ПОНЯТТЯ СТЕПЕНІ КРИВИНИ ЛІНІЇ ДЛЯ ОПИСУ НАТУРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ КРИВОЇ

***Челомбітько В.Ф.**, доцент, кафедра МСТ, ХНУРЕ*

Для опису та зображення кривих поліграфічного захисту доцільно застосовувати їхні натуральні рівняння [1]. Інакше кажучи, такі рівняння, які описують кривину деякої кривої залежно від її натурального параметра *s*, який визначає довжину даної кривої починаючи з її деякої точки. Дослідженню кривих, у натуральні рівняння яких входить тригонометрична функція косинуса, присвячені роботи Краузе [1], С.Ф. Пилипаки [1], С.Ю. Бадаєва, Т.І. Щоголевої [2], В.Д. Борисенка, С.А. Устенка, В.Є. Спіцина [3] та ін.

Розглянемо випадок, коли у формули опису результуючої лінії входить кривина, обчислена з позитивним степенем (виду $k^w(s)$).

Відомо, що натуральне рівняння кривої на площині має вигляд

$$\frac{1}{R} = f(s), \tag{1}$$

де *R* – радіус кола, дотичного до гладкої кривої в певній її точці;

функція *f(s)* визначає закон зміни кривини лінії (тобто величини $k = 1/R$) залежно від натурального параметра *s*.

За визначенням (класичною) кривиною дуги кривої у точці М називається величина

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|, \tag{2}$$

де α – кут між дотичними в точках М і M_Δ

Δs – довжина дуги MM_Δ.

З використанням похідної формулу (2) можна записати як

$$k = |\dot{\alpha}|, \tag{3}$$

де $\alpha(s)$ – кут повороту дотичної у точці М, що залежить від шляху, пройденого по кривій,

$\dot{\alpha}$ – похідна функції $\alpha(s)$ по параметру *s*.

Рівняння (3) допомагає описати криву, що задана натуральним рівнянням. Дійсно, з рівняння $k = \dot{\alpha}(s) = f(s)$ обчислюється функція

$$\alpha(s) = \int_0^s f(s)ds + \alpha_0, \tag{4}$$

за допомогою якої обчислюється кут нахилу дотичної залежно від довжини дуги.

Тоді відповідно до відомих [3] залежностей

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha \ \text{ і } \ \frac{dy}{ds} = \sin\alpha \tag{5}$$

параметризацію кривої можна задати у вигляді

$$x(s)=\int_0^s \cos\alpha(s)ds+x_0\,;\quad y(s)=\int_0^s \sin\alpha(s)ds+y_0\,, \tag{6}$$

або, з врахуванням (4), рівняння шуканої кривої має вигляд

$$x(s)=\int_0^s \cos\left(\int_0^s f(s)ds+\alpha_0\right)ds+x_0\,; \tag{7}$$

$$y(s)=\int_0^s \sin\left(\int_0^s f(s)ds+\alpha_0\right)ds+y_0\,.$$

У курсі диференціальної геометрії доводиться, що кожне рівняння виду (1), де функція *f(s)* неперервна, можна прийняти як натуральне рівняння деякої кривої, яку можна описати у параметричному вигляді.

Зі співвідношень (5) слідує, що α є кутом дотику цієї кривої з віссю *x*. Після диференціювання (4) знаходимо, що кривина дорівнюватиме

$$\frac{d\alpha}{ds}=f(s)\,. \tag{8}$$

Тобто доходимо висновку, що рівняння (1) дійсно виявляється натуральним рівнянням кривої. Подальшим узагальненням побудови кривих з керованою кривиною буде введення поняття *степеня кривини лінії*.

Визначення. Нехай кривина уздовж кривої змінюється за законом $k^w(s)$, де $w > 0$ і s – натуральний параметр. За допомогою функції $k^w(u)$ задамо вираз $\alpha_w(s)$ у вигляді

$$\alpha_w(s)=\int_0^s k^w(u)du\,, \tag{9}$$

Тоді параметр w буде степенем кривини лінії $\{x(s),\ y(s)\}$, одержаної в результаті розв’язання системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{ds}x(s)=\cos\left(\alpha_w(s)\right);\qquad \frac{d}{ds}y(s)=\sin\left(\alpha_w(s)\right). \tag{10}$$

Кривина лінії другого степеня застосовується при побудові еластик Ейлера [3], а кривини ліній більш високих степенів використовуються, наприклад, при побудові треків елементарних часток у магнітних полях.

Крім того, ейлерові еластики можуть використовуватися в автомобільному транспорті для розрахунку шляху оптимального руху автомобіля (або мобільного робота) по площині.

Список літератури

1. Пилипака, С.Ф. (2006). Дослідження плоских кривих, натуральні рівняння яких мають синусоїдний характер. К.: КНУБА.
2. Бадаєв, Ю.І., & Щоголева, Т.І. (2008). Аналітично-комп'ютерні методи проектування візерунків. Луцьк, Наукові нотатки. Міжвузівський збірник, 22(1).
3. Борисенко, В.Д., Устенко, С.А., & Спіцин, В.Є. (2008). Масштабування плоских криволінійних обводів заданої кривини. К.: КНУБА.