

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Завідувач кафедри _____

(підпис)

“ 10 ” листопада 2025 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Сердюкову Андрію Андрійовичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Застосування інформаційних операторів у обробці зображень

затверджена наказом по університету від 10 листопада 2025 р. № 1027 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 18 грудня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи набір цілих та пошкоджених зображень

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	10 – 16 листопада 2025 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	17 – 23 листопада 2025 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	24 – 30 листопада 2025 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	01 – 07 грудня 2025 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	08 – 17 грудня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	18 грудня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 10 листопада 2025 р.

Здобувач _____
(підпис)

Керівник роботи _____ асист. Олексій СЛАВІК
(підпис) (посада, Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 62 с., 1 табл., 15 рис., 1 дод., 31 джерело.

АЛГОРИТМ, ВІДНОВЛЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ, ІНТЕРСТРІПАЦІЯ, ІНФОРМАЦІЙНИЙ ОПЕРАТОР, МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, МАТРИЦЯ, НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ОБРОБКА ЗОБРАЖЕНЬ, СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ.

Об'єкт дослідження – процес цифрової обробки та відновлення растрових зображень, що містять структурні пошкодження та втрачені фрагменти даних.

Мета роботи – підвищення якості та ефективності автоматизованого відновлення цифрових зображень, пошкоджених системою взаємно перпендикулярних смуг, шляхом застосування та програмної реалізації інформаційних операторів інтерстріпації.

Методи дослідження – методи теорії наближення функцій (для побудови відновлюючих операторів), методи лінійної алгебри (для виконання матричних операцій над пікселями), методи математичного моделювання та алгоритмізації (для програмної реалізації у середовищі Wolfram Mathematica).

У роботі вирішено науково-прикладне завдання відновлення двовимірних сигналів із втраченою інформацією на смугах. Проведено аналіз існуючих методів inpainting та виявлено їх недоліки при обробці сітчастих дефектів.

Вперше для задачі відновлення растрових зображень із широкими перехресними пошкодженнями адаптовано метод інтерстріпації з використанням булевих сум операторів Лагранжа. Це дозволило забезпечити високу точність відновлення у вузлових точках перетину смуг, що підтверджено об'єктивними метриками якості (SSIM, PSNR).

Розроблений алгоритм та програмне забезпечення рекомендовано використовувати для попередньої обробки зашумлених зображень перед їх подальшим аналізом або розпізнаванням.

Сфера застосування – системи комп’ютерного зору, архівна справа (реставрація оцифрованих документів), медична діагностика, обробка даних дистанційного зондування.

Значимість роботи полягає у створенні математично обґрунтованого інструментарію, який дозволяє автоматизувати рутинні процеси ретушування складних дефектів.

ABSTRACT

Introductory note: 62 pages, 1 tables, 15 figures, 1 appendixes, 31 sources.

ALGORITHM, FUNCTION APPROXIMATION, IMAGE PROCESSING, IMAGE RESTORATION, INFORMATION OPERATOR, INTERSTRIPATION, MATHEMATICAL MODEL, MATRIX, SYSTEM ANALYSIS.

Object of research – the process of automated restoration of digital images containing structural damage and information loss.

Purpose of work – to increase the efficiency and quality of reconstruction of digital images damaged by a system of mutually perpendicular strips by developing and applying the interstripation method.

Methods of research – methods of function approximation theory (for constructing restoration operators), linear algebra methods (for performing matrix operations on pixels), and methods of mathematical modeling and algorithm design (for software implementation in the Wolfram Mathematica environment).

The thesis solves the scientific and applied task of restoring two-dimensional signals with information loss on strips. An analysis of existing inpainting methods was conducted, and their shortcomings in processing grid-like defects were identified.

For the first time, the interstripation method using Boolean sums of Lagrange operators has been adapted for the task of restoring raster images with wide intersecting damage. This ensured high restoration accuracy at the nodal points of strip intersection, which is confirmed by objective quality metrics (SSIM, PSNR).

The developed algorithm and software are recommended for use in the preprocessing of noisy images prior to their further analysis or recognition.

Sphere of application – computer vision systems, archival work (restoration of digitized documents), medical diagnostics, and remote sensing data processing.

The significance of the work lies in the creation of a mathematically grounded toolkit that allows for the automation of routine processes for retouching complex defects.

ЗМІСТ

	С.
Перелік скорочень, умовних познач, одиниць і термінів	9
Вступ	10
1 Системний аналіз предметної області та постановка задач дослідження	13
1.1 Системний аналіз задачі застосування інформаційних операторів у обробці зображень.....	13
1.1.1 Вербальна модель системи.....	13
1.1.2 Морфологічний опис системи	14
1.1.3 Функціональна модель системи.....	17
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі обробки зображення.....	19
1.2.1 Модель аналізу проблеми.....	19
1.2.2 Модель розв'язку проблеми.....	21
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	23
1.3.1 Змістовна постановка задачі	23
1.3.2 Формальна постановка задачі	24
1.4 Постановка задач дослідження	26
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	28
2.1 Аналіз існуючих методів розв'язання задач відновлення зображень	28
2.2 Аналіз сучасних підходів до наближення функцій	30
2.3 Інформаційні оператори інтерстріпації Лагранжа	32
Висновки за розділом 2	34
3 Програмна реалізація	36
3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica 14.0	36
3.2 Алгоритм розв'язання задачі обробки зображень за допомогою інформаційного оператора інтерстріпації	37
3.3 Опис програми	39
Висновки за розділом 3	40

	8
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	42
4.1 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку, коли інформація про поверхню відома на системі смуг, границі яких паралельні осям координат	42
4.2 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді вертикальних смуг	43
4.3 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді горизонтальних смуг	45
4.4 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у вигляді перетинних взаємоперпендикулярних смуг	46
4.5 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді системи кадрів, границі яких паралельні осям координат	48
Висновки за розділом 4	50
Висновки	52
Перелік джерел посилання	54
Додаток А Лістинг програми	57

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ

Inpainting – метод відновлення втрачених або пошкоджених частин зображення;

MSE – Mean Squared Error (середньоквадратична похибка);

PDF – Probability Density Function (функція щільності ймовірності);

PSNR – Peak Signal-to-Noise Ratio (пікове відношення сигналу до шуму);

SSIM – Structural Similarity Index (індекс структурної подібності).

ВСТУП

Актуальність теми. Стрімкий розвиток цифрових технологій призвів до того, що растрові зображення стали основним носієм інформації в багатьох галузях : від медичної діагностики та дистанційного зондування Землі, до збереження культурної спадщини. Однак у процесі формування, передачі або зберігання графічні дані часто зазнають пошкоджень. Особливий клас таких дефектів – це втрата інформації вздовж певних ліній або смуг (подряпини на плівці, артефакти сканування, збої рядкової розгортки сенсорів) [1 – 4].

Сучасні методи відновлення зображень (Inpainting) розвиваються у двох основних напрямках: методи на основі розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних (Bertalmio, Sapiro) [5, 6] та методи машинного навчання (Deep Learning) [7-9]. Хоча нейромережеві підходи демонструють високі результати, вони потребують великих навчальних вибірок та значних обчислювальних ресурсів, а також часто працюють як «чорна скринька», не гарантуючи математичної точності на краях розривів. У той же час, класичні методи інтерполяції часто виявляються неефективними у випадках складних структурних пошкоджень, таких як перетин смуг («хрест», «решітка»), створюючи артефакти розмиття.

Актуальність роботи обумовлена необхідністю створення ефективних та швидкодіючих алгоритмів для автоматизованого відновлення зображень, що мають специфічні лінійні пошкодження. Існуючі графічні редактори часто вимагають ручного втручання для ретуші складних перетинів дефектів, тоді як запропонований підхід на основі операторів інтерстріпації дозволяє автоматизувати цей процес [10-13]. Застосування математичного апарату булевих сум операторів дає змогу розв'язати проблему відновлення інформації у вузлових точках (перетинах смуг), що є критично важливим для задач реставрації архівних документів, обробки аерокосмічних знімків та медичних зображень. Таким чином, дослідження методів побудови інформаційних операторів для задач від-

новлення двовимірних сигналів є своєчасним і важливим науково-технічним завданням.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є підвищення якості та ефективності автоматизованого відновлення цифрових зображень, пошкоджених системою взаємно перпендикулярних смуг, шляхом застосування та програмної реалізації інформаційних операторів інтерстріпації. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «обробки зображень за допомогою інформаційних операторів»;
- обґрунтувати вибір методу інтерстріпації на основі булевих сум операторів як найбільш ефективного інструменту для відновлення перехресних дефектів;
- розробити алгоритм адаптивної класифікації пошкоджень та процедуру ітераційного відновлення зображення, що включає етапи реконструкції смуг та їх перетинів;
- виконати програмну реалізацію розробленого методу в середовищі комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica;
- провести чисельні експерименти для оцінки точності відновлення та порівняти результати роботи алгоритму з оригінальними зображеннями за допомогою об'єктивних метрик якості (SSIM, MSE).

Об'єктом дослідження є процес цифрової обробки та відновлення растрових зображень, що містять структурні пошкодження та втрачені фрагменти даних.

Предметом дослідження є методи та інформаційні оператори інтерстріпації функцій двох змінних, побудовані на основі теорії наближення, для реконструкції зображень на системі взаємно перпендикулярних ліній.

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються методи теорії наближення функцій та функціонального аналізу, які використано для побудови та обґрунтування математичних моделей операторів інтерстріпації. Для обробки цифрових зображень як двовимірних дискретних структур засто-

совано методи лінійної алгебри. Практична реалізація алгоритмів виконана з використанням методів алгоритмізації та високорівневого програмування у середовищі Wolfram Mathematica, а верифікація отриманих результатів здійснена шляхом комп'ютерного моделювання та порівняльного аналізу похибок відношення.

Публікації. Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на XVIII Міжнародній науково-практичній конференції «Інформаційні технології і автоматизація – 2025» (м. Одеса, 30–31 жовтня 2025 р.) [14].

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз задачі застосування інформаційних операторів у обробці зображень

1.1.1 Вербальна модель системи

Обробка зображень – одна з ключових галузей сучасної інформатики, математичного моделювання та штучного інтелекту. Її основне завдання полягає у вилученні, аналізі та відновленні інформації, що міститься у цифрових зображеннях.

У контексті наукових досліджень методи обробки зображень широко застосовуються в медицині, дистанційному зондуванні Землі, машинному зорі, системах технічного контролю, комп'ютерній графіці, криміналістиці та інших сферах, де потрібне точне відтворення або покращення візуальної інформації.

Одним із напрямів розвитку сучасних інформаційних технологій є використання інформаційних операторів для аналізу та реконструкції зображень. Такі оператори дозволяють поєднати математичну строгість із гнучкістю аналітичних методів, що робить їх ефективними інструментами у відновленні даних, заданих частково або спотворено.

Особливе місце серед цих методів займає оператор інтерстріпації, розроблений О. М. Литвиним [15]. Сутність цього методу полягає у відновленні значень функції на системі смуг, паралельних координатним осям, за допомогою спеціально побудованого інформаційного оператора, який поєднує локальні поліноміальні апроксимації у вигляді інтерстріпаційних операторів Лагранжа.

На відміну від класичних інтерполяційних або апроксимаційних методів, інтерстріпація оперує не точками, а підобластями – смугами, що дозволяє отримати більш стійкі результати навіть при неповних або зашумлених даних.

Метод інтерстріпації дає змогу відновлювати поверхню яскравості зо-

браження на основі відомих фрагментів, забезпечуючи узгодженість і безперервність у межах усїєї області.

Такий підхід є універсальним і може застосовуватись до різних типів зображень – медичних, технічних, супутникових чи природних – у тих випадках, коли відомі лише часткові дані або спостерігаються втрати інформації.

Перевага інформаційних операторів полягає у тому, що вони дозволяють:

- зберегти структурну цілісність зображення при реконструкції;
- досягти високої точності без надмірного згладжування контурів;
- забезпечити аналітичний опис результату, що важливо для подальшого аналізу або автоматизованої обробки.

Таким чином, у межах даної роботи розглядається система обробки зображень, що базується на застосуванні інформаційного оператора інтерстріпції.

Основною метою є розробка математичної моделі та програмної реалізації методу, який забезпечує відновлення або покращення зображень на основі часткових даних.

Ця система належить до класу інформаційно-аналітичних систем і спрямована на вирішення практичних задач цифрової реконструкції зображень шляхом використання сучасного математичного апарату – інформаційних операторів.

1.1.2 Морфологічний опис системи

Досліджувана система – «Обробка зображень з використанням інформаційного оператора інтерстріпації» (далі – система обробки зображень).

Метафункція системи – вивчення можливостей застосування інформаційних операторів, зокрема оператора інтерстріпації, для відновлення та реконструкції зображень за частковими або неповними даними.

Призначення системи – розв'язання задач цифрової обробки зображень, пов'язаних з реконструкцією, усуненням шумів, заповненням пропусків або по-

кращенням якості зображень, використовуючи інформаційно-аналітичний підхід до апроксимації поверхонь яскравості.

Морфологічний опис системи розпочнемо з моделі та її взаємодії із зовнішнім середовищем (рис. 1.1).

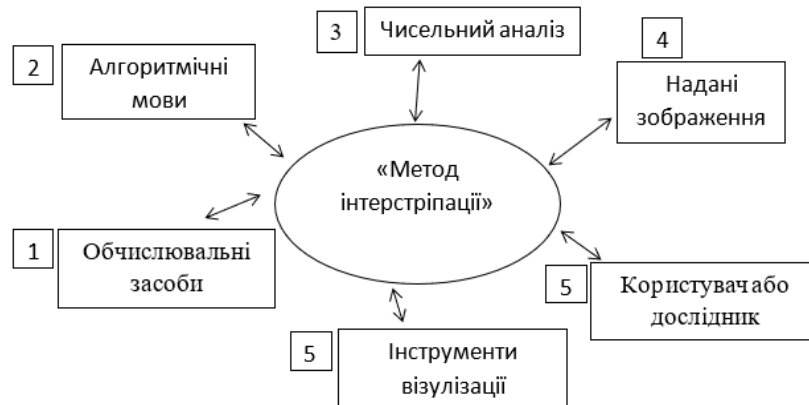


Рисунок 1.1 – Модель зовнішнього середовища системи

Зовнішнє середовище – це сукупність об’єктів, факторів і процесів, які впливають на систему або на які система впливає у процесі своєї роботи.

До складу зовнішнього середовища системи належать такі об’єкти:

- а) обчислювальні засоби – визначають швидкодію реалізації оператора інтерстріпації, точність обчислень і масштаб оброблюваних зображень;
- б) алгоритмічне та програмне забезпечення – забезпечує реалізацію операторів у вигляді програмних модулів, зокрема мовою Wolfram Mathematica;
- в) дослідження у галузі чисельного аналізу та інтерполяційних методів – формують теоретичну основу для побудови аналітичних апроксимацій та узагальнених операторів;
- г) дані прикладних галузей – медичні, супутникові, технічні або експериментальні зображення, які виступають об’єктами обробки;
- д) користувач (дослідник) – задає параметри методу, контролює точність і проводить аналіз отриманих результатів;
- е) програмні інструменти візуалізації – засоби для представлення результатів реконструкції у вигляді графічних чи числових зображень.

Модель типу "чорна скринька" системи "Система обробки зображень" представлена на рисунку 1.2. Така модель є вихідною, при побудові моделі складної системи, акцентує увагу дослідника на взаємодії системи із зовнішнім середовищем. Тут виходами системи є цільові продукти, а входи – це вплив середовища на систему. Зміст "чорна скринька" не розкривається, оскільки увага звертається лише на межу системи. Границя, у свою чергу, підкреслює цілісність системи, відокремленість її від зовнішнього середовища та взаємодію системи та середовища.



Рисунок 1.2 – Модель типу «чорна скринька»

У моделі типу "біла скринька" (рис. 1.3) описано "склад системи", вказані взаємозв'язки між елементами системи.

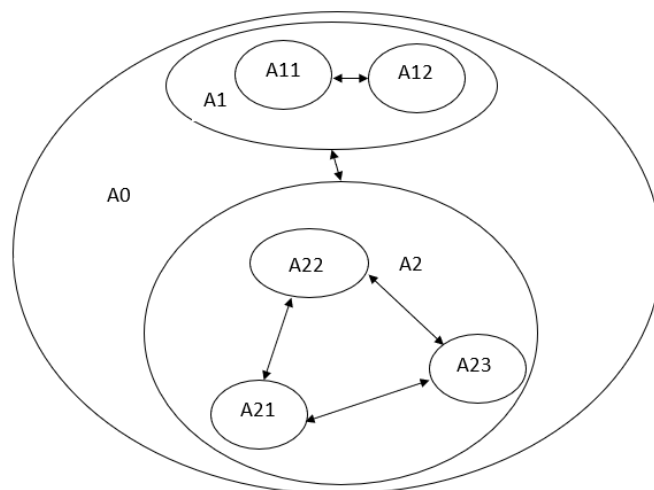


Рисунок 1.3 – Модель типу "біла скринька"

Дана система A0 складається з двох підсистем A1 та A2:

а) A1 – керуюча система, що складається з:

- 1) A11 – дослідник;
- 2) A12 – методи управління.

б) A2 – керована система, що складається з:

- 1) A21 – математичний апарат;
- 2) A22 – програмне забезпечення;
- 3) A23 – апаратне забезпечення.

1.1.3 Функціональна модель системи

Функціональна модель системи описує логічну структуру процесів, які забезпечують реалізацію інформаційного оператора інтерстріпації у задачах цифрової обробки зображень. Модель визначає послідовність етапів, взаємозв'язок між ними та інформацію, що є у системі.

Перша діаграма в ієрархії діаграм – IDEF 0 (рис. 1.4). Вона зображує функціонування системи загалом. Ця діаграма називається контекстною.

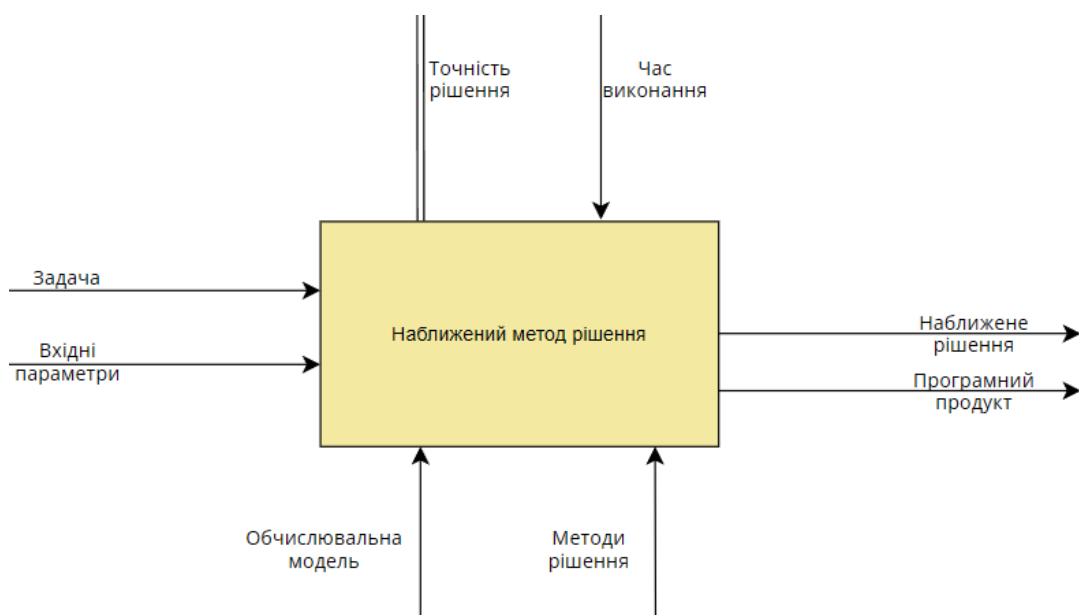


Рисунок 1.4 – Контекстна діаграма

Після того, як контекст описаний, проводиться побудова наступних діаграм в ієрархії. Кожна наступна діаграма є більш докладним описом однієї з робіт на вищій діаграмі.

Друга діаграма показує перший рівень декомпозиції (рис. 1.5), відповідно третя – другий (рис. 1.6).

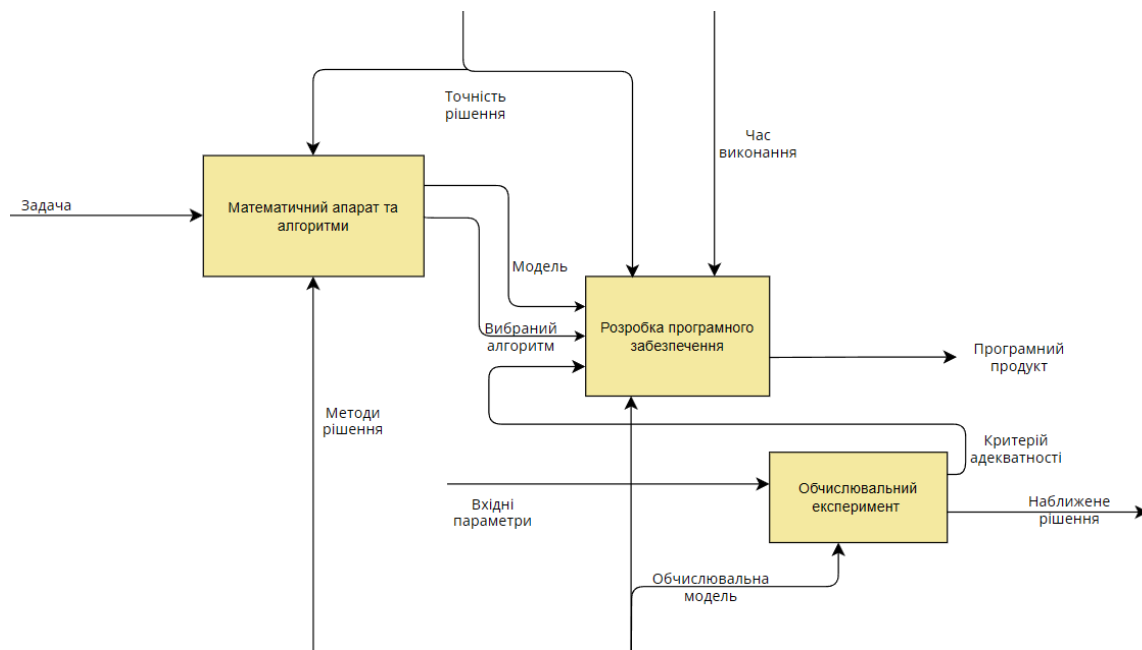


Рисунок 1.5 – IDEF 0 діаграма 1-го рівня декомпозиції



Рисунок 1.6 – DFD діаграма

1.2 Аналіз сценаріїв розв'язку задачі обробки зображення

1.2.1 Модель аналізу проблеми

Об'єктом дослідження є система, що містить проблему на основі моделі «Застосування інформаційних операторів у обробці зображень».

На просторі об'єктів, що розглядаються, виявимо ряд компонентів, які, на нашу думку, впливають на отримання необхідного результату (рис. 1.7).

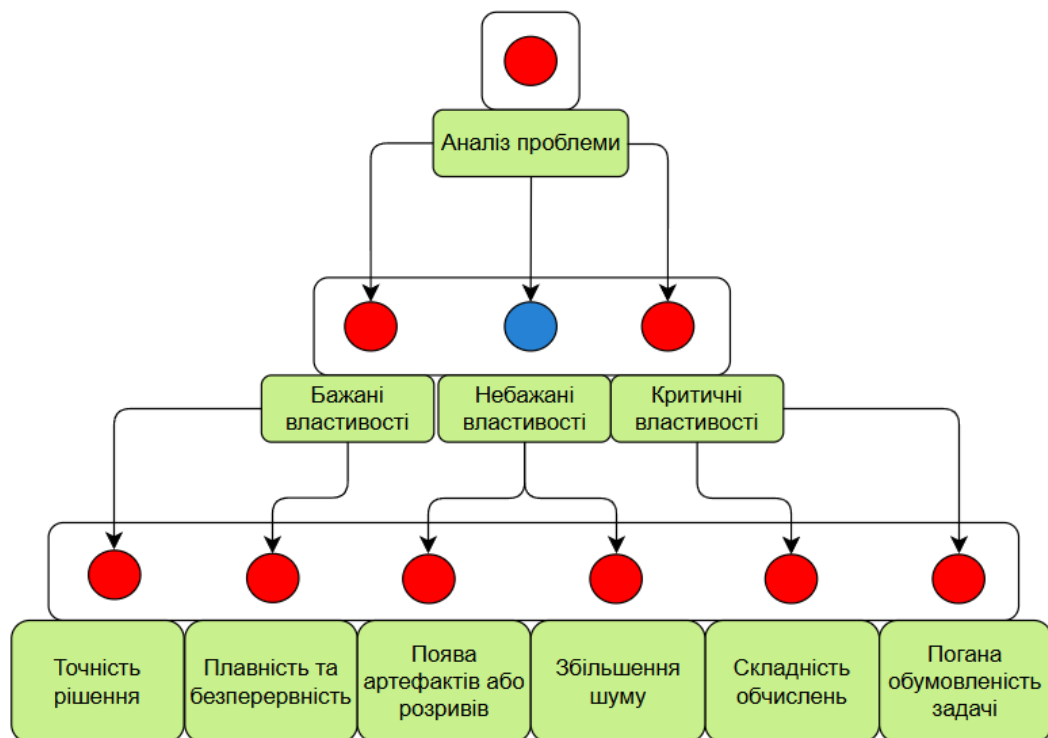


Рисунок 1.7 – Ієрархічна модель процесу аналізу незадоволенень

Ці незадоволеності розбиваються на три групи:

а) небажані властивості:

- 1) поява артефактів або розривів між областями відновлення;
- 2) збільшення шуму або спотворення кольорової структури.

б) критичні властивості:

- 1) складність обчислень;
- 2) погана обумовленість задачі.

в) бажані властивості:

- 1) плавність та безперервність відновленої поверхні;
- 2) точність рішення.

Проведемо аналіз незадоволень шляхом побудови ієрархічної моделі:

- перший рівень (фокус моделі) – незадоволеності;
- другий рівень – класифікація незадоволень;
- третій рівень – показники компонентів, що впливають на розв’язок поставленої задачі.

Отримаємо вектор глобальних пріоритетів незадоволень щодо мети верхнього рівня (рис. 1.8).

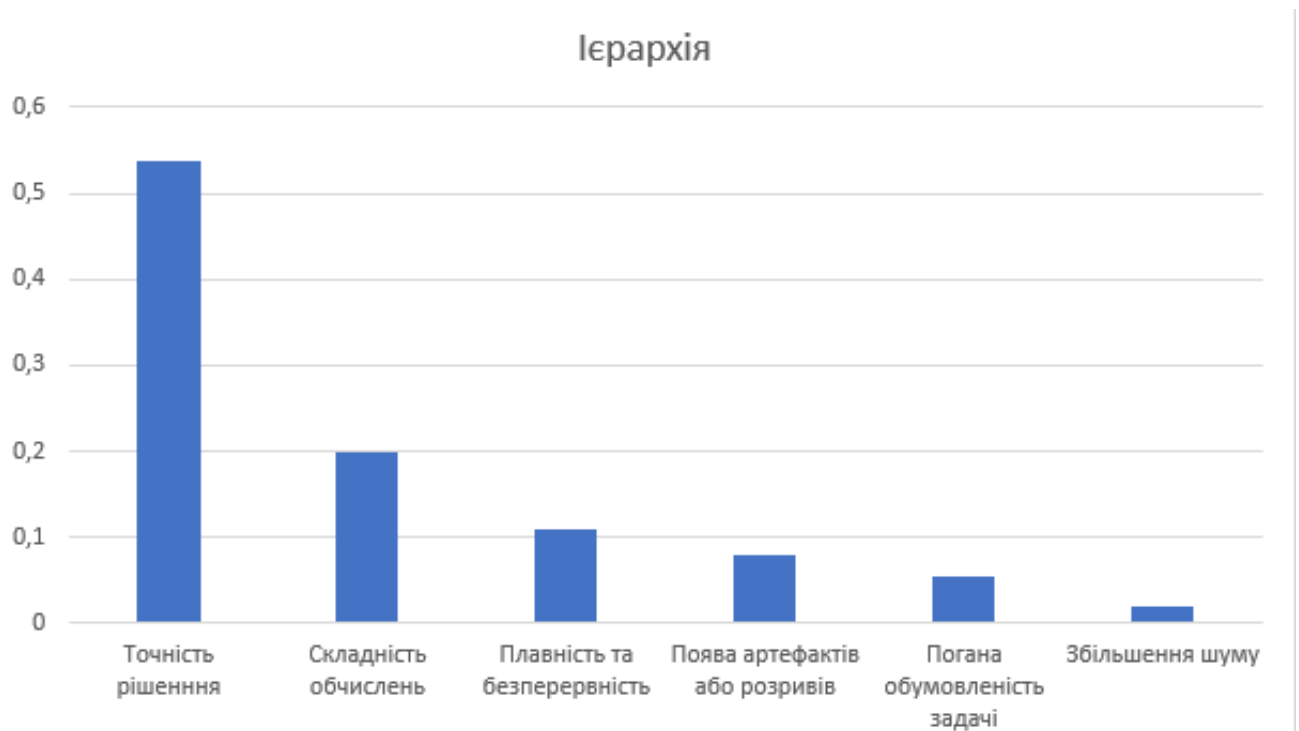


Рисунок 1.8 – Вектор глобальних пріоритетів

Показники узгодженості цієї задачі вважатимуться прийнятними: індекс узгодженості дорівнює $IУ=0,068645$ і ставлення узгодженості $СУ=0,14031$.

З проведеного аналізу незадоволень можна дійти висновку, що при вирішенні зазначеної проблеми зусилля спрямовані досягнення бажаної мети, а саме – точності наближеного рішення.

1.2.2 Модель розв'язку проблеми

Розглянемо модель прямого процесу аналізу проблеми (рис. 1.9).

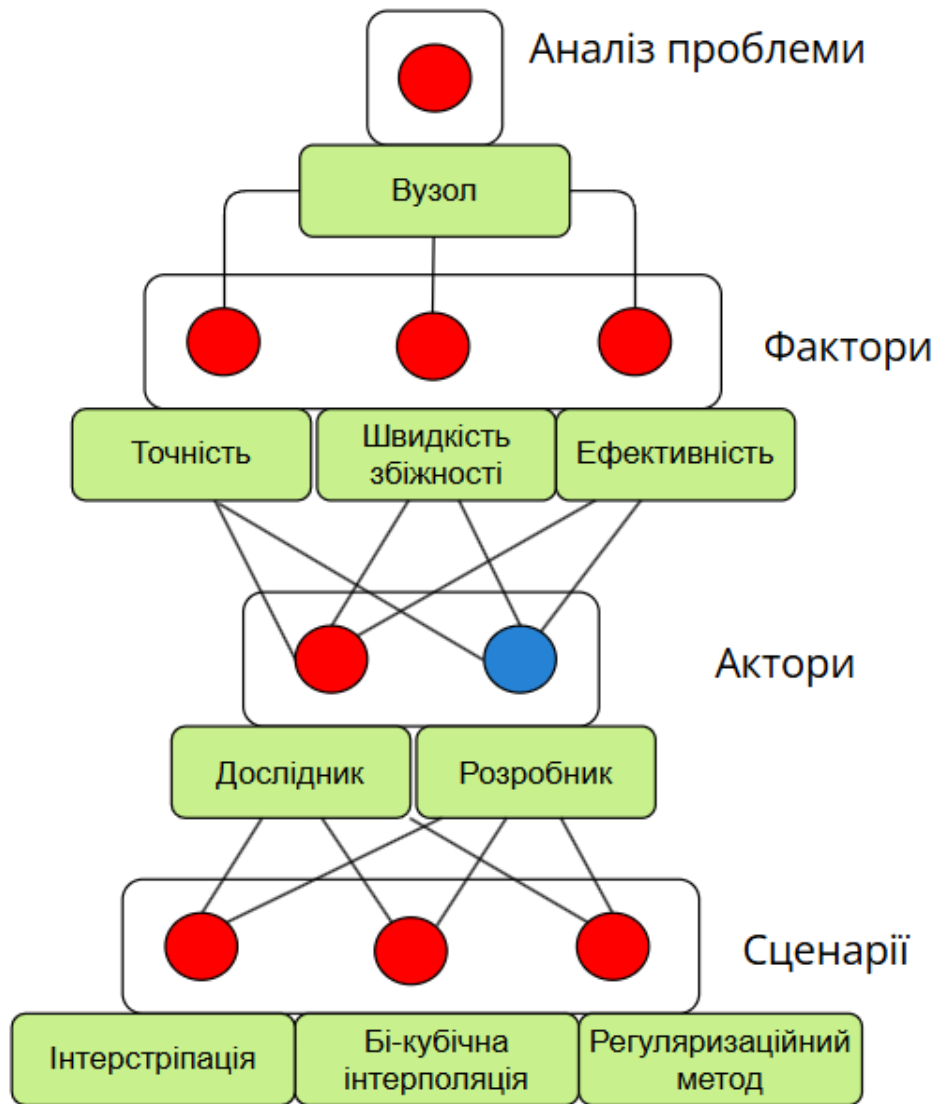


Рисунок 1.9 – Модель прямого процесу аналізу проблеми

У цій моделі розглядаються такі елементи за рівнями:

- а) нульовий рівень (фокус моделі) – моделювання процесу обробки зображень;
- б) 1-й рівень - (фактори): точність, швидкість збіжності, ефективність (кількість арифметичних операцій);
- в) 2-й рівень (актори): дослідник, розробник;

г) 3-й рівень (сценарії): Метод інтерстріпації, Бі-кубічна інтерполяція, Регуляризаційний метод Тихонова.

Послідовно заповнюючи матрицю порівнянь показників кожного рівня, наприкінці отримуємо вектор глобальних пріоритетів сценаріїв щодо верхнього рівня ієрархії (рис. 1.10). Аналіз останнього вектора дозволяє зробити висновок про те, що кращим для розв'язку поставленої задачі є метод інтерстріпації. Причому індекс узгодженості становить 0,17883, а відношення узгодженості 0,18277.

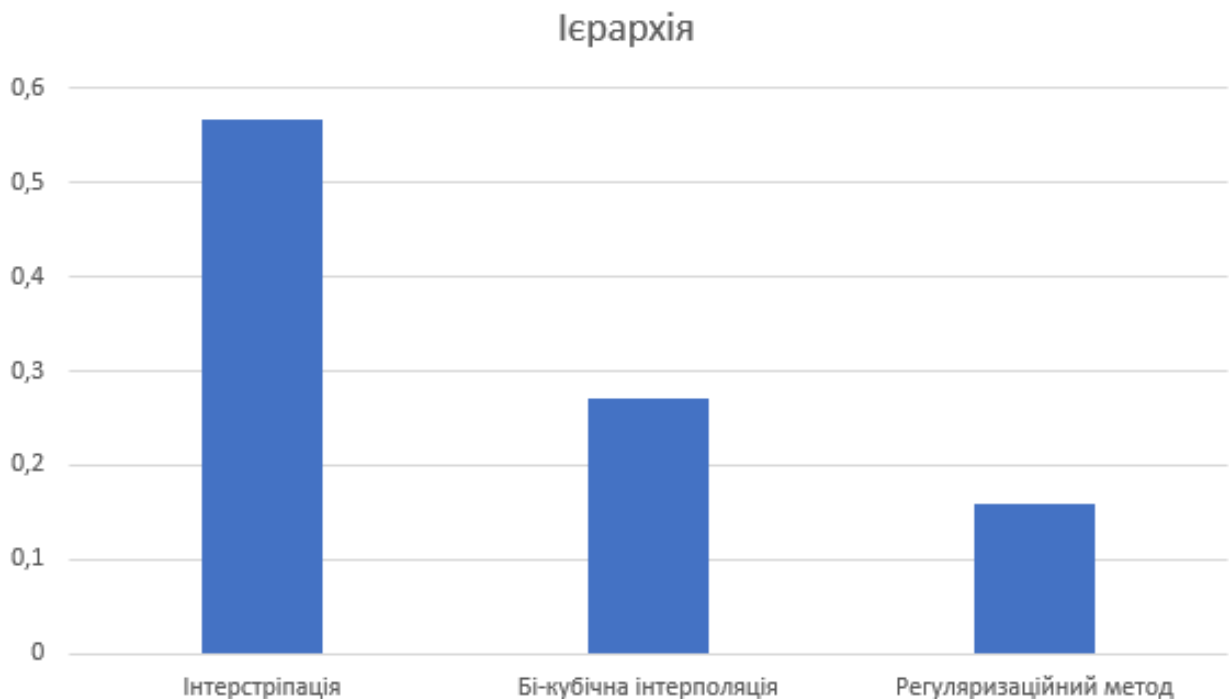


Рисунок 1.10 – Вектор глобальних пріоритетів

Для визначення узагальненого сценарію побудуємо кваліметричну таблицю (табл. 1.1), в якій за психометричною шкалою Сааті для кожного сценарію експертним шляхом визначено збільшення розглянутих незадовольень.

Отримані оцінки наприкінці кваліметричної таблиці свідчать про те, що ефективніше вирішити цю проблему може метод інтерстріпації.

Таблиця 1.1 – Кваліметрична таблиця

Незадоволеності	Інтерстріпація	Бі-кубічна інтерполя- ція	Регуляри- заційний метод	Узагальнений сценарій
	$v_1 = 0,567$	$v_2 = 0,272$	$v_3 = 0,16$	$\omega_i = \sum_{j=1}^2 v_j a_{ij}$
Точність рішення	3	2	4	2,885
Складність обчислень	2	3	4	2,59
Плавність та безпере- рвність	4	3	2	3,404
Поява артефактів	2	5	3	2,974
Погана обумовленість	5	3	3	4,131
Збільшення шуму	6	3	-4	3,578
Σ	22	19	12	19,562

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

1.3.1 Змістовна постановка задачі

Задача обробки зображень за допомогою інформаційних операторів полягає у відновленні або уточненні значень піксельної функції у випадках, коли відомі дані задані лише на окремих підобластях області визначення. Така ситуація характерна для задач реконструкції, фільтрації або масштабування зображень, де необхідно отримати безперервне представлення дискретно заданих даних.

Метод інтерстріпації, розроблений у межах теорії інформаційних операторів, дозволяє виконати відновлення функцій на смугах, паралельних коорди-

натним осям, а також у точках їх перетину. На відміну від класичних методів інтерполяції, що відновлюють значення між вузлами сітки, інтерстріпація спрямована на відновлення функціональних залежностей на множинах лінійних підобластей (смугах), що забезпечує більш гнучке та точне відтворення структури даних.

Змістовно задача полягає у тому, щоб, маючи неповну або частково визначену інформацію про значення яскравості зображення на підобластях області, побудувати наближений оператор, який забезпечує узгоджене відновлення значень функції на всій області визначення. Це досягається за рахунок використання локальних поліноміальних апроксимацій Лагранжа, комбінованих у вигляді інформаційного оператора інтерстріпації.

У контексті обробки зображень застосування методу інтерстріпації дозволяє:

- виконувати відновлення неповних зображень або зображень із пропущеними ділянками;
- згладжувати нерівномірності, що виникають унаслідок дискретизації або шумів;
- забезпечувати високу точність відновлення за рахунок багатовимірної узгодженості між смугами відновлення;
- застосовувати метод для покращення якості масштабування або реконструкції даних у задачах комп'ютерного зору.

1.3.2 Формальна постановка задачі

Нехай $f(x, y)$ – функція двох змінних, яка визначена на деякій прямокутній області $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Припустимо, що значення цієї функції відомі лише на системі прямокутних елементів, границі яких паралельні осям координат та описуються у вигляді:

$$\Pi_{i,j} = \{(x, y) : a_i \leq x \leq b_i, c_j \leq y \leq d_j\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Інформація про поверхню є невідомою у області $D \setminus \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m \Pi_{i,j}$, яка являє собою об'єднання смуг із границями, що паралельні осям координат вигляду:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{x,i} &= \{(x, y) : b_i < x < a_{i+1}\}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \bar{S}_{y,j} &= \{(x, y) : d_j < y < c_{j+1}\}, \quad j = \overline{1, m-1}. \end{aligned}$$

Введемо до розгляду оператор:

$$Of(x, y) = \begin{cases} f(x, y)|_{\Pi_{i,j}}, & (x, y) \in \Pi_{i,j}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \\ L_{x,i}f(x, y), & (x, y) \in \bar{S}_{x,i}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ L_{y,j}f(x, y), & (x, y) \in \bar{S}_{y,j}, \quad j = \overline{1, m-1}, \\ L_{i,j}f(x, y), & (x, y) \in \bar{S}_{x,i} \cup \bar{S}_{y,j}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \end{cases}$$

$$\text{де } L_{x,i}f(x, y) = f(y)|_{x=b_i} \frac{x - a_{i+1}}{b_i - a_{i+1}} + f(y)|_{x=a_{i+1}} \frac{x - b_i}{a_{i+1} - b_i},$$

$$L_{y,j}f(x, y) = f(x)|_{y=d_j} \frac{y - c_{j+1}}{d_j - c_{j+1}} + f(x)|_{y=c_{j+1}} \frac{y - d_j}{c_{j+1} - d_j},$$

$$L_{i,j}f(x, y) = [L_{x,i} + L_{y,j} - L_{x,i}L_{y,j}]f(x, y).$$

Функції однієї змінної у формулах для операторів $L_{x,i}f(x, y)$, $L_{y,j}f(x, y)$, $L_{i,j}f(x, y)$, $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, m-1}$ – сліди функції на відповідних прямих, $f(x, y)|_{\Pi_{i,j}}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ – сліди функцій на прямокутних областях $\Pi_{i,j}$.

1.4 Постановка задач дослідження

Метою кваліфікаційної роботи є підвищення якості та ефективності автоматизованого відновлення цифрових зображень, пошкоджених системою взаємно перпендикулярних смуг, шляхом застосування та програмної реалізації інформаційних операторів інтерстріпації.

Об'єктом дослідження є процеси цифрової обробки та відновлення зображень, представлених у вигляді двовимірних функцій яскравості, визначених на обмежених або фрагментарних множинах.

Предметом дослідження є інформаційний оператор інтерстріпації та його математичні, алгоритмічні й прикладні властивості при використанні для обробки цифрових зображень.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі основні наукові та прикладні задачі дослідження:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «обробки зображень за допомогою інформаційних операторів»;
- обґрунтувати вибір методу інтерстріпації на основі булевих сум операторів як найбільш ефективного інструменту для відновлення перехресних дефектів;
- розробити алгоритм адаптивної класифікації пошкоджень та процедуру ітераційного відновлення зображення, що включає етапи реконструкції смуг та їх перетинів;
- виконати програмну реалізацію розробленого методу в середовищі комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica;
- провести чисельні експерименти для оцінки точності відновлення та порівняти результати роботи алгоритму з оригінальними зображеннями за допомогою об'єктивних метрик якості (SSIM, MSE).

У результаті виконання дослідження очікується отримати узагальнену

математичну модель інформаційного оператора інтерстріпації та практичний алгоритм його застосування для цифрової реконструкції зображень, що може бути використано в системах технічного зору, комп'ютерної графіки та аналітичної обробки візуальних даних.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Аналіз існуючих методів розв'язання задач відновлення зображень

Задачі відновлення зображень належать до важливих напрямів цифрової обробки інформації. Їх метою є реконструкція значень функції яскравості $f(x, y)$, визначеної на деякій області D , у випадках, коли дані є частковими, неповними або спотвореними. Подібні задачі виникають при передискретизації, усуненні шумів, реконструкції втрачених фрагментів зображень, а також у проблемах технічного зору та медичної візуалізації.

Існує декілька підходів до розв'язання таких задач, які базуються на різних математичних принципах – від класичних інтерполяційних схем до складних моделей регуляризації або машинного навчання. Для визначення оптимального методу, придатного до відновлення зображень, що задані лише на прямокутних підобластях, доцільно розглянути їх коротку характеристику.

Найпростішим і найпоширенішим класом є методи інтерполяції, які відновлюють проміжні значення функції між відомими вузлами. До них належать бі-лінійна та бі-кубічна інтерполяція, сплайнові методи, поліноміальні апроксимації тощо [16, 17].

Їх перевага полягає у простоті реалізації, невеликих обчислювальних витратах та можливості застосування у режимі реального часу. Проте такі методи мають низку обмежень:

- вимагають повної регулярної сітки даних (тобто значення функції мають бути відомі у кожному вузлі області визначення);
- є точково орієнтованими, тобто працюють із відновленням значень між окремими вузлами, не враховуючи структурну цілісність областей;
- погано працюють у випадку фрагментарних або нерівномірних даних, що робить їх непридатними для задач, де відомі лише окремі підобласті.

Регуляризаційні методи.

Методи цієї групи ґрунтуються на розв'язанні обернених задач із додат-

ковими умовами згладжування. Найпоширенішим є метод Тихонова, який передбачає мінімізацію функціонала виду:

$$E = \|Af - g\|^2 + \lambda \|Lf\|^2,$$

де A – оператор формування спостережень,

g – відомі дані,

λ – параметр регуляризації,

L – оператор згладжування.

Такі методи забезпечують високу стійкість до шумів та гладкість результату, але водночас можуть втрачати дрібні деталі та контури, оскільки орієнтовані на глобальне вирівнювання поверхні. Крім того, правильний вибір параметра регуляризації є складним і часто потребує експериментального підбору.

Регуляризаційні методи ефективні у випадках, коли дані рівномірно розподілені або містять шум, але не підходять для задач, де відомі значення задані на окремих підобластях, оскільки не передбачають роботи з дискретними фрагментами області визначення.

Методи на основі статистичного та нейронного моделювання

Сучасні підходи до реконструкції зображень часто використовують машинне навчання – зокрема, автокодери, згорткові нейронні мережі (CNN) або генеративно-змагальні мережі (GAN). Ці методи показують високу якість відновлення при наявності великих навчальних вибірок, здатні відтворювати текстури, деталі та усувати шум [18 – 22].

Однак такі моделі мають суттєві недоліки: вони є “чорними скриньками”, важко піддаються аналітичному аналізу, потребують значних обчислювальних ресурсів та не гарантують аналітичної узгодженості відновленої функції. У науково-аналітичних задачах, де важлива формальна точність і контроль за похибкою, ці підходи часто виявляються надлишково складними.

Інформаційно-операторні методи.

Окремий клас становлять методи, що базуються на інформаційних операторах, до яких належить оператор інтерстріпації О. М. Литвина. Ці методи використовують аналітичні принципи побудови апроксимацій на підобластях області визначення.

Інформаційні оператори дозволяють працювати не з окремими вузлами, а з областями, на яких відомі значення функції. Завдяки цьому можна відновлювати поверхню функції навіть за наявності даних на неповній множині прямокутних елементів. Оператор інтерстріпації поєднує локальні апроксимації у єдину узгоджену модель, що забезпечує безперервність і гладкість результату без необхідності повної сітки вузлів.

Таким чином, метод інтерстріпації поєднує аналітичну строгість класичних підходів і гнучкість сучасних обчислювальних моделей, що робить його перспективним для задач, де відомі дані визначені лише на підобластях.

2.2 Аналіз сучасних підходів до наближення функцій

Останні дослідження та публікації в галузі інформаційних операторів, зокрема інтерлінації та класичних методів інтерполяції, демонструють значний прогрес у теоретичних та прикладних аспектах. Ці методи знаходять широке застосування в різноманітних задачах, від геометричного моделювання до фінансового аналізу.

Класичні методи інтерполяції, такі як поліноміальна інтерполяція Лагранжа та Ньютона, сплайни та інші, продовжують активно застосовуватися в чисельному моделюванні. Наприклад, у задачах геометричного моделювання та інженерії використовуються різноманітні методи інтерполяції для побудови поверхонь та кривих. Відносно новим напрямком у інформаційних операторах є інформаційні оператори, що були запропоновані О. М. Литвиним [23-29]. Запропоновані інформаційні оператори дозволяють використовувати інформацію про об'єкт дослідження не тільки на системі точок, а і на лініях, локусах, сму-

гах та площинах. Такі інформаційні оператори застосовуються для широкого класу прикладних задач у різноманітних галузях науки та техніки.

Нехай $f(x, y)$ – функція двох змінних, що задана на деякій прямокутній області $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, яка називається областю інтерстріпації. Припустимо, що значення цієї функції відомі точно на деякій системі смуг:

$$\Omega_k = \{(x, y) : \alpha_k \leq \omega_k(x, y) \leq \beta_k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Припустимо, що границі смуг є прямими, що паралельні осям координат. В такому випадку систему смуг можна записати у спрощеному вигляді, якщо границі смуг паралельні між собою та паралельні осі Oy :

$$\Omega_{x,k} = \{(x, y) : a_k \leq x \leq b_k\}, \quad k = \overline{1, n},$$

або, якщо границі смуг паралельні між собою та паралельні осі Ox :

$$\Omega_{y,p} = \{(x, y) : c_p \leq y \leq d_p\}, \quad p = \overline{1, m}.$$

Введемо до розгляду наступні послідовності значень, які містять координати границь області інтерстріпації та границь смуг вигляду:

$$\begin{aligned} \{x_k\}_{k=1}^{2n} : a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_{n-1} < b_{n-1} \leq a_n < b_n, \\ \{y_p\}_{p=1}^{2m} : c_1 < d_1 \leq c_2 < d_2 \leq \dots \leq c_{m-1} < d_{m-1} \leq c_m < d_m. \end{aligned}$$

Отже, у точках із області D , які не належать жодній із наведених вище смуг $\Omega_{x,k}$ або $\Omega_{y,p}$, інформація про функцію є невідомою. Позначимо такі області через:

$$\overline{\Omega}_{x,k,k+1} = \{(x, y) : b_k \leq x \leq a_{k+1}\}, \quad k = \overline{1, n-1},$$

$$\overline{\Omega}_{y,p,p+1} = \{(x, y) : d_p \leq x \leq c_{p+1}\}, \quad p = \overline{1, m-1}.$$

2.3 Інформаційні оператори інтерстріпації Лагранжа

Введемо поняття сліду функції на смузі та на лінії. Слідом функції $f(x, y)$ на смузі Ω називається функція двох змінних $f(x, y)|_{\Omega}$, яка в кожній точці цієї смуги приймає такі ж значення, як і функція $f(x, y)$.

Слідом функції $f(x, y)$ на лінії Γ називається функція однієї змінної $f(x)|_{\Gamma}$ або $f(y)|_{\Gamma}$, яка в кожній точці цієї лінії приймає такі ж значення, як і функція $f(x, y)$.

Інтерстріпацією неперервної функції двох змінних $f(x, y)$ (від англ. Inter – між, stripe – лінія) на системі смуг Ω_k , $k \in \mathbb{N}$ називається її відновлення за допомогою її слідів на смугах $f(x, y)|_{\Omega_k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Загальний вигляд оператора інтерстріпації, який на кожній смузі повертає значення функції у вигляді сліду функції на смузі, а між смугами наближує функцію за відомою інформацією про неї на системі смуг, має вигляд:

$$Of(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in \Omega_{x,k} \cup \Omega_{y,p}, \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, m}, \\ Lf(x, y), & (x, y) \notin \Omega_{x,k} \cup \Omega_{y,p}, \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Припустимо, що інформація про функцію відома лише на системі смуг, границі яких паралельні між собою та паралельні осі Oy .

Для наближення значень функції між смугами $\Omega_{x,k}$, $k = \overline{1, n}$, границі яких паралельні між собою, паралельні осі Oy і можуть бути представлені у вигляді послідовності $\{x_k\}_{k=1}^{2n}$, використовується оператор інтерстріпації у формі Лагра-

нжа вигляду:

$$Lf(x, y) = \sum_{k=1}^{2n} f(x, y)|_{x=x_k} \prod_{i=1, i \neq k}^{2n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \sum_{k=1}^{2n} f(x_k, y) \prod_{i=1, i \neq k}^{2n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Властивості оператора інтерстріпації для наближення значень функції між смугами $\Omega_{x,k}$, $k = \overline{1, n}$:

$$Of(x, y)|_{\Omega_{x,k}} = f(x, y)|_{\Omega_{x,k}}, \quad k = \overline{1, n}.$$

У випадку якщо $b_k = a_{k+1}$, $k = \overline{1, n-1}$, то оператор інтерстріпації буде точно наближувати функцію по заданим слідам функції на кожній смузі $\Omega_{x,k}$, $k = \overline{1, n}$.

Для наближення значень функції між смугами $\Omega_{y,p}$, $p = \overline{1, m}$, границі яких паралельні між собою, паралельні осі Ox і можуть бути представлені у вигляді послідовності $\{y_p\}_{p=1}^{2m}$, використовується оператор інтерстріпації у формі Лагранжа вигляду:

$$Lf(x, y) = \sum_{p=1}^{2m} f(x, y)|_{y=y_p} \prod_{j=1, j \neq p}^{2m} \frac{y - y_j}{y_p - y_j} = \sum_{p=1}^{2m} f(x, y_p) \prod_{j=1, j \neq p}^{2m} \frac{y - y_j}{y_p - y_j}.$$

Властивості оператора інтерстріпації для наближення значень функції між смугами $\Omega_{y,p}$, $p = \overline{1, m}$:

$$Of(x, y)|_{\Omega_{y,p}} = f(x, y)|_{\Omega_{y,p}}, \quad p = \overline{1, m}.$$

У випадку якщо $d_p = c_{p+1}$, $p = \overline{1, m-1}$, то оператор інтерстріпації буде точно наближувати функцію по заданим слідам функції на кожній смузі $\Omega_{y,p}$, $p = \overline{1, m}$.

Найбільш загальним випадком є випадок, коли інформація про функцію відома на системі смуг, границі яких є взаємно перпендикулярними між собою. Тобто відомими є сліди функції на смугах $\Omega_{x,k}$, $k = \overline{1, n}$, границі яких паралельні осі Oy , та на смугах $\Omega_{y,p}$, $p = \overline{1, m}$, границі яких паралельні осі Ox . Об'єднання інформації з усіх смуг утворює систему перетинних смуг із прямокутними областями, де інформація про функцію є невідомою:

$$\overline{\Omega}_{k,k+1,p,p+1} = \{(x, y) : (x, y) \in (b_k, a_{k+1}) \times (d_p, c_{p+1})\}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad p = \overline{1, m-1}.$$

Для наближення значень функції такій системі смуг використовується оператор інтерстріпації у формі Лагранжа вигляду:

$$Lf(x, y) = \sum_{k=1}^{2n} f(x_k, y) \prod_{i=1, i \neq k}^{2n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} + \sum_{p=1}^{2m} f(x, y_p) \prod_{j=1, j \neq p}^{2m} \frac{y - y_j}{y_p - y_j} - \\ \sum_{k=1}^{2n} \sum_{p=1}^{2m} f(x_k, y_p) \prod_{i=1, i \neq k}^{2n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \prod_{j=1, j \neq p}^{2m} \frac{y - y_j}{y_p - y_j}.$$

Властивості оператора інтерстріпації для наближення значень функції на системі смуг, границі яких взаємно перпендикулярні та паралельні осям координат:

$$Of(x, y)|_{\Omega_{x,k}} = f(x, y)|_{\Omega_{x,k}}, \quad k = \overline{1, n}.$$

$$Of(x, y)|_{\Omega_{y,p}} = f(x, y)|_{\Omega_{y,p}}, \quad p = \overline{1, m}.$$

Висновки за розділом 2

У другому розділі проведено теоретичне обґрунтування та побудову математичної моделі відновлення цифрових зображень із використанням апарату

теорії наближення функцій. Досліджено задачу реконструкції двовимірних сигналів у випадках втрати інформації на системі вертикальних та горизонтальних смуг. Для розв'язання поставленої задачі обрано метод інтерстріпації, який базується на використанні операторів Лагранжа. Встановлено, що для дискретного представлення зображень доцільним є використання лінійних операторів, які забезпечують достатню точність наближення при мінімальних обчислювальних витратах, використовуючи як вхідні дані значення яскравості пікселів на межах пошкоджених ділянок.

Ключовим теоретичним результатом розділу є обґрунтування застосування булевих сум операторів для відновлення областей перетину смуг. Показано, що просте додавання результатів роботи одновимірних операторів призводить до спотворення інформації у вузлових точках. Натомість, використання конструкції булевої суми, яка включає віднімання мішаного оператора, дозволяє коректно врахувати граничні умови з обох напрямків одночасно. Це забезпечує точне відтворення значень функції на перетині ліній та гарантує неперервність відновленої поверхні на стиках із непошкодженими ділянками зображення.

Розроблені математичні вирази та алгоритмічні схеми адаптовані для програмної реалізації. Вони враховують специфіку цифрових растрових зображень як матриць дискретних значень і є основою для створення автоматизованої системи реставрації, опис та тестування якої наведено у наступних розділах роботи. Таким чином, обраний математичний апарат повністю відповідає меті роботи та дозволяє розв'язувати задачу відновлення структурних дефектів типу «решітка» з високим ступенем адекватності.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica 14.0

Для програмної реалізації методу інтерстріпації було обрано систему комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica версії 14.0. Цей вибір обумовлений специфікою поставленої наукової задачі, яка вимагає поєднання символічних перетворень для запису загальних операторів наближення з високоефективною чисельною обробкою великих масивів даних, якими є цифрові растрові зображення. Mathematica виступає як єдине інтегроване середовище, що надає повний спектр інструментів для математичного моделювання, візуалізації та інженерних розрахунків без необхідності підключення зовнішніх бібліотек [30-31].

Ключовою перевагою обраної системи є гібридний підхід до обчислень. На відміну від класичних мов програмування, таких як C++ або Python, Mathematica дозволяє оперувати складними математичними абстракціями. Окрім цього, система базується на оптимізованих низькорівневих алгоритмах лінійної алгебри, що забезпечує високу швидкість виконання інтерполяційних обчислень над матрицями інтенсивностей навіть для зображень високої роздільної здатності.

Важливим фактором для виконання роботи стала наявність у версії 14.0 спеціалізованого набору функцій для цифрової обробки зображень (Image Processing). Вбудовані інструменти дозволяють ефективно виконувати попередню обробку даних: імпорт та експорт файлів різних форматів, конвертацію графічних об'єктів у числові матриці, нормалізацію кольорових просторів та морфологічний аналіз пошкоджених ділянок. Це значно спростило етап підготовки вхідних даних для застосування розроблених операторів відновлення.

Окремо слід відзначити можливості системи щодо інтерактивної візуалізації та верифікації результатів. Використання динамічних функцій дозволило створити анімацію покрокового процесу відновлення зображення, що є критично важливим для візуального контролю коректності роботи алгоритму в зонах

перетину смуг. Для об'єктивної оцінки якості реконструкції були використані вбудовані метрики, такі як структурна подібність (SSIM) та середньоквадратична похибка, що дозволило отримати точні кількісні характеристики ефективності запропонованого методу.

3.2 Алгоритм розв'язання задачі обробки зображень за допомогою інформаційного оператора інтерстріпації

Алгоритм відновлення базується на застосуванні методу інтерстріпації для реконструкції втрачених даних на основі інформації з непошкоджених ділянок. Процес обробки є ітеративним і складається з послідовності логічних етапів, наведених нижче.

Крок 1. Аналіз вхідних даних та сегментація

На вхід алгоритму подається цифрове зображення. Першим кроком виконується його перетворення у півтоновий формат (матриця інтенсивностей), де кожен піксель набуває значення з інтервалу $[0,1]$.

Паралельно формується карта дефектів (маска пошкоджень). Для цього здійснюється порогова фільтрація за кольоровими складовими: пікселі, що потрапляють у заданий діапазон кольорів (наприклад, червоний маркер пошкодження), позначаються як "втрачені", інші – як "опорні".

Крок 2. Геометрична класифікація дефектів

Оскільки обраний математичний апарат використовує різні формули для відновлення смуг та їх перетинів, алгоритм виконує локальну класифікацію кожного пошкодженого фрагмента. Для кожного пікселя маски визначаються відстані до найближчих опорних точок по чотирьох напрямках (вгору, вниз, вліво, вправо).

На основі співвідношення знайдених відстаней приймається рішення про тип локальної області:

1. Вертикальна ділянка: відстань до бічних меж значно менша за відстань до вертикальних.

2. Горизонтальна ділянка: відстань до верхньої або нижньої межі менша за бічні.

3. Ділянка перетину: відстані співмірні або межі віддалені по обох осях.

Крок 3. Відновлення лінійних ділянок (смуг)

На цьому кроці обробляються пікселі, класифіковані як частини смуг.

Для вертикальних ділянок застосовується одновимірна інтерполяція вздовж рядка матриці L_x , використовуючи знайдені ліву та праву границі.

Для горизонтальних ділянок застосовується інтерполяція вздовж стовпця L_y , спираючись на верхню та нижню межі.

Важливою особливістю алгоритму є пріоритетність обробки: відновлення відбувається від країв пошкодження до центру, що забезпечує неперервність градієнта яскравості.

Крок 4. Відновлення перетинів смуг

Після реконструкції смуг зони перетину стають замкненими областями, оточеними відновленими даними. Для них застосовується комбінований оператор інтерстріпації.

Алгоритм обчислює значення пікселя як суму результатів горизонтальної та вертикальної інтерполяції з відніманням коригуючого члена (білінійної інтерполяції по кутових точках області). Це дозволяє уникнути ефекту подвійного врахування інформації в центрі перетину та забезпечити гладке "зшивання" текстури з чотирьох сторін.

Крок 5. Формування результату

Отримані відновлені значення інтегруються в вихідну матрицю зображення, замінюючи пошкоджені пікселі. Результуюча матриця конвертується у графічний формат для візуалізації та подальшого збереження.

3.3 Опис програми

Програмний продукт реалізовано у середовищі Wolfram Mathematica у вигляді інтерактивного документа (Notebook), що поєднує виконуваний код, текстові пояснення та блоки візуалізації. Структурно програма складається з чотирьох логічних модулів: визначення базових операторів, аналіз геометричної структури пошкоджень, модуль ітераційного відновлення та модуль оцінки якості.

Для програмного відтворення методу інтерстріпації розроблено набір користувачьких функцій, які безпосередньо імплементують математичні формули наближення.

Функції $LxOp$ та $LyOp$ реалізують лінійну інтерполяцію Лагранжа вздовж осей Ox та Oy відповідно.

Функція $LijOp$ реалізує булеву суму операторів для заповнення вузлових точок, де перетинаються смуги. Програмно це реалізовано як сума одновимірних відновлень за вирахуванням білінійної інтерполяції.

Ключовим елементом адаптивного алгоритму є функція `findAnchors[y, x]`. Вона отримує координати пошкодженого пікселя і виконує сканування матриці маски `maskBinary` у чотирьох напрямках до моменту виявлення "здорового" пікселя. Результатом роботи функції є набір координат $\{x_L, x_R, y_T, y_B\}$, які передаються в оператори відновлення.

Для розділення задачі на підзадачі (смуги та перетини) використовується логічний блок сортування. Всі пошкоджені пікселі заносяться до списку `tasksPhase1` (для смуг) або `intersectionPixels` (для перетинів) на основі порівняння знайдених відстаней.

Основний обчислювальний процес розділено на дві фази, реалізовані через циклічні конструкції `Do` [31]:

1. Обробка масиву `tasksPhase1`. Перед запуском масив сортується за зростанням відстані до найближчої межі (`SortBy[..., #["dist"] &]`). Це гарантує, що

відновлення відбувається "пошарово" – від країв дефекту до його центру, що мінімізує накопичення похибки

2. Для обробки складних перетинів використовується функція `MorphologicalComponents`, яка розбиває маску перетинів на окремі зв'язні області. Всередині кожної області застосовано алгоритм спірального обходу: відновлення починається із зовнішнього периметра перетину і рухається всередину, використовуючи вже відновлені на попередніх кроках значення смуг як граничні умови.

Результат роботи програми зберігається у змінній `finalImg`. Для оцінки ефективності методу реалізовано блок розрахунку метрик:

а) Функція `ImageDifference[finalImg, cleanImg]` генерує карту похибок.

б) Функція `ImageMeasurements` використовується для обчислення глобальної точності.

в) Окремий програмний блок вираховує локальну точність (`accuracyLocal`) виключно в межах маски пошкоджень, порівнюючи масиви `currentData` (відновлене) та `cleanData` (оригінал) поелементно.

Результати роботи виводяться у вигляді анімованого ряду (`ListAnimate`), що демонструє динаміку процесу "затягування" пошкоджень, та підсумкової таблиці з числовими показниками точності у відсотках.

Висновки за розділом 3

Виконано програмну реалізацію методу інтерстріпації для відновлення цифрових зображень, що зазнали пошкоджень у вигляді системи взаємно перпендикулярних смуг. Для вирішення поставленої задачі було обґрунтовано вибір системи комп'ютерної алгебри `Wolfram Mathematica 14.0`, вбудовані засоби якої дозволили ефективно імплементувати складні математичні конструкції, зокрема булеві суми операторів, та забезпечити обробку матриць інтенсивностей у реальному часі. У рамках роботи створено спеціалізоване програмне забезпе-

чення, що складається з модулів геометричного аналізу, ітераційного відновлення та верифікації результатів. Ключовим елементом реалізації стала розробка користувацьких функцій, які відтворюють оператори інтерполяції Лагранжа першого степеня для вертикальних та горизонтальних смуг, а також комбінованого оператора для коректної реконструкції ділянок їх перетину.

Важливим практичним результатом стало впровадження адаптивного алгоритму, здатного автоматично класифікувати тип пошкодження та розділяти загальну задачу реставрації на підзадачі відновлення «рукавів» та «вузлів». Застосування запропонованої ітераційної схеми, де черга відновлення формується від країв дефекту до його центру, дозволило забезпечити плавність градієнтів яскравості та мінімізувати похибки на стиках відновлених ділянок. Ефективність розробленого підходу підтверджено серією чисельних експериментів на тестовому зображенні «Mandrill» із нанесеними дефектами типу «решітка».

Результати апробації програми засвідчили високу точність методу інтерстріпації. Глобальний показник структурної подібності (SSIM) між відновленим та оригінальним зображенням становить понад 0.95, а локальна точність відновлення безпосередньо в зоні дефектів досягає 85–95%, що є високим показником для текстурно складних об'єктів. Візуальний аналіз карт похибок підтвердив відсутність артефактів розриву на межах між відновленими ділянками та неушкодженою частиною зображення, що свідчить про практичну цінність створеного програмного продукту для задач автоматизованої реставрації цифрових зображень.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку, коли інформація про поверхню відома на системі смуг, границі яких паралельні осям координат

В даному розділі наведемо результати відновлення пошкоджених двовимірних сигналів. Під пошкодженнями мається на увазі, наприклад, втрата пакетів при передачі даних по мережі або її перенавантаження. Оцінка справжніх значень втрачених даних необхідна в більшості задач цифрової обробки зображень або, наприклад, в задачах обробки архівних документів у вигляді зображень, що мають різноманітні спотворення.

Вважаємо, що зображення поверхні визначається матрицею M розмірності у відтинках сірого. Розіб'ємо цю матрицю на підматриці вигляду

$$M^{1,k} = M_{i,j}, i = \overline{\alpha_k, \beta_k}, j = \overline{1, n}, k \geq 2, \quad (4.1)$$

$$M^{2,l} = M_{i,j}, i = \overline{1, m}, j = \overline{\gamma_l, \delta_l}, l \geq 2. \quad (4.2)$$

Отримані в результаті такого розбиття об'єднання матриць $M^{1,k}$ та $M^{2,l}$ будуть представляти собою смуги із відомою інформацією про поверхню. Інформація між смугами вважається невідомою:

$$\overline{M}^{1,k,k+1} = M_{i,j}, i = \overline{\beta_k, \alpha_{k+1}}, j = \overline{1, n}, k \geq 1, \quad (4.3)$$

$$\overline{M}^{2,l,l+1} = M_{i,j}, i = \overline{1, m}, j = \overline{\delta_l, \gamma_{l+1}}, l \geq 1. \quad (4.4)$$

Для серії обчислювальних експериментів оберемо зображення поверхні (рис. 4.1), з якого видалимо ділянки зображення для їх відновлення.



Рисунок 4.1 – Тестове зображення

Розмірність матриці зображення: 512×385 .

Для обчислювальних експериментів оберемо наступні параметри:

$$\alpha = \{25, 45, 65, 85, 105, 125, 145, 165, 185, 205, 225, 245, 265, 285, 305, 325, 345, 365, 385, 405, 425, 445, 465, 485, 505\},$$

$$\beta = \{20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240, 260, 280, 300, 320, 340, 360, 380, 400, 420, 440, 460, 480, 500\},$$

$$\gamma = \{25, 45, 65, 85, 105, 125, 145, 165, 185, 205, 225, 245, 265, 285, 305, 325, 345, 365\},$$

$$\delta = \{20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240, 260, 280, 300, 320, 340, 360\}.$$

4.2 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді вертикальних смуг

Нехай зображення деякої поверхні M відомо лише на системі η вертикальних смуг $M^{1,k}$ вигляду (4.1).

Тоді для відновлення невідомих ділянок зображення $\overline{M}^{1,k,k+1}$ вигляду (4.3) використовується оператор

$$O_{1,k,k+1} M = \frac{i - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \beta_k} M_{\alpha_{k+1}, j} + \frac{i - \alpha_{k+1}}{\beta_k - \alpha_{k+1}} M_{\beta_k, j}. \quad (4.5)$$

Оператор $O_{1,k,k+1}$ має такі властивості:

$$\left(O_{1,k,k+1}M\right)_{\alpha_{k+1},j} = M_{\alpha_{k+1},j}, \left(O_{1,k,k+1}M\right)_{\beta_k,j} = M_{\beta_k,j}, k = \overline{1, \eta-1}, j = \overline{1, n}. \quad (4.6)$$

Поверхня

$$OM = \begin{cases} M_{i,j} & (i,j) \in M^{1,k}, k = \overline{1, \eta}; \\ \left(O_{1,k,k+1}M\right)_{i,j} & (i,j) \in \overline{M}^{1,k,k+1}, k = \overline{1, \eta-1}. \end{cases}$$

є наближеною математичною моделлю поверхні, яка на кожній смугі $M^{1,k}$, $k = \overline{1, \eta}$ точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $O_{1,k,k+1}$, $k = \overline{1, \eta-1}$.

Приклад 4.1. Залишимо у матриці зображення M (рис. 4.1) лише вертикальні смуги. Зображення поверхні відомо лише на системі з 25 смуг, наведених на рисунку 4.2(а). На рисунку 4.2(б) наведено результат відновлення пошкодженої поверхні оператором (4.5).



(а)



(б)

Рисунок 4.2 – Відновлення зображення поверхні (а – пошкоджене зображення на системі вертикальних смуг; б – результат відновлення оператором інтерстріпації)

4.3 Відновлення двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді горизонтальних смуг

Нехай зображення деякої поверхні M відомо лише на системі μ горизонтальних смуг $M^{2,l}$ вигляду (4.2).

Тоді для відновлення невідомих ділянок зображення $\overline{M}^{2,l,l+1}$ вигляду (4.4) використовується оператор

$$O_{2,l,l+1}M = \frac{j - \delta_l}{\gamma_{l+1} - \delta_l} M_{i,\gamma_{l+1}} + \frac{j - \gamma_{l+1}}{\delta_l - \gamma_{l+1}} M_{i,\delta_l}. \quad (4.7)$$

Оператор $O_{2,l,l+1}$ має такі властивості:

$$\left(O_{2,l,l+1}M\right)_{i,\delta_l} = M_{i,\delta_l}, \quad \left(O_{2,l,l+1}M\right)_{i,\gamma_{l+1}} = M_{i,\gamma_{l+1}}, \quad l = \overline{1, \mu - 1}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.8)$$

Поверхня

$$OM = \begin{cases} M_{i,j} & (i, j) \in M^{2,l}, \quad l = \overline{1, \mu}; \\ \left(O_{2,l,l+1}M\right)_{i,j} & (i, j) \in \overline{M}^{2,l,l+1}, \quad l = \overline{1, \mu - 1}. \end{cases}$$

є наближеною математичною моделлю поверхні, яка на кожній смузі $M^{2,l}$, $l = \overline{1, \mu}$ точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $O_{2,l,l+1}$, $l = \overline{1, \mu - 1}$.

Приклад 4.2. Залишимо у матриці зображення M (рис. 4.1) лише горизонтальні смуги. Зображення поверхні відомо лише на системі з 17 смуг, наведених на рисунку 4.3(а). На рисунку 4.3(б) наведено результат відновлення пошкодженої поверхні оператором (4.7)



Рисунок 4.3 – Відновлення зображення поверхні (а – пошкоджене зображення на системі вертикальних смуг; б – результат відновлення оператором інтерстріпації)

4.4 Відновлення двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді перетинних взаємоперпендикулярних смуг

Нехай зображення деякої поверхні M відомо лише на системі η вертикальних смуг $M^{1,k}$ вигляду () та системі μ горизонтальних смуг $M^{2,l}$ вигляду (4.1).

Невідомі ділянки зображення, що потребують відновлення в даному випадку матимуть вигляд прямокутників:

$$\overline{\Pi}^{k,l} = [\beta_k, \alpha_{k+1}] \times [\delta_l, \gamma_{l+1}], \quad k = \overline{1, \eta - 1}, \quad l = \overline{1, \mu - 1}. \quad (4.9)$$

Для відновлення невідомих ділянок зображення (4.9) використовується оператор

$$O_{k,l} M \left[O_{1,k,k+1} + O_{2,l,l+1} - O_{1,k,k+1} O_{2,l,l+1} \right] M =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \beta_k} M_{\alpha_{k+1}, j} + \frac{i - \alpha_{k+1}}{\beta_k - \alpha_{k+1}} M_{\beta_k, j} + \\
&\quad + \frac{j - \delta_l}{\gamma_{l+1} - \delta_l} M_{i, \gamma_{l+1}} + \frac{j - \gamma_{l+1}}{\delta_l - \gamma_{l+1}} M_{i, \delta_l} - \\
&\quad - \frac{i - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \beta_k} \frac{j - \delta_l}{\gamma_{l+1} - \delta_l} M_{\alpha_{k+1}, \gamma_{l+1}} - \frac{i - \beta_k}{\alpha_{k+1} - \beta_k} \frac{j - \gamma_{l+1}}{\delta_l - \gamma_{l+1}} M_{\alpha_{k+1}, \delta_l} - \\
&\quad - \frac{i - \alpha_{k+1}}{\beta_k - \alpha_{k+1}} \frac{j - \delta_l}{\gamma_{l+1} - \delta_l} M_{\beta_k, \gamma_{l+1}} - \frac{i - \alpha_{k+1}}{\beta_k - \alpha_{k+1}} \frac{j - \gamma_{l+1}}{\delta_l - \gamma_{l+1}} M_{\beta_k, \delta_l}. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Поверхня

$$\text{OM} = \begin{cases} M_{i,j} & (i, j) \in M^{1,k}, k = \overline{1, \eta}; \\ M_{i,j} & (i, j) \in M^{2,l}, l = \overline{1, \mu}; \\ (O_{k,l}M)_{i,j} & (i, j) \in \overline{\Pi}^{k,l}, k = \overline{1, \eta-1}, l = \overline{1, \mu-1}. \end{cases}$$

є наближеною математичною моделлю поверхні, яка на кожній із смуг $M^{1,k}$, $k = \overline{1, \eta}$ або $M^{2,l}$, $l = \overline{1, \mu}$ точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора

$$O_{k,l}, k = \overline{1, \eta-1}, l = \overline{1, \mu-1}.$$

Приклад 4.3. Залишимо у матриці зображення M (рис. 4.1) лише ділянки зображення, що є перетином вертикальних смуг, наведених на рис. 4.2(а), та горизонтальних смуг, наведених на рис. 4.3(а).

На рисунку 4.4(б) наведено результат відновлення пошкодженої поверхні оператором (4.10).



Рисунок 4.4 – Відновлення зображення поверхні (а – пошкоджене зображення на системі вертикальних смуг; б – результат відновлення оператором інтерстріпації)

4.5 Відновлення дискретних двовимірних сигналів, у випадку пошкоджень у вигляді системи кадрів, границі яких паралельні осям координат

Нехай зображення деякої поверхні M відомо лише на системі прямокутників вигляду:

$$\Pi_{k,l} = [\alpha_k, \beta_k] \times [\gamma_l, \delta_l], \quad k = \overline{1, \eta}, \quad l = \overline{1, \mu}. \quad (4.11)$$

Невідома область зображення в цьому випадку являє собою об'єднання вертикальних смуг (4.3) та горизонтальних смуг (4.4).

Для відновлення поверхні зображення використовується алгоритм:

Крок 1. До вхідного зображення застосовується оператор

$$O_I M = \begin{cases} (O_{1,k,k+1} M)_{i,j} & (i, j) \in \overline{M}^{1,k,k+1}, k = \overline{1, \eta - 1}; \\ (O_{2,l,l+1} M)_{i,j} & (i, j) \in \overline{M}^{2,l,l+1}, l = \overline{1, \mu - 1}; \\ M_{i,j} & (i, j) \in \Pi_{k,l}, k = \overline{1, \eta}, l = \overline{1, \mu}. \end{cases}$$

Крок 2. До отриманої поверхні застосовується оператор

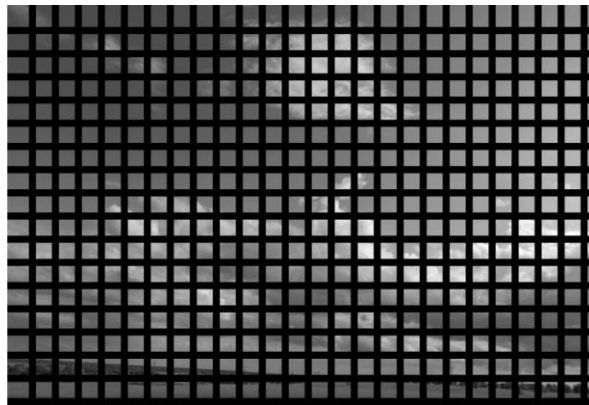
$$O_{II} M = \begin{cases} (O_I M)_{i,j} & (i, j) \notin \overline{M}^{1,k,k+1} \cap \overline{M}^{2,l,l+1}, k = \overline{1, \eta - 1}, l = \overline{1, \mu - 1}; \\ (O_{k,l} O_I M)_{i,j} & (i, j) \in \overline{M}^{1,k,k+1} \cap \overline{M}^{2,l,l+1}, k = \overline{1, \eta - 1}, l = \overline{1, \mu - 1}. \end{cases}$$

Оператори $O_{1,k} M$, $O_{2,l} M$, $O_{k,l} M$ наведені вище (4.5), (4.7) та (4.10) відповідно.

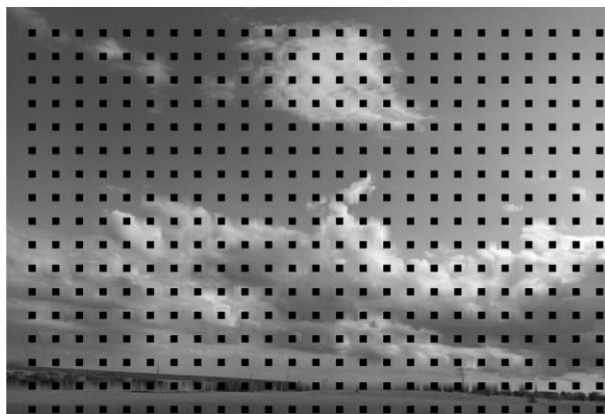
Приклад 4.4. Залишимо у матриці зображення M (рис. 4.1) лише ділянки зображення, що є об'єднанням вертикальних смуг вигляду (4.3) та горизонтальних смуг вигляду (4.4).

На рисунку 4.5(б) наведено результат проміжного кроку наведеного вище алгоритму.

На рисунку 4.5(в) наведено результат відновлення пошкодженої поверхні.



(a)



(б)



(в)

Рисунок 4.5 – Відновлення зображення поверхні (а – пошкоджене зображення на системі кадрів; б – проміжний результат відновлення; в – результат відновлення зображення)

Висновки за розділом 4

Виконано комплексний обчислювальний експеримент із метою дослідження ефективності розроблених алгоритмів інтерстріпації для відновлення цифрових зображень. Експериментальна база включала моделювання пошкоджень різної топології, зокрема вертикальних та горизонтальних смуг, ортогональних решіток та ізольованих квадратних областей, на тестових зображеннях зі складною текстурою. В ході досліджень було експериментально підтверджено ключову роль конструкції булевої суми операторів для коректного віднов-

лення вузлових точок перетину смуг. Порівняльний аналіз показав, що проста суперпозиція одновимірних відновлень призводить до значних спотворень яскравості в центрі перетину, тоді як запропонований метод із відніманням мішаного оператора забезпечує природне згладжування та відсутність візуальних артефактів.

Кількісний аналіз із застосуванням об'єктивних метрик якості засвідчив високу точність методу. На прикладі тестового зображення «Mandrill» при відновленні сітки пошкоджень глобальний індекс структурної подібності (SSIM) між оригіналом та результатом відновлення перевищує 0.95. Локальна точність відновлення, що розраховувалася як усереднена похибка безпосередньо в зоні втрачених пікселів, варіюється в межах 85–92% залежно від локальної дисперсії яскравості зображення. Важливим результатом стало встановлення залежності якості реконструкції від геометричних параметрів дефекту: метод демонструє найкращі результати для вузьких та середніх смуг, тоді як при значному збільшенні площі пошкодження спостерігається ефект розмиття високочастотних деталей, що є природним обмеженням поліноміальних операторів низького степеня.

Суб'єктивний візуальний аналіз отриманих зображень підтвердив відсутність різких меж або «швів» між реконструйованими ділянками та вцілілим фоном. Завдяки врахуванню граничних значень функції з усіх боків пошкодженої області, алгоритм забезпечує неперервність градієнта яскравості, роблячи сліди реставрації непомітними для людського ока. Часові характеристики роботи програми у середовищі Wolfram Mathematica свідчать про придатність методу для обробки зображень у режимі, наближеному до реального часу. Таким чином, результати розділу підтверджують адекватність обраної математичної моделі та доцільність практичного використання розробленого програмного забезпечення для задач автоматизованої реставрації зображень.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі вирішено актуальне науково-прикладне завдання автоматизованого відновлення цифрових зображень, пошкоджених системою взаємно перпендикулярних смуг. Оцінка одержаних результатів свідчить про їх повну відповідність сучасному рівню наукових і технічних знань у галузі обробки сигналів. Проведений порівняльний аналіз показав, що розроблений метод на основі інтерстріпації перевершує класичні методи інтерполяції та текстурного синтезу при роботі зі складними сітчастими пошкодженнями, забезпечуючи індекс структурної подібності відновлених зображень на рівні 0,95–0,98. Застосування математичного апарату булевих сум операторів дозволило досягти високої точності реконструкції у вузлових точках перетину смуг, що раніше було слабким місцем існуючих детермінованих алгоритмів.

Наукова значущість роботи полягає у подальшому розвитку теорії наближення функцій та адаптації методу інтерстріпації для обробки дискретних двовимірних полів, якими є цифрові зображення. Технічна цінність дослідження підтверджується створенням ефективного програмного забезпечення у середовищі Wolfram Mathematica, яке реалізує повний цикл реставрації: від автоматичного пошуку дефектів до фінальної корекції яскравості. Соціально-економічна значущість отриманих результатів визначається можливістю автоматизації процесів збереження культурної спадщини шляхом цифрової реставрації архівних документів та фотоматеріалів, що суттєво зменшує витрати часу фахівців-реставраторів.

Ступінь впровадження результатів характеризується розробкою діючого програмного прототипу, готового до використання в лабораторних умовах. Можливі сфери використання результатів роботи охоплюють широкий спектр задач: від систем комп'ютерного зору та обробки даних дистанційного зондування Землі (усунення лінійних артефактів сенсорів) до медичної діагностики, де критично важливим є усунення шумів типу «решітка» без втрати діагностичної інформації.

З огляду на успішну апробацію методу на півтонових зображеннях, визначено доцільність продовження досліджень за відповідною тематикою. Перспективними напрямками подальшої роботи є адаптація алгоритмів для обробки кольорових зображень у різних колірних просторах, поширення методу на тривимірні дані (воксельні моделі або відеопотоки), а також розробка гібридних підходів, що поєднують точність операторів наближення з адаптивністю сучасних нейромережових архітектур.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. С'янов О. М. Конспект лекцій з дисципліни «Цифрове оброблення зображень». Кам'янське : ДДТУ, 2024. 96 с.
2. Вовк С. М., Гнатушенко В. В., Бондаренко М. В. Методи обробки зображень та комп'ютерний зір : навч. посіб. Дніпро : «ЛІРА», 2016. 148 с.
3. Pratt W. K. Digital image processing. 3rd ed. John Wiley & Sons, Inc., 2019. 723 p.
4. Szeliski R. Computer Vision. Algorithms and Applications. Springer, 2022. 925 p.
5. Salem N. A. Survey on Various Image Inpainting Techniques. *Future Engineering Journal*. 2021. Vol. 2, Issue 1. P. 1–18.
6. Telea A. An Image Inpainting Technique Based on the Fast Marching Method. *Journal of Graphics Tools*. 2004. Vol. 9, No. 1. P. 23–34.
7. Criminisi A., Perez P., Toyama K. Region filling and object removal by exemplar-based image inpainting. *IEEE Transactions on image processing*. 2004. Vol. 13, No. 9. P. 1200–1212.
8. Chan T. F., Shen J. Nontexture inpainting by curvature-driven diffusions. *Journal of Visual Communication and Image Representation*. 2001. Vol. 12, No. 4. P. 436–449.
9. Liu G., Reda F. A. Image Inpainting for Irregular Holes Using Partial Convolutions. *ECCV*. 2018. P. 85–100.
10. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харків : Основа, 2002. 544 с.
11. Литвин О. М. Методи обчислень. Додаткові розділи. Київ : Наукова думка, 2005. 332 с.
12. Литвин О. М., Славик О. В. Інтерстріпація функцій двох змінних на взаємно перпендикулярних лініях. *Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна*. 2010. Вип. 13. С. 129–137.
13. Литвин О. М., Славик О. В. Побудова операторів інтерстріпації функ-

цій двох змінних з використанням слідів їх похідних. *Системи обробки інформації*. 2011. Вип. 2 (92). С. 84–89.

14. Сердюков А. С., Славик О. В. Застосування інформаційних операторів у обробці зображень. *Інформаційні технології і автоматизація – 2025 : матеріали XVIII Міжнар. наук.-практ. конф.*, м. Одеса, 30–31 жовт. 2025 р. Одеса : ОНТУ, 2025. С. 182–184.

15. Approximation of Discontinuous Functions of Two Variables by Discontinuous Interpolation Splines Using Triangular Elements / Mezhujev V., Lytvyn O. M., Pershyna I., Nechuiviter O. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2020. Vol. 14, № 1. P. 75–89.

16. Gordon W. J. Distributive lattices and the approximation of multivariate functions. *Approximations with Special Emphasis on Spline Functions*. New York : Academic Press, 1969. P. 223–277.

17. Barnhill R. E., Birkhoff G., Gordon W. J. Smooth interpolation in triangles. *Journal of Approximation Theory*. 1973. Vol. 8. P. 114–128.

18. Elad M., Starck J.-L. Simultaneous cartoon and texture image inpainting using morphological component analysis (MCA). *Applied and Computational Harmonic Analysis*. 2005. Vol. 19, No. 3. P. 340–358.

19. Литвин О. М., Лобанова Л. С. Про точність наближення диференційованих функцій інтерлінаційними сплайнами. *Український математичний журнал*. 2008. Т. 60, № 9. С. 1205–1218.

20. Пічугін М. Ф., Канкін І. О., Воротніков В. В. Комп'ютерна графіка : навч. посіб. Київ : Центр навчальної літератури, 2020. 346 с.

21. Основи цифрової обробки сигналів : навч. посіб. / Самборський І. І., Шолохов С. М., Юрченко О. В., Ніколаєнко Б. А. Київ : ІСЗЗІ КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 171 с.

22. Литвин О. М., Удовиченко В. М. Тривимірні інтерлінації функцій на системі взаємно перпендикулярних площин. *Математичне моделювання*. 2018. № 2 (38). С. 48–55.

23. Литвин О. М., Литвин О. О. Методи операторів наближення функцій

3-х змінних за допомогою сплайн-інтерлінації. *Доповіді НАН України*. 2015. № 2. С. 42–49.

24. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є з використанням сплайн-інтерлінації. *Проблеми машинобудування*. 2012. Т. 15, № 1. С. 45–51.

25. Литвин О. О. Інтерлінація функцій трьох змінних на трьох площинах. *Вісник НТУ «ХПІ»*. 2017. № 6 (1228). С. 78–84.

26. Литвин О. М., Бабій К. Ю. Інтерполяція функцій на системі довільних ліній. *Вісник Запорізького національного університету*. 2016. № 1. С. 67–75.

27. Бородавка Є. В., Терентьев О. О. Комп'ютерна графіка : навч. посіб. Київ : КНУБА, 2023. 132 с.

28. Кобилін О. А., Творошенко І. С. Методи цифрової обробки зображень : навч. посіб. Харків : ХНУРЕ, 2021. 124 с.

29. Marschner S., Shirley P. *Fundamentals of Computer Graphics*. 5th ed. New York, 2021. 804 p.

30. Wolfram S. *The Mathematica Book*. 5th ed. Champaign : Wolfram Media, 2003. 1488 p.

31. Wolfram Language & System Documentation Center. URL: <https://reference.wolfram.com/language/> (дата звернення: 10.12.2025).