДО СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ)

Семикіна А.А., Кобозєв В.К.
Науковий керівник – проф. Литвин О.М.
Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, пр. Науки, 14, каф. Прикладної математики, тел. (057) 702-14-36)
e-mail: anastasiia.semykina@nure.ua, vladyslav.koboziev@nure.ua

One of approaches to solving this problem are based on the using of the system of nonlinear integro-differential of the equations (NIDE method) formulated in general form in Litvin O.N.'s works. This paper presents one of the possible approaches to the implementation of the NIDE method based on building structures of approximate solutions boundary quests. The essence of this approach is that the structure of the approximate solution of the LIDE method all support functions are deemed to be found and constants, which leads to the need to solve non-linear systems. of the integro-differential equations.

Постановка задачі. В області $D = [-a, a] \times [-b, b]$ знайти розв'язок $u(x, y)$ диференціального рівняння

$$u''_{xx} + u''_{yy} = -2, (x, y) \in D, \tag{1}$$

який задовольняє наступній граничній умові Діріхле

$$u(x, y) = 0, (x, y) \in \partial D, \tag{2}$$

у вигляді

$$\tilde{u}_N(x, y) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(x)\psi_k(y), \quad N \geq 1 \tag{3}$$

де $\varphi_k(x)$, $\psi_k(y)$, $k = \overline{1,N}$ - невідомі функції, що задовольняють граничній умові:

$$\varphi_k(\pm a) = 0, \psi_k(\pm b) = 0. \tag{4}$$

Крок 1. Покладемо $N = 1$. Підставляючи наближений розв'язок у функціонал

$$J(\tilde{u}_N) = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[(\tilde{u}'_{Nx})^2 + (\tilde{u}'_{Ny})^2 + 4\tilde{u}_N\right]dxdy$$

і прирівнюючи до нуля його варіації по функціях φ_1, ψ_1, отримаємо два нелінійних інтегродиференціальних рівняння, яким повинні задовольняти наступні невідомі функції,

$$A_1(\psi_1)\varphi''_1(x) - B_1(\psi'_1)\varphi_1(x) = -2C_1(\psi_1), -a < x < a, \tag{5}$$

$$A_2(\varphi_1)\psi''_1(y) - B_2(\varphi'_1)\psi_1(y) = -2C_2(\varphi_1), -b < y < b, \tag{6}$$

де використані наступні позначення

$$A_1(\psi_1) = \int_{-b}^{b} {\psi_1}^2(y)dy, B_1(\psi'_1) = \int_{-b}^{b} {\psi'_1}^2(y)dy,$$

$$C_1(\psi_1) = \int_{-b}^{b} \psi_1(y)dy, A_2(\varphi_1) = \int_{-a}^{a} {\varphi_1}^2(x)dx,$$

$$B_2(\varphi'_1) = \int_{-a}^{a} {\varphi'_1}^2(x)dx, C_2(\varphi_1) = \int_{-a}^{a} \varphi_1(x)dx.$$

Розв’язки цих рівнянь можна зобразити у вигляді (із урахуванням граничних умов)

$$\varphi_1(x) = \frac{2C_1}{B_1}\varphi_0(x), \varphi_0(x) = \left(1 - \frac{ch(\lambda x)}{ch(\lambda a)}\right),$$
$$\psi_1(y) = \frac{2C_2}{B_2}\psi_0(y), \psi_0(y) = \left(1 - \frac{ch(\mu y)}{ch(\mu b)}\right),$$

де числа λ, μ є додатніми коренями наступних рівнянь

$$A_1\lambda^2 - B_1 = 0, \qquad (7)$$
$$A_2\mu^2 - B_2 = 0. \qquad (8)$$

Крок 2. Покладемо $a = b = \frac{1}{2}$ та скористаємося початковим наближенням $\psi_{10}(y) = \cos\frac{\pi y}{2b}$ для знаходження λ. Розрахуємо

$$A_1(\psi_{10}) = \int_{-b}^{b} {\psi_{10}}^2(y)dy = 0.5,$$
$$B_1(\psi'_{10}) = \int_{-b}^{b} {\psi'_{10}}^2(y)dy = 4.935\,,$$
$$C_1(\psi_{10}) = \int_{-b}^{b} 2\psi_{10}(y)dy = 1.273,$$

звідки отримаємо, що $\lambda = \sqrt{\frac{B_1(\psi'_{10})}{A_1(\psi_{10})}} = 3.142$. Завдяки проведеним розрахункам маємо змогу скласти рівняння

$$\varphi_1(x) = \frac{C_1(\psi_{10})}{B_1(\psi'_{10})}\left(1 - \frac{ch(\lambda x)}{ch(\lambda a)}\right) = 0.258 \cdot \left(1 - \frac{ch(3.142x)}{ch(1.572)}\right). \qquad (9)$$

Крок 3. Використавши $\varphi_1(x)$ знайдемо $\mu = \sqrt{\frac{B_2(\varphi'_1)}{A_2(\varphi_1)}}$, розрахувавши

$$A_2(\varphi_1) = \int_{-a}^{a} {\varphi_1}^2(x)dx = 0.014,$$
$$B_2(\varphi'_1) = \int_{-a}^{a} {\varphi'_1}^2(x)dx = 0.14,$$
$$C_2(\varphi_1) = \int_{-a}^{a} 2\varphi_1(x)dx = 0.215$$

отримаємо $\mu = 3.21$, та відповідно

$$\psi_1(y) = \frac{C_2(\varphi_1)}{B_2(\varphi'_1)}\left(1 - \frac{ch(\mu y)}{ch(\mu b)}\right) = 1.538 \cdot \left(1 - \frac{ch(3.21y)}{ch(1.605)}\right). \qquad (10)$$

Крок 4. Знайдемо розв’язок диференціального рівняння (1) в точці $x = y = 0$ за допомогою знайдених значень (9) і (10).

Отримаємо значення $u_1(0,0) = \varphi_1(0) \cdot \psi_1(0) = 0.146$, що співпадає з розрахунками, наведеними в 4-ій главі монографії проф. Литвина О.М. та отриманими іншим наближеним методом [1, с. 159].

Список використаних джерел:

1. Литвин О.М., Методи обчислень. Додаткові розділи: Навч. посіб. – К.: Наук. думка, 2005. – 344с.