

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОБЩИХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ ДВУХ РАЗБИЕНИЙ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА

В. С. Блудов

Харьков

В комбинаторном анализе известна следующая задача [1]. Предположим, что задано конечное множество

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

и его два разбиения

$$R_a = \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \text{ и } R_b = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}.$$

Подмножества A_i и B_j , входящие в R_a и R_b , удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} A_{i_1} \cap A_{i_2} &= \emptyset, \quad i_1 \neq i_2, \quad i_1, i_2 = 1, \dots, m; \\ B_{j_1} \cap B_{j_2} &= \emptyset, \quad j_1 \neq j_2, \quad j_1, j_2 = 1, \dots, m; \\ A_i \cap B_j &\neq \emptyset, \quad i, j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (1)$$

Составим матрицу C из множеств $C_{ij} = A_i \cap B_j$

$$C = \|A_i \cap B_j\|. \quad (2)$$

Эту матрицу назовем матрицей пересечений разбиений R_a и R_b . Из матрицы пересечений C сделаем следующую выборку подмножеств C_{ij} :

$$C_{1j_1}, C_{2j_2}, \dots, C_{mj_m} \quad (3)$$

при условии, что набор вторых индексов $j_1, j_2, \dots, j_m$ представляет собой некоторую перестановку чисел $1, 2, 3, \dots, m$.

Назовем в соответствии с [1] системой различных представителей множество элементов:

$$D = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}\}$$

Все элементы этого множества строго различны, и каждый элемент принадлежит подмножеству S_k семейства подмножеств S , т. е.

$$a_{i_k} \in S_k \text{ и } S_k \subset S, \quad k \in \{1, \dots, m\}.$$

Теперь определим систему различных представителей для выборки подмножеств (3). Для этого, очевидно, достаточно выбрать точно по одному элементу $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$ из каждого подмножества $A_1 \cap B_{j_1}, A_2 \cap B_{j_2}, \dots, A_m \cap B_{j_m}$ так, чтобы они все были различны.

Следует отметить новое свойство полученной системы различных представителей $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}\}$, заключающееся в том, что каждый элемент

принадлежит точно двум подмножествам A_k и B_{j_k} , т. е. является общим для этих двух подмножеств.

Полученная таким образом система различных представителей, каждый элемент которой входит в k -ое подмножество первого разбиения и j_k -ое подмножество второго разбиения, называется системой общих представителей.

Задача определения всех возможных систем общих представителей двух разбиений R_a и R_b сводится к определению всех возможных произведений вида

$$C_{1j_1} C_{2j_2} \dots C_{mj_m}$$

по всем перестановкам вторых индексов. Каждое из этих произведений содержит все возможные системы различных представителей для данной выборки подмножеств.

Следовательно, все возможные системы общих представителей определяются функцией Q_m от матрицы пересечений $||A_i \cap B_j||$, полученной автором в работе [2]:

$$Q_m C = \bigcup_{(j_1, j_2, \dots, j_m)} (A_1 \cap B_{j_1}) (A_2 \cap B_{j_2}) \dots (A_m \cap B_{j_m}). \quad (4)$$

Выражение (4) дает наиболее полное решение задачи о системах общих представителей двух разбиений R_a и R_b в ее общей постановке. Но такая общность почти не применяется в прикладных задачах этого типа, поэтому рассмотрим одну из возможных детализаций этой задачи, имеющей достаточно большое прикладное значение.

Предположим, что исходное множество A содержит точно m^2 элементов и они распределены по подмножествам разбиений R_a и R_b так, что все $\text{card}(A_i \cap B_j) = 1$, т. е. каждое пересечение $A_i \cap B_j$ содержит точно по одному элементу. Легко заметить, что в этом случае в каждом произведении

$$(A_1 \cap B_{j_1}) (A_2 \cap B_{j_2}) \dots (A_m \cap B_{j_m})$$

имеется точно одна система общих представителей (с. о. п.). Ввиду того, что число таких произведений равно $m!$, число возможных с. о. п. также равно $m!$

В рассматриваемой детализации вводится дополнительное условие: необходимо выбрать такую с. о. п. для разбиений R_a и R_b с $\text{card}(A_i \cap B_j) = 1$, у которых сумма

$$x = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_m}; \quad a_{i_k} \in A_k \cap B_{j_k} \quad (5)$$

имеет минимальное либо максимальное значение из всех возможных значений x для всех перестановок вторых индексов.

В качестве примера такой задачи можно привести задачу из экономики о распределении m заказов на m заводах так, чтобы общая прибыль или общая производительность была наибольшей.

Предположим, что дано некоторое множество чисел $\{a_{ij}\} = A$, характеризующих прибыль при выполнении j -го заказа на i -ом заводе. Все эти числа можно расположить в виде квадратной матрицы, имеющей m строк и m столбцов. Разбиение множества A по заводам R_a характеризуется элементами, находящимися в каждой строке, а разбиение по типу заказа R_b характеризуется элементами, находящимися в каждом столбце.

По условию задачи на каждом заводе можно выполнить только один заказ. Следовательно, задача сводится к выбору по одному элементу из

подмножеств разбиений R_a и R_b , чтобы все выбранные элементы составили систему общих представителей.

Критерием выбора с. о. п. служит условие, по которому сумма элементов, входящих в с. о. п., имеет максимальное значение. К этой задаче сводится достаточно большое количество задач линейного и целочисленного программирования [3, 4, 5].

Можно было бы перечислить эти задачи, но рамки статьи не позволяют сделать это, поэтому перейдем к изложению метода решения.

Запишем множество A в виде квадратной матрицы размером $m \times m$

$$A = \|a_{ij}\|, \quad i, j = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

Для этой матрицы сформулируем теорему о среднем.

Теорема 1. Среднее значение суммы

$$x = a_{1j_1} + a_{2j_2} + \dots + a_{mj_m} \quad (7)$$

элементов матрицы A , вычисленное по всем возможным значениям этих сумм при всех возможных перестановках вторых индексов, равно

$$x_{\text{ср}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}.$$

Доказательство. Число возможных значений суммы (7) равно $m!$, следовательно, среднее их значение

$$x_{\text{ср}} = \frac{1}{m!} \sum_{(j_1 j_2 \dots j_m)} x(j_1 j_2 \dots j_m).$$

Подставим в это выражение значение сумм $x(j_1 j_2, \dots, j_m)$ и сделаем приведение подобных членов при суммировании по всем перестановкам индексов $j_1 j_2, \dots, j_m$. Легко подсчитать, что каждый элемент a_{ij} войдет в эту сумму $(m-1)!$ раз. Вынося общий множитель $(m-1)!$ за знак суммы, получим

$$x_{\text{ср}} = \frac{(m-1)!}{m!} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}.$$

Теорема доказана.

Теперь сформулируем и докажем лемму о максимальном и минимальном элементе в выборке из конечного множества.

Лемма. Если из конечного множества вещественных чисел

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

сделана выборка, имеющая m чисел, и если $m < n$, а сумма

$$y = x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_m}$$

входящих в нее чисел имеет наибольшее значение из всех возможных выборок того же объема, то эта выборка содержит наибольшее число множества X

$$x_{i_m} = \max \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Если из множества X сделана выборка, имеющая m чисел, и сумма

$$y = x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_m}$$

входящих в нее чисел имеет наименьшее значение из всех возможных выборок того же объема, то эта выборка содержит наименьшее число множества X

$$x_i = \min \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Упорядочим числа множества $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ в порядке их возрастания

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n.$$

Легко заметить, что сумма первых m чисел дает наименьшее значение

$$y_{\min} = x_1 + x_2 + \dots + x_m$$

и в эту сумму обязательно входит наименьшее число x_1 множества X . Аналогично наибольшее значение имеет сумма последних чисел

$$y_{\max} = x_{n-m+1} + x_{n-m+2} + \dots + x_n$$

и в эту сумму обязательно входит наибольшее число x_n . Лемма доказана.

Введем понятия и определения, необходимые для формулирования метода вычисления максимального и минимального значения суммы (7).

Назовем дополнением элемента a_{ij} по матрице A подматрицу A_{ij} , полученную из матрицы A путем вычеркивания i -ой строки и j -го столбца.

Обозначим сумму всех элементов матрицы A через

$$\omega = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}; \quad (8)$$

сумму элементов, стоящих в i -ой строке, через

$$u_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (9)$$

и сумму элементов, стоящих в j -ом столбце, через

$$v_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь метод выделения из множества X всех возможных сумм вида (7) таких подмножеств, в которых все суммы названного вида содержат фиксированный элемент a_{ij} ; такое подмножество обозначим символом X_{ij} .

Совершенно очевидно, что если элемент a_{ij} входит во все суммы (7) подмножества X_{ij} , то больше ни один элемент из i -ой строки и j -го столбца не входит в суммы этого подмножества. Следовательно, среднее значение всех сумм $x^{(ij)} \in X_{ij}$ представляет собой сумму элемента a_{ij} и среднего значения сумм, образованных элементами дополнения A_{ij}

$$x_{\text{ср}}^{(ij)} = a_{ij} + \frac{1}{m-1} (\omega - u_i - v_j + a_{ij}),$$

где ω , u_i , v_j — значения, определяемые соотношениями (8), (9), (10).

Полученное значение $x_{\text{ср}}^{(ij)}$ дает возможность определить оценку суммы всех значений $x^{(ij)}$, входящих в X_{ij} ,

$$K \left(\sum_{x_{ij}} x^{(ij)} \right) = m a_{ij} + \omega - u_i - v_j. \quad (11)$$

На основании полученной оценки сформулируем основную теорему, которая дает возможность построить достаточно эффективный алгоритм вычисления значений $x_{\max}$ и $x_{\min}$ сумм (7).

Теорема 2. Условием того, что элемент a_{ij} матрицы A принадлежит максимальной сумме

$$x_{\max} = a_{1i_1} + a_{2j_2} + \dots + a_{mj_m},$$

является достижение оценкой

$$K_{ij} = ma_{ij} + \omega - u_i - v_j$$

наибольшего значения среди значений, вычисленных для всех элементов матрицы A .

Условием того, что элемент a_{ij} матрицы A принадлежит минимальной сумме

$$x_{\min} = a_{1i_1} + a_{2j_2} + \dots + a_{mj_m},$$

является достижение оценкой

$$K_{ij} = ma_{ij} + \omega - u_i - v_j$$

наименьшего значения среди значений, вычисленных для всех элементов матрицы A .

Доказательство следует из доказанной ранее леммы.

Построение алгоритма вычисления $x_{\max}$ или $x_{\min}$ сводится к следующему.

1. Вычисляются оценки K_{ij} для всех элементов матрицы A , а затем выбирается из полученных значений оценок наибольшая оценка (наименьшая оценка). Координаты выбранной оценки $K_{i_1j_1}$ указывают на элемент, который входит в $x_{\max}$ ($x_{\min}$).

2. По выбранному элементу $a_{i_1j_1}$ определяют матричное дополнение $A_{i_1j_1}$, сохраняя для матрицы $A_{i_1j_1}$ нумерацию матрицы A .

3. Для матрицы $A_{i_1j_1}$ заново вычисляются параметры ω , u_i и v_j и оценки K_{ij} всех входящих в нее элементов. Снова выбирается наибольшая (наименьшая) оценка и соответствующий ей элемент $a_{i_2j_2}$, входящий в $x_{\max}$ ($x_{\min}$).

Пункты 1, 2, 3 повторяются до тех пор, пока не будут получены все элементы $x_{\max}$ ($x_{\min}$).

В основе построения данного алгоритма лежит результат теоремы 2 и тот очевидный факт, что продолжение максимальной (минимальной) последовательности в смысле величины $x_{\max}$ ($x_{\min}$) есть максимальная (минимальная) последовательность в подмножестве, выбираемом на каждом шаге.

Здесь следует подчеркнуть, что это утверждение относится **только к локальной области**, т. е. только к тому подмножеству, которое определяется на каждом шаге алгоритма, а не ко всему множеству значений x . В качестве иллюстрации данного алгоритма в Приложении приведен полный расчет максимальной суммы для матрицы шестого порядка.

Как нетрудно определить, приведенный алгоритм содержит точно $m-1$ шаг, если искомая последовательность, имеющая максимальную (минимальную) сумму, является единственной. Если таких последовательностей несколько, то число шагов будет равно числу различных элементов во всех этих последовательностях.

Из сравнения этого алгоритма с алгоритмами, основанными на линейном или целочисленном программировании [3, 4, 5], видно, что он имеет значительно большую эффективность с точки зрения затрат времени на вычисления и дает сразу искомое решение, т. е. полностью исключает какой бы ни было перебор значений величины x . Например, если рассчитать задачу, приведенную в Приложении, методом линейного программирования, то это потребовало бы определить экстремум линейной формы для 36 переменных.

Кроме этого изложенный алгоритм хорошо приспособлен для реализации на ЦВМ, так как имеет для каждого шага одну и ту же программу вычислений и требуемый объем памяти ограничивается объемом исходной матрицы, программы вычислений и несколькими ячейками для хранения промежуточных результатов (около 10).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для матрицы A необходимо определить все последовательности элементов этой матрицы, имеющие максимальное значение суммы

$$x = a_{1j_1} + a_{2j_2} + \dots + a_{6j_6}.$$

Исходная матрица равна

$$\begin{vmatrix} 10 & 12 & 13 & 17 & 21 & 5 \\ 15 & 22 & 38 & 22 & 34 & 50 \\ 11 & 4 & 8 & 11 & 12 & 14 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 11 & 12 & 14 & 13 \\ 21 & 28 & 30 & 45 & 50 & 60 \end{vmatrix}$$

Матрица оценок первого шага

$$\begin{vmatrix} 564 & 565 & 545 & 560 & 557 & 449 \\ 491 & 522 & 592 & 487 & 532 & 616 \\ 588 & 535 & 533 & 542 & 521 & 521 \\ 565 & 554 & 534 & 537 & 228 & 522 \\ 558 & 559 & 545 & 542 & 527 & 509 \\ 474 & 505 & 491 & 572 & 575 & 623 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} K_{66} &= 623 \\ a_{66} &= 60 \end{aligned}$$

Матрица оценок второго шага.

$$\begin{vmatrix} 255 & 261 & 242 & 268 & 266 & - \\ 222 & 253 & 309 & 235 & 273 & - \\ 287 & 248 & 244 & 265 & 248 & - \\ 268 & 264 & 245 & 261 & 254 & - \\ 260 & 266 & 252 & 263 & 251 & - \\ - & - & - & - & - & - \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} K_{23} &= 309 \\ a_{23} &= 38 \end{aligned}$$

Матрица оценок третьего шага.

$$\begin{vmatrix} 107 & 118 & - & 120 & 126 & - \\ - & - & - & - & - & - \\ 133 & 108 & - & 118 & 112 & - \\ 118 & 121 & - & 115 & 125 & - \\ 113 & 124 & - & 118 & 116 & - \\ - & - & - & - & - & - \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} K_{31} &= 133 \\ a_{31} &= 11 \end{aligned}$$

Матрица оценок четвертого шага.

$$\begin{vmatrix} - & 63 & - & 67 & 70 & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & 68 & - & 66 & 66 & - \\ - & 69 & - & 67 & 64 & - \\ - & - & - & - & - & - \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} K_{15} &= 70 \\ a_{15} &= 21 \end{aligned}$$

Пятый шаг дает две пары элементов:

$$a_{44} = 5, a_{52} = 9 \text{ и } a_{42} = 2, a_{54} = 12.$$

Матрица A имеет две последовательности:

1. $a_{15}, a_{23}, a_{31}, a_{44}, a_{52}, a_{66}$
2. $a_{15}, a_{23}, a_{31}, a_{42}, a_{54}, a_{66}$

с максимальной суммой значений элементов, равной $x_{\max} = 144$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Дж. Райзер. Комбинаторная математика. Изд-во «Мир», 1966.
2. В. С. Блудов. Алгоритм сравнения скобочных форм функций алгебры логики. Сб. «Приборы и системы автоматизации», вып. 6, Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.
3. В. В. Шкурба, Т. П. Подчасова, А. Н. Пшичук, Л. П. Тур. Задачи календарного планирования и методы их решения. Изд-во «Наукова думка», Киев, 1966.
4. Е. Г. Гольштейн, Д. Г. Юдин. Новые направления в линейном программировании. Изд-во «Советское радио», 1966.
5. С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева. Линейное и выпуклое программирование. Изд-во «Наука», 1964.