17. А. А. Харкевич. Спектры и анализ. Физматгиз, 1962.
18. Г. Ф. Дюбко, В. В. Тищенко. Экспериментальные исследования математической модели адаптации вибрационной чувствительности кожного анализатора. Труды семинара «Нейробионика», вып. 1. Киев, 1968.
19. Г. Ф. Дюбко, В. В. Тищенко. Математическая модель статического преобразования интенсивности вибраций в вибрационное ощущение. Сб. «Проблемы бионики», вып. 4. Изд-во ХГУ, Харьков, 1970.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СГЛАЖИВАЮШИХ СВОЙСТВ ЗРЕНИЯ

Ю. П. Шабанов-Кушнаренко, Е. Г. Качко

Математическая модель инерции и иррадиации зрения предложена в [1]. Понимая инерцию и иррадиацию зрения как фильтр, подавляющий избыток информации во времени и поле зрения, данную модель можно считать моделью сглаживающих свойств зрения.

Дифференциальная форма модели—

$$a\frac{\partial S}{\partial t}-b^2\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right)+S=kB, \tag{1}$$

где $B(x, y, t)$ — яркость зрительной картины;

$S(x, y, t)$ — светлота зрительного ощущения.

Функции $B(x, y, t)$ и $S(x, y, t)$ определены и ограничены при любых значениях x, y, t.

Интегральная форма модели имеет вид

$$S(x, y, t)=\frac{k}{4\pi b^2}\int\limits_{-\infty}^{t}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}B(\xi, \eta, \tau)\frac{e^{-\frac{t-\tau}{a}}}{t-\tau}e^{\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{t-\tau}}d\xi d\eta d\tau. \tag{2}$$

В частном случае, когда зрительная картина однородна и нестационарна, т. е. когда яркость $B=B(t)$ изменяется лишь во времени и не зависит от координат поля зрения, выражение (2) может быть записано в виде

$$S(t)=\frac{k}{a}\int\limits_{-\infty}^{t}B(\tau)e^{-\frac{t-\tau}{a}}d\tau. \tag{3}$$

Это соотношение совпадает с формулой, предложенной Луизовым для описания инерции зрения [2].

В случае стационарной неоднородной зрительной картины, т. е. когда яркость $B(x, y)$ изменяется лишь в поле зрения и не меняется во времени,

$$S(x, y)=\frac{k}{2\pi b^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}B(\xi, \eta)k_0\left(\frac{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}{t-\tau}\right)d\xi d\eta, \tag{4}$$

где k_0 — функция Макдональда с нулевым индексом.

Наконец, когда яркость зрительной картины зависит лишь от координаты x, формула (2) принимает вид

$$S(x)=\frac{k}{2b}\int\limits_{-\infty}^{\infty}B(\xi)e^{-\frac{|\xi-x|}{b}}d\xi. \tag{5}$$

Известно, что зрение человека подчиняется психофизическому закону Тальбота [3]. Различают временной и пространственный законы Тальбота.

Предъявим наблюдателю на одном поле сравнения однородную зрительную картину, яркость которой $B_T(t)$ меняется во времени по произвольному периодическому закону

$$B_T(t) = B_T(t - nT), \tag{6}$$

где T — период колебания яркости; n — произвольной целое число. Если период T колебания яркости взять достаточно малым, то благодаря инерции зрения мелькания сольются и наблюдатель увидит немигающее поле.

На втором поле сравнения сформулируем однородную и стационарную зрительную картину, характеризующуюся яркостью B_0. Согласно временному закону Тальбота, для получения одинаковых зрительных ощущений на полях сравнения необходимо уровень яркости B_0 на втором поле сравнения принять равным среднему значению мелькающей яркости $B_T(t)$, т. е.

$$B_0 = \frac{1}{T}\int_0^T B_{T_0}(t)\,dt, \tag{7}$$

где T_0 — некоторый произвольно выбранный фиксированный период мельканий.

Для демонстрации пространственного закона Тальбота на одном поле сравнения сформируем зрительную картину в виде вертикальных полос. Яркость $B_X(x)$ этой картины является периодической функцией координаты x

$$B_X(x) = B_X(x - nX), \tag{8}$$

где X — период колебания яркости. При достаточно густом расположении эти полосы благодаря иррадиации зрения сольются в однородный фон.

Согласно пространственному закону Тальбота, для достижения тождественности зрительных ощущений на другом поле сравнения необходимо сформировать стационарную и однородную зрительную картину, яркость B_0 которой должна быть равна среднему значению изменяющейся в поле зрения яркости $B_X(x)$, т. е.

$$B = \frac{1}{X_0}\int_0^{X_0} B_{X_0}(x)\,dx. \tag{9}$$

Модель сглаживающих свойств зрения удовлетворяет как временному, так и пространственному законам Тальбота.

Докажем сначала выводимость из модели временного закона Тальбота.

Найдем выражение для светлоты зрительного ощущения $S(t)$, порождаемой зрительной картиной, яркость которой $B_T(t)$ изменяется во времени по произвольному периодическому закону. Используя зависимость (3), имеем

$$S(t) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{t} B_T(\tau)\, e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau = \frac{1}{a} e^{-\frac{t}{a}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t-(n+1)T}^{t-nT} B_T(\tau)\, e^{\frac{\tau}{a}}\, d\tau. \tag{10}$$

После ряда тождественных преобразований получим

$$S(t) = \frac{1}{a} e^{-\frac{t}{a}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nT}{a}}\right) \int_{t-T}^{t} B_T(\tau)\, e^{\frac{\tau}{a}} d\tau. \tag{11}$$

Определим сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nT}{a}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{T}{a}}}. \tag{12}$$

Окончательно формула для определения светлоты в случае периодически изменяющейся во времени яркости запишется в виде

$$S(t) = \frac{k}{a} \frac{e^{-\frac{t}{a}}}{1 - e^{-\frac{T}{a}}} \int_{t-T}^{t} B_T(\tau) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau. \tag{13}$$

Воспользовавшись обобщенной теоремой о среднем [4] и заменив

$$\int_{t-T}^{t} B_T(\tau)\, d\tau = \int_{0}^{T} B_T(\tau)\, d\tau,$$

получим

$$S(t) = \frac{k}{a} \cdot \frac{e^{-\frac{\theta(t)T}{a}}}{1 - e^{-\frac{T}{a}}} \int_{0}^{T} B_T(\tau)\, d\tau. \tag{14}$$

Обозначим через T_0 некоторый произвольно выбранный фиксированный период мельканий и определим, во что превратится функция $S(t)$ при неограниченном уменьшении периода мельканий T, равного $T = \varepsilon T_0$, т. е. при $\varepsilon \to 0$.

Предел, к которому стремится последовательность функций $S(t)$ при устремлении ε к нулю, обозначим через S_0.

Из (14) следует

$$S_0 = \frac{k}{a} \int_{0}^{T_0} B_{T_0}(\tau)\, d\tau. \tag{15}$$

Зрительное ощущение такой же светлоты можно получить при наблюдении однородной и стационарной зрительной картины яркости B_0, равной

$$B_0 = \frac{1}{k} S_0. \tag{16}$$

Объединяя равенства (15) и (16), приходим к формуле (6), что доказывает соответствие модели временной формулировке закона Тальбота.

Факт выводимости закона Тальбота из формулы (3) для прямоугольных мельканий был доказан Луизовым [2].

Выведем теперь из модели пространственный закон Тальбота.

Найдем выражение для светлоты зрительного ощущения $S(x)$, порождаемого зрительной картиной, яркость которой $B_X(x)$ изменяется в поле зрения вдоль оси абсцисс по произвольному периодическому закону.

Используя зависимость (5), имеем

$$S(x) = \frac{k}{2b} e^{-\frac{x}{b}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x-(n+1)X}^{x-nX} B_X(\xi) e^{\frac{\xi}{b}} d\xi + \frac{k}{2b} e^{\frac{x}{b}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x+nX}^{x+(n+1)X} B_X(\xi) e^{-\frac{\xi}{b}} d\xi. \tag{17}$$

Из (17) и (8) следует, что

$$S(x) = \frac{k}{2b} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{X}{b}}} \int_{x-X}^{x} B_X(\xi) e^{-\frac{|\xi - x|}{b}} d\xi. \tag{18}$$

После применения обобщенной теоремы о среднем и использования равенств

$$\int_{x-X}^{x} B(\xi)\,d\xi = \int_{0}^{X} B(\xi)\,d\xi; \quad \int_{x}^{x+X} B(\xi)\,d\xi = \int_{0}^{X} B(\xi)\,d\xi \tag{19}$$

формулу для определения $S(x)$ запишем в виде

$$S(x) = \frac{k}{2b} \cdot \frac{e^{-\frac{\chi_1(x)X}{b}} + e^{-\frac{\chi_2(x)X}{b}}}{1 - e^{-\frac{X}{b}}} \int_{0}^{X} B_X(\xi)\,d\xi, \tag{20}$$

где $\chi_1(x)$ и $\chi_2(x)$ — некоторые функции координаты x, принимающие значения на интервале $[0, 1]$.

Обозначим через X_0 некоторый произвольно выбранный период и определим, во что превратится функция $S(x)$ при неограниченном уменьшении периода X, равного

$$X = \mu X_0, \tag{21}$$

т. е. при $\mu \to 0$.

Предел, к которому стремится последовательность функций $S(x)$ при устремлении μ к нулю, обозначим через S_0:

$$S_0 = \lim_{\mu \to 0} S(x). \tag{22}$$

Из формул (20) — (21) следует, что

$$S_0 = \frac{k}{X_0} \int_{0}^{X_0} B(\xi)\,d\xi. \tag{23}$$

С учетом (16) приходим к формуле (9).

Следовательно, модель сглаживающих свойств зрения (2) удовлетворяет также и пространственной формулировке закона Тальбота.

Теперь поставим перед собой цель построения такой модели сглаживающих свойств зрения, которая в логическом отношении была бы равносильна закону Тальбота. Эта задача сводится к отысканию такого оператора преобразования функции $B(x, y, t)$ в функцию $S(x, y, t)$, чтобы из закона Тальбота вытекала справедливость этого оператора, и наоборот. Ясно, что в результате решения этой задачи мы должны прийти либо к оператору (2), либо к некоторому более общему оператору, включающему оператор (2) как частный случай. Закон Тальбота свидетельствует о том, что некоторые существенно различные входные сигналы преобразуются органом зрения в одинаковые выходные сигналы. Выясним, возможно ли построить какие-либо другие, не предусмотренные законом Тальбота множества входных сигналов, преобразуемых глазом в одинаковые выходные сигналы. Оказывается, что данная выше формулировка закона Тальбота не исчерпывает всех возможностей. Необходимо так обобщить закон Тальбота, чтобы с его помощью для двух любых входных сигналов органа зрения возможно было установить тождественность или различие соответствующих им выходных сигналов.

Рассмотрим временную формулировку закона Тальбота. Остановимся более подробно на входных сигналах органа зрения $B(t)$. Функции $B(t)$ удобно считать заданными на всей оси времени $(-\infty, \infty)$, поскольку инерционные процессы зрения весьма кратковременны и протекают в течение долей секунды, что несоизмеримо со сроком существования глаза.

На любом конечном отрезке времени $[t_1, t_2]$ функции $B(t)$ локально суммируемы, поскольку интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} B(t)\,dt \tag{24}$$

пропорционален энергии излучения и, следовательно, имеет конечную величину.

Однако, кроме всевозможных локально суммируемых функций, глаз может воспринимать также некоторые другие функции. Одна из таких функций фигурирует в формулировке временного закона Тальбота. Она получается из периодической функции $B_T((t) = B_T(t-nT)$ при неограниченном уменьшении периода T колебаний яркости. Таким образом, входными функциями глаза могут выступать также некоторые предельные функции, определяемые бесконечной последовательностью локально суммируемых функций. Такого рода входные функции для нас весьма важны, поскольку в терминах именно этих функций формулируется закон Тальбота.

Для обобщения формулировки закона Тальбота на одном поле сравнения сформируем зрительную картину, описываемую некоторой произвольно выбранной локально суммируемой функцией $B(t)$, порождающей зрительное ощущение $S(t)$. На другом поле сравнения поочередно будем формировать ряд зрительных картин, каждая из которых описывается функцией из бесконечной последовательности $\{B_1(t), B_2(t), \ldots B_N(t), \ldots\}$ локально суммируемых функций.

Пусть последовательность этих зрительных картин порождает последовательность зрительных ощущений $\{S_1(t), S_2(t), \ldots S_N(t), \ldots\}$.

Опыт свидетельствует о возможности подбора таких последовательностей зрительных картин, при которых последовательности порождаемых ими зрительных ощущений сходились к зрительному ощущению $S(t)$ второго поля, т. е. $\lim_{N\to\infty} S_N(t) = S(t)$. Определение последовательностей зрительных картин, дающих в пределе зрительное ощущение $S(t)$, и последовательностей, не дающих этого, возможно из закона Тальбота в обобщенной формулировке.

Формула

$$\lim_{N\to\infty} S_N(t) = S(t) \tag{25}$$

справедлива в том и только том случае, если для любого конечного интервала времени $[t_1, t_2]$ будет иметь место равенство

$$\lim_{N\to\infty}\int_{t_1}^{t_2} B_N(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} B(t)\,dt. \tag{26}$$

В выражении (26) сходимость имеет следующий смысл: каковы бы ни были t_1 и t_2 (но $|t_1 - t_2| \leqslant T_0$, где T_0 — некоторое фиксированное число), для любого N найдется число $\varepsilon_N > 0$ такое, что

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} [B_N(t) - B(t)]\,dt\right| \leqslant \varepsilon_N, \tag{27}$$

причем при $N\to\infty$ $\varepsilon_N \to 0$.

Таким образом, из обобщенного закона Тальбота следует, что если две зрительные картины, одна из которых достаточно быстро изменяется во времени, в среднем совпадают по яркости на любом отрезке времени, то порождаемые ими зрительные ощущения будут одинаковы.

При невыполнении этого условия зрительные ощущения будут различными.

Прежняя формулировка временного закона Тальбота является частным случаем новой, поскольку для периодических функций условие (26) переходит в условие (7).

Закон Тальбота можно обобщить также для случая неоднородных и нестационарных зрительных картин, когда яркость является функцией не только времени t, но и координат поля зрения x, y. Теперь формулировка закона Тальбота будет следующей:

Если и только если

$$\lim_{N\to\infty}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{t_1}^{t_2} B_N(x,\ y,\ t)\,dx\,dy\,dt = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{t_1}^{t_2} B(x,\ y,\ t)\,dx\,dy\,dt, \tag{28}$$

то

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x,\ y,\ t) = S(x,\ y,\ t). \tag{29}$$

В обобщенной формулировке пространственно-временной закон Тальбота означает, по существу, следующее. Пусть имеются две зрительные картины, одна из которых достаточно быстро изменяется во времени и в поле зрения. Порождаемые этими картинами зрительные ощущения будут одинаковыми в том и только том случае, если на любом участке поля зрения и любом отрезке времени зрительные картины имеют одинаковую среднюю яркость.

С учетом трехкомпонентности зрения обобщенный закон Тальбота может быть сформулирован в следующем виде.

Зрительные ощущения совпадают в том и только том случае, если совпадают средние значения координат цвета соответствующих зрительных картин в произвольном пространственно-временном параллелепипеде $[x_1,\ x_2;\ y_1,\ y_2;\ t_1,\ t_2]$.

Иными словами,

если и только если

$$\lim_{N\to\infty}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{t_1}^{t_2} B_{iN}(x,\ y,\ t)\,dx\,dy\,dt = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{t_1}^{t_2} B_i(x,\ y,\ t)\,dx\,dy\,dt, \tag{30}$$

то

$$\lim_{N\to\infty} S_{iN}(x,\ y,\ t) = S_i(x,\ y,\ t) \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{31}$$

в смысле равномерной сходимости по x, y, t.

С помощью закона Тальбота — (30), (31) — для любого входного сигнала органа зрения $b_\lambda(x, y, t)$ можно указать всевозможные последовательности входных сигналов $\{b_{\lambda N}(x, y, t)\}$, дающие в пределе одно и то же зрительное ощущение.

Предположение, согласно которому на одном из полей сравнения должна быть сформирована некоторая фиксированная зрительная картина $b_\lambda(x, y, t)$, не обязательно; возможно рассмотрение случая, когда на обоих полях сравнения формируются последовательности зрительных картин $\{b'_{\lambda N}(x, y, t)\}$ и $\{b''_{\lambda N}(x, y, t)\}$. При этом закон Тальбота может быть назван обобщенным и формулируется следующим образом.

Если и только если

$$\lim_{N\to\infty}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{t_1}^{t_2} B'_{iN}(x, y, t)\,dxdydt = \lim_{N\to\infty}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{t_1}^{t_2} B''_{iN}(x, y, t)\,dxdydt, \tag{32а}$$

то

$$\lim_{N\to\infty} S'_{iN}(x, y, t) = \lim_{N\to\infty} S''_{iN}(x, y, t) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{32б}$$

в смысле равномерной сходимости по x, y, t.

Докажем, что обобщенный закон Тальбота равносилен оператору

$$V_i(x, y, t) = \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{t} \iint_{-\infty}^{\infty} B_{iN}(\xi, \eta, \tau) \frac{e^{-(t-\tau)}}{t-\tau} e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{t-\tau}} d\xi d\eta d\tau, \quad (33а)$$

$$S_i(x, y, t) = \Phi_i[V_i(x, y, t)] \quad (i = 1, 2, 3), \quad (33б)$$

где Φ_i — произвольный взаимно-однозначный непрерывный оператор.

Для доказательства равносильности утверждений (32) и (33) нужно установить следующее.

1. Из справедливости утверждения (32) вытекает справедливость утверждения (33). Смысл доказательства — в подтверждении взаимной однозначности оператора Φ_i.

Докажем сперва, что при совпадении функций

$$S'_i(x, y, t) = \lim_{N\to\infty} S'_{iN}(x, y, t);$$

$$S''_i(x, y, t) = \lim_{N\to\infty} S''_{iN}(x, y, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (34)$$

совпадают также функции

$$V'_i(x, y, t) = \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{t} \iint_{-\infty}^{\infty} B'_{iN}(\xi, \eta, \tau) \frac{e^{-(t-\tau)}}{t-\tau} e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{t-\tau}} d\xi d\eta d\tau;$$

$$V''_i(x, y, t) = \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{t} \iint_{-\infty}^{\infty} B''_{iN}(\xi, \eta, \tau) \frac{e^{-(t-\tau)}}{t-\tau} e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{t-\tau}} d\xi d\eta d\tau. \quad (35)$$

Вследствие равномерной сходимости по x, y, t формула (32а) по существу означает следующее.

Для любого числа N найдется такое $\varepsilon_N > 0$, что

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[B'_{iN}(\xi, \eta, \tau) - B''_{iN}(\xi, \eta, \tau) \right] d\xi d\eta d\tau \right| \leqslant \varepsilon_N, \quad (36)$$

где $|t_2 - t_1| \leqslant T_0$; $|x_2 - x_1| \leqslant X_0$; $|y_2 - y_1| \leqslant Y_0$; T_0, X_0, Y_0 — фиксированные числа; а при $N \to \infty$ $\varepsilon_N > 0$.

Зададимся некоторой областью

$$\Omega_{kmn} = \{x + kA_x \leqslant \xi \leqslant x + (k+1) A_x;\ y + mA_y \leqslant \eta \leqslant y + (m+1) A_y;$$
$$t - (n+1) A_t \leqslant \tau \leqslant t - nA_t\}, \quad (37)$$

причем

$$0 < A_x < X_0;\ 0 < A_y < Y_0;\ 0 < A_t < T_0,$$

которая представляет собой произвольный параллелепипед со сторонами A_x, A_y, A_t. Тогда

$$\int_{-\infty}^{t} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[B'_{iN}(\xi, \eta, \tau) - B''_{iN}(\xi, \eta, \tau) \right] \frac{e^{-(t-\tau)}}{t-\tau} e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{t-\tau}} d\xi d\eta d\tau =$$

$$= \sum_k \sum_m \sum_n \iiint_{\Omega_{kmn}} \left[B'_{iN}(\xi, \eta, \tau) - B''_{iN}(\xi, \eta, \tau) \right] \frac{e^{-(t-\tau)}}{t-\tau} e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{t-\tau}} d\xi d\eta d\tau, \quad (38)$$

причем m, k изменяются от $-\infty$ до ∞; n — от 0 до ∞.

Обозначим

$$B'_{iN}(\xi, \eta, \tau) - B''_{iN}(\xi, \eta, \tau) = f_{iN}(\xi, \eta, \tau);$$
$$\frac{e^{-(t-\tau)}}{t-\tau} e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{t-\tau}} = g(\xi, \eta, \tau). \tag{39}$$

Перепишем формулу (38) с учетом принятых обозначений (39)

$$\int_{-\infty}^{t} \iint_{-\infty}^{\infty} f_{iN}(\xi, \eta, \tau) g(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau = \sum_k \sum_m \sum_n \iiint_{\Omega_{kmn}} f_{iN}(\xi, \eta, \tau) g(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau. \tag{40}$$

Рассмотрим

$$J^{(N)}_{i_{kmn}} = \iiint_{\Omega_{kmn}} f_{iN}(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau g(\xi, \eta, \tau). \tag{41}$$

В результате тождественных преобразований получим

$$J^{(N)}_{i_{kmn}} = g(\xi_k, \eta_m, \tau_n) \iiint_{\Omega_{kmn}} f_{iN}(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau + \iiint_{\Omega_{kmn}} [g(\xi, \eta, \tau) - - g(\xi_k, \eta_m, \tau_n)] f_{iN}(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau, \tag{42}$$

где

$$g(\xi_k, \eta_m, \tau_n) = \inf_{\Omega_{kmn}} g(\xi, \eta, \tau).$$

Заметим, что

$$|f_{iN}(\xi, \eta, \tau)| \leqslant C, \tag{43}$$

так как каждая из функций $B'(\xi, \eta, \tau)$ и $B''(\xi, \eta, \tau)$ ограничена.

С учетом (36), (37), (42), (43) получим

$$J^{(N)}_{i_{kmn}} \leqslant g(\xi_k, \eta_m, \tau_n) \varepsilon_N + \omega_{kmn} C A_x A_y A_t, \tag{44}$$

где ω_{kmn} — колебание функции $g(\xi, \eta, \tau)$ в области Ω_{kmn}, причем $\omega_{kmn} > 0$ и ограничено.

Подставив полученное значение $J^{(N)}_{i_{kmn}}$ в (40), получим

$$\int_{-\infty}^{t} \iint_{-\infty}^{\infty} f_{iN}(\xi, \eta, \tau) g(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau \leqslant \sum_k \sum_m \sum_n g(\xi_k, \eta_m, \tau_n) \varepsilon_N + + \sum_k \sum_m \sum_n \omega_{kmn} C A_x A_y A_t. \tag{45}$$

Рассмотрим

$$\sum_k \sum_m \sum_n g(\xi_k, \eta_m, \tau_n) \varepsilon_N = \frac{\varepsilon_N}{A_x A_y A_t} \sum_k \sum_m \sum_n g(\xi_k, \eta_m, \tau_n) A_x A_y A_t; \tag{46}$$

$\int_{-\infty}^{t} \iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau$ существует, поэтому сумма $\sum_k \sum_m \sum_n g(\xi_k, \eta_m, \tau_n) A_x A_y A_t$ сходится как интегральная сумма для этого интеграла. Таким образом,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_k \sum_m \sum_n g(\xi_k, \eta_m, \tau_n) \varepsilon_N = 0 \tag{47}$$

и, следовательно,

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{t} \iint_{-\infty}^{\infty} f_{iN}(\xi, \eta, \tau) g(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau \leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_k \sum_m \sum_n \omega_{kmn} C A_x A_y A_t$$

при любых A_x, A_y, A_t.

Заметим, что из сходимости $\int\limits_{-\infty}^{t}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi,\eta,\tau)\,d\xi d\eta d\tau$ следует, что $\sum\limits_{k}\sum\limits_{m}\sum\limits_{n}\omega_{kmn}A_xA_yA_t\to 0$ при A_x, A_y, $A_t\to 0$ [4].

Таким образом, получаем

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{t}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} f_{iN}(\xi,\eta,\tau)\,g(\xi,\eta,\tau)\,d\xi\, d\eta d\tau=0. \tag{48}$$

Это значит, что

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{t}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\left[B'_{iN}(\xi,\eta,\tau)-B''_{iN}(\xi,\eta,\tau)\right]\frac{e^{-(t-\tau)}}{t-\tau}e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{t-\tau}}\,d\xi d\eta d\tau=$$

$$=V'_i(x,y,t)-V''_i(x,y,t)=0 \tag{49}$$

в смысле равномерной сходимости по x, y, t.

Итак, доказано, что при совпадении функций $S'_i(x,y,t)$ и $S''_i(x,y,t)$ функции $V'_i(x,y,t)$ и $V''_i(x,y,t)$ также совпадают.

Докажем теперь обратное: при совпадении функций $V'_i(x,y,t)$ и $V''_i(x,y,t)$ также совпадают функции $S'_i(x,y,t)$ и $S''_i(x,y,t)$.

Действительно, пусть

$$V'_i(x,y,t)=V''_i(x,y,t). \tag{50}$$

В этом случае для любых x,y,t имеет место равенство

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{t}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} f_{iN}(\xi,\eta,\tau)\,g(\xi,\eta,\tau)\,d\xi d\eta d\tau=0 \tag{51}$$

в смысле равномерной сходимости по x, y, t.

Рассмотрим функцию

$$r_{iN}(x,y,t)=\int\limits_0^x\int\limits_0^y\int\limits_0^t f_{iN}(\xi,\eta,\tau)\,d\xi d\eta d\tau. \tag{52}$$

Из условия (43) следует, что

$$r_{iN}(x,y,t)\leqslant C\,|xyt|. \tag{53}$$

По лемме Больцано—Вейерштрасса, из условия (53) [4] в каждой точке (x,y,t) из последовательности $r_{iN}(x,y,t)$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Пусть $r_i(x,y,t)$ — какой-либо частичный предел выбранной подпоследовательности.

Зафиксируем точку (x,y,t) и рассмотрим ее окрестность

$$S=\left\{\xi,\eta,\tau:\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(t-\tau)^2}\leqslant\varepsilon\right\}, \tag{54}$$

где $\varepsilon>0$.

Если $0\leqslant h\leqslant\varepsilon$, то

$$r_i(x+h,y,t)-r_i(x,y,t)=\lim_{N\to\infty}\int\limits_x^{x+h}\int\limits_0^y\int\limits_0^t f_{iN}(\xi,\eta,\tau)\,d\xi d\eta d\tau. \tag{55}$$

Из условия (43) следует, что

$$r_i(x+h,y,t)-r_i(x,y,t)\leqslant C\,|yth|, \tag{56}$$

т. е. функция $r_i(x,y,t)$ удовлетворяет условиям Липшица.

Из условий (52) и (56) следует, что $r_i(x, y, t)$ имеет производную по x, т. е. существует $\frac{\partial r_i(x, y, t)}{\partial x}$.

Повторив аналогичные рассуждения, обнаруживаем существование производных $\frac{\partial r_i(x, y, t)}{\partial y} \cdot \frac{\partial r_i(x, y, t)}{\partial t}$.

Обозначим

$$f_i(x, y, t) \equiv \frac{\partial^3 r_i(x, y, t)}{\partial x \partial y \partial t} = \lim_{N \to \infty} f_{iN}(x, y, t). \tag{57}$$

Очевидно, что

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{t_1}^{t_2} f_i(\xi, \eta, \tau)\, d\xi d\eta d\tau = \lim_{N \to \infty} \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{t_1}^{t_2} f_{iN}(\xi, \eta, \tau)\, d\xi d\eta d\tau, \tag{58}$$

т. е. для ограниченной последовательности функций $\{f_{iN}(\xi, \eta, \tau)\}$ существует функция $f_i(\xi, \eta, \tau)$ и выполняется условие (58).

Теперь рассмотрим выражение (51). Из доказанного выше следует, что существует функция $f_i(\xi, \eta, \tau)$.

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{t} \iint_{-\infty}^{\infty} f_i(\xi, \eta, \tau)\, g(\xi, \eta, \tau)\, d\xi d\eta d\tau = 0. \tag{59}$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial z_i(x, y, t)}{\partial t} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 z_i(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_i(x, y, t)}{\partial y^2}\right) + z_i(x, y, t) = \pi f(x, y, t). \tag{60}$$

Ограниченное решение для данного уравнения имеет вид

$$z_i(x, y, t) \equiv \int_{-\infty}^{t} \iint_{-\infty}^{\infty} f_i(\xi, \eta, \tau)\, g(\xi, \eta, \tau)\, d\xi d\eta d\tau, \tag{61}$$

т. е. полностью совпадает с (59).

Так как $z_i(x, y, t) \equiv 0$, то $f_i(x, y, t) \equiv 0$ и, следовательно,

$$\lim_{N \to \infty} \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{t_1}^{t_2} f_{iN}(\xi, \eta, \tau)\, d\xi d\eta d\tau = 0. \tag{62}$$

Формула (62) совпадает с (32а) с учетом принятых обозначений (39).

Поскольку закон Тальбота выполняется, из выполнения условия (32а) следует выполнение условия (32б), т. е. равенство функций $S_i'(x, y, t)$ и $S_i''(x, y, t)$.

Итак, доказано, что при совпадении функций $V_i'(x, y, t)$ и $V_i''(x, y, t)$ функции $S_i'(x, y, t)$ и $S_i''(x, y, t)$ также совпадают.

Следовательно, оператор Φ_i взаимно-однозначный. Это значит, что из справедливости утверждения (32) вытекает справедливость утверждения (33).

2. Докажем теперь, что из справедливости утверждения (33) вытекает справедливость утверждения (32).

Предположим вначале, что выполняется условие (32а) и докажем, что при этом выполняется условие (32б), т. е. что функции $S_i'(x, y, t)$ и $S_i''(x, y, t)$ совпадают.

В силу взаимной однозначности оператора Φ_i достаточно показать совпадение функций $V_i''(x, y, t)$ и $V_i''(x, y, t)$. Следовательно, из условия

(32а) требуется вывести условие (51). Однако такой вывод был только что выполнен.

Теперь предположим, что функции $S_i'(x, y, t)$ и $S_i''(x, y, t)$ совпадают, т. е. что выполняется условие (32б), и докажем, что при этом выполняется также условие (32а).

В силу взаимной однозначности оператора Φ_i в данном случае совпадают также функции $V_i'(x, y, t)$ и $V_i''(x, y, t)$; следовательно, выполняется условие (51). Однако только что было доказано, что из условия (51) следует зависимость (32а).

Итак, доказано, что из справедливости утверждения (33) вытекает справедливость утверждения (32).

Этим завершается доказательство равносильности обобщенного закона Тальбота и математической модели сглаживающих свойств зрения. Таким образом, модель сглаживающих свойств зрения (33) является просто переформулировкой обобщенного закона Тальбота. Эта модель справедлива в той же мере, в какой справедлив обобщенный закон Тальбота. Модель (2) представляет собой частный случай модели (33).

Теперь приступим к экспериментальной проверке обобщенного закона Тальбота.

Были поставлены специальные опыты для проверки закона Тальбота в его обобщенной формулировке. Сущность опытов заключалась в следующем. Наблюдались такие зрительные картины, которые, согласно обобщенному закону Тальбота, должны вызывать одинаковые нестационарные зрительные ощущения.

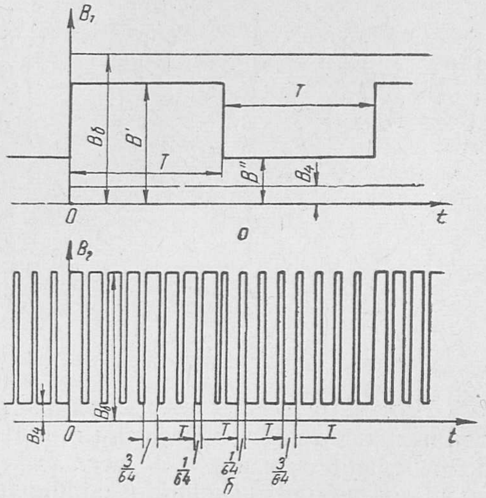

Рис. 1.

В одном из опытов наблюдателю предъявлялись для сравнения две ахроматические картины $B_1(t)$ и $B_2(t)$, изменение яркости которых во времени показано на диаграммах (рис. 1, *а* и *б*).

На диаграммах $B_б$ и $B_ч$ обозначают уровни яркости, соответствующие белому и черному цвету, с коэффициентами отражения 83 и 2%. Зрительная картина, отвечающая диаграмме (рис. 1, *а*), формировалась путем смены чередования во времени двух серых полей, имеющих яркости B' и B'', соответствующие коэффициентам отражения 63 и 22%. Длительность T предъявления полей одинакова.

Диаграмме (рис. 1, *б*) соответствует зрительная картина, получаемая с помощью значительно более быстрых мельканий белых и черных полей. Соотношение длительности фаз этих быстрых мельканий выбиралось с таким расчетом, чтобы средняя яркость быстрых мельканий равнялась яркости медленных мельканий в том же интервале времени.

Согласно обобщенному закону Тальбота, обе зрительные картины должны выглядеть одинаковыми при условии слияния быстрых мельканий.

Опыты выполнялись с помощью диска Максвелла. Схема кружка, использовавшегося в опыте, изображена на рис. 2. На кружке имеются два соприкасающихся кольца. На внутреннем кольце сформирована зрительная картина, соответствующая диаграмме на рис. 1, *а*, на внешнем — зрительная картина, соответствующая диаграмме (рис. 1, *б*). Частота смены яркости быстрых мельканий принята в 16 раз выше, чем медленных.

При постепенном раскручивании диска вертушки вначале на внешнем кольце заметны не только медленные, но и быстрые мелькания яркости. В этом случае заметно различие зрительных картин, наблюдаемых на соседних кольцах. Однако как только быстрые мелькания яркости на внешнем кольце перестают замечаться (это происходит при скорости вращения диска около 3 *об/сек*), обе зрительные картины становятся неотличимыми в полном соответствии с обобщенным законом Тальбота. При этом наблюдатель на обеих дорожках видит синфазные колебания светлоты. Дальнейшее повышение скорости вращения диска приводит к изменению характера колебаний светлоты на обоих полях, однако между соседними зрительными ощущениями все время сохраняется тождество. Так продолжается вплоть до полного слияния медленных мельканий при 40—50 *об/сек*. Во время проведения опытов освещенность диска вертушки изменялась в широких пределах (от 10 до 1000 *лк*).

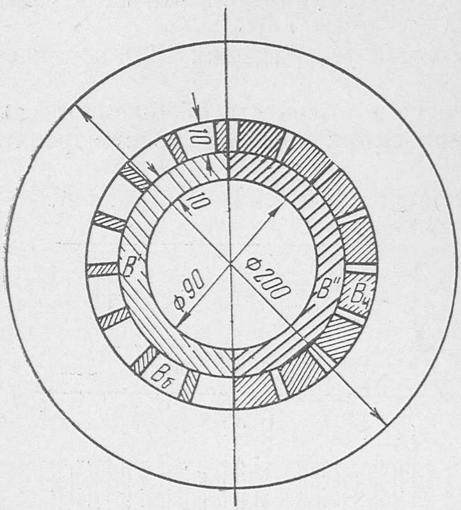

Рис. 2.

Подобные опыты выполнялись также при изменении яркости медленных мельканий во времени в виде синусоиды, суммы синусоид с различным периодом и др. Во всех этих экспериментах не было обнаружено каких-либо отклонений от обобщенного закона Тальбота.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. П. Шабанов-Кушнаренко, В. Л. Рвачев, А. Г. Мурашко, Г. Д. Майстровский. Математическая модель инерции и иррадиации зрения. Сб. «Математические модели в биологии и бионике». КДНТП, 1965.
2. А. В. Луизов. Инерция зрения. Оборонгиз, 1961.
3. H. F. Talbot. Experiment on light. Phil. Mag., 5 (1834).
4. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, изд. 6-е. Изд-во «Наука», 1966.

К ВОПРОСУ О МОДЕЛИРОВАНИИ МЕХАНИЗМОВ НОРМАЛИЗАЦИИ ЗРИТЕЛЬНЫХ ОБРАЗОВ

Е. П. Путятин, И. В. Шульгин, В. П. Юрченко, О. М. Абрамов

Введение

Пусть имеется некоторое множество M зрительных картин, заданных в виде функций распределения яркости $B(x, y)$ в поле зрения. Произведем разбиение множества M на подмножества $m_1, m_2, ..., m_i$ так, что 1) $m_i = \varnothing$; 2) $U_{im_i} = M$; 3) m_i и m_j либо не пересекаются, либо совпадают. Зрительные картины $B_1, B_2 \in M$ будем считать эквивалент-