ДОДАТОК А

Програмна реалізація метода скінченних сум Фур'є у середовищі Mathcad

---

$Q := 100 \quad k := 1..Q \quad l := 1..Q$

$R := 0.25$

$circle(x, y) := x^2 + y^2$

$figure(x, y) := circle(x - 0.5, y - 0.5)$

$f1(x, y) := 10e^{-\left[(x-0.5)^2+(y-0.5)^2\right]}$

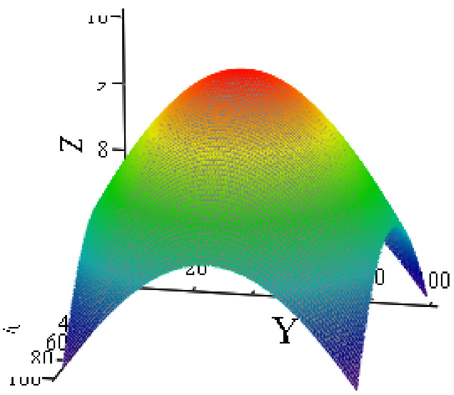
$f2(x, y) := 10\sin\left[(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2\right]$

$z1r_{k,l} := f1\left(\frac{k}{Q}, \frac{l}{Q}\right) \qquad z2r_{k,l} := f2\left(\frac{k}{Q}, \frac{l}{Q}\right)$

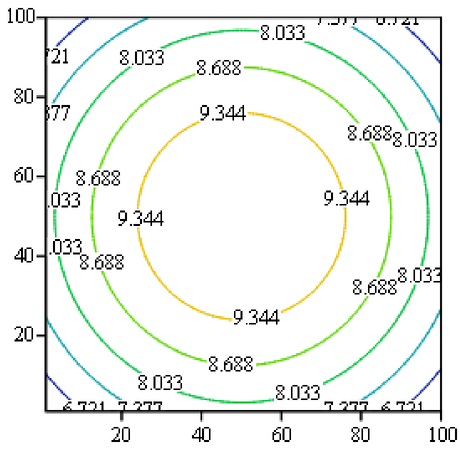
$\omega(x, y) := x\cdot(1 - x)\cdot y\cdot(1 - y)$

$\omega 1(x, y) := R - \sqrt{figure(x, y)}$

f1(x,y)



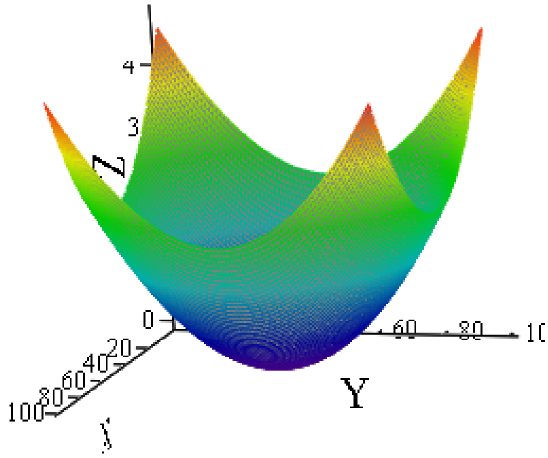
z1r

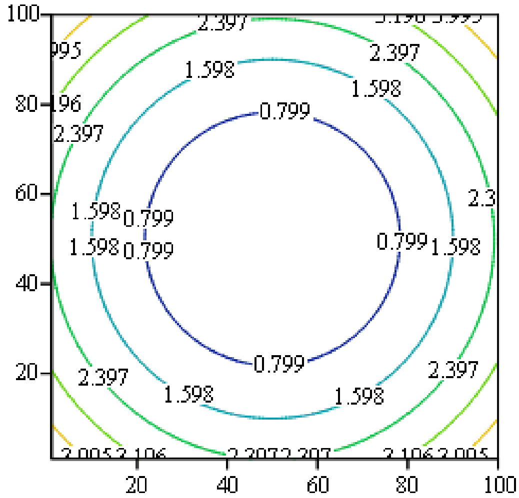


z1r

---

f2(x,y)





z2r z2r

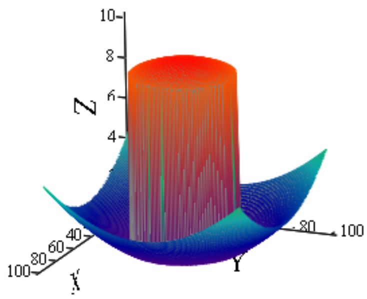
$$D x \omega 1(x,y) := \frac{d}{dx}\omega 1(x,y) \qquad D y \omega 1(x,y) := \frac{d}{dy}\omega 1(x,y)$$

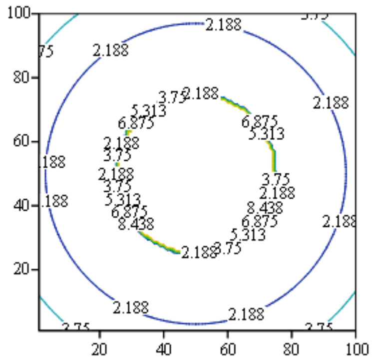
$$\omega 1N(x,y) := \frac{\omega 1(x,y)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dx}\omega 1(x,y)\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}\omega 1(x,y)\right)^2}}$$

$$ff(x,y) := \begin{array}{|l} f1(x,y) \ \text{ if } \ \omega 1(x,y) > 0 \\ \dfrac{f1(x,y) + f2(x,y)}{2} \ \text{ if } \ \omega 1(x,y) = 0 \\ f2(x,y) \ \text{ if } \ \omega 1(x,y) < 0 \end{array}$$

$$zfr_{k,l} := ff\left(\frac{k}{Q}, \frac{l}{Q}\right)$$

f(x,y)





zfr zfr

Побудова сплайну

$$f1N(x,y) := f1\left(x - \omega 1(x,y)\cdot\frac{d}{dx}\omega 1(x,y), y - \omega 1(x,y)\cdot\frac{d}{dy}\omega 1(x,y)\right)$$

$$f2N(x,y) := f2\left(x - \omega 1(x,y)\cdot\frac{d}{dx}\omega 1(x,y), y - \omega 1(x,y)\cdot\frac{d}{dy}\omega 1(x,y)\right)$$

$$O1f2(x,y) := \frac{x-1}{0-1}\cdot f2(0,y) + \frac{x-0}{1-0}\cdot f2(1,y)$$

$$O2f2(x,y) := \frac{y-1}{0-1}\cdot f2(x,0) + \frac{y-0}{1-0}\cdot f2(x,1)$$

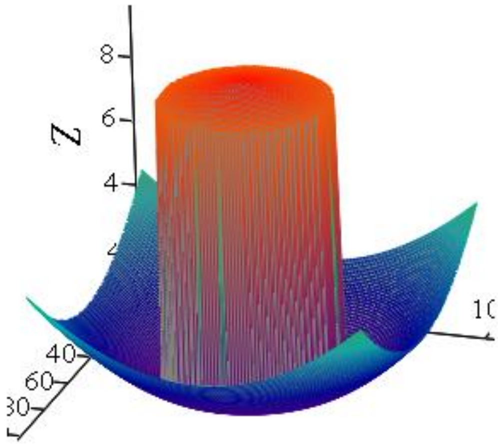
$$O1O2f2(x,y) := \frac{x-1}{0-1}\cdot O2f2(0,y) + \frac{x-0}{1-0}\cdot O2f2(1,y)$$

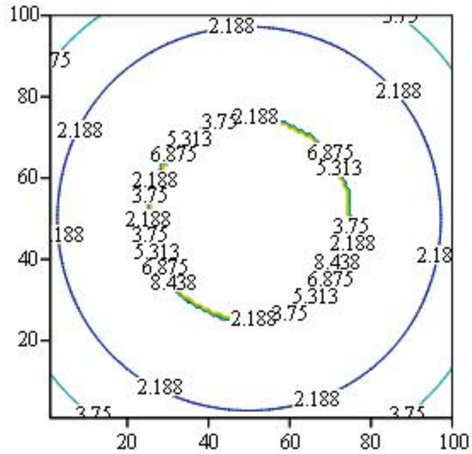
$$Of2(x,y) := O1f2(x,y) + O2f2(x,y) - O1O2f2(x,y)$$

$$Sp(x,y) := \begin{cases} \left[\frac{\omega 1(x,y)}{\omega 1(0.5,0.5)}\cdot f1(0.5,0.5) + \left(1 - \frac{\omega 1(x,y)}{\omega 1(0.5,0.5)}\right)\cdot f1N(x,y)\right] & \text{if } \omega 1(x,y) > 0 \\ \frac{f1(x,y) + f2(x,y)}{2} & \text{if } \omega 1(x,y) = 0 \\ \left[\frac{\omega(x,y)}{-\omega 1(x,y) + \omega(x,y)}\cdot f2N(x,y) + \frac{-\omega 1(x,y)}{-\omega 1(x,y) + \omega(x,y)}\cdot (Of2(x,y))\right] & \text{if } \omega 1(x,y) < 0 \end{cases}$$

$$zsp_{k,l} := Sp\left(\frac{k}{Q}, \frac{l}{Q}\right)$$

Sp(x,y)





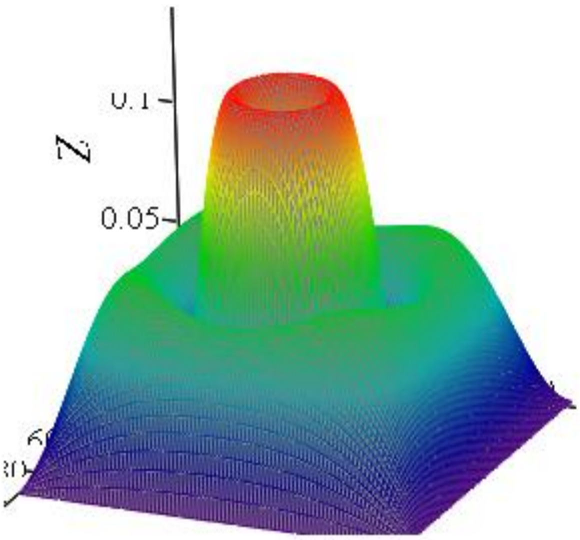
zsp zsp

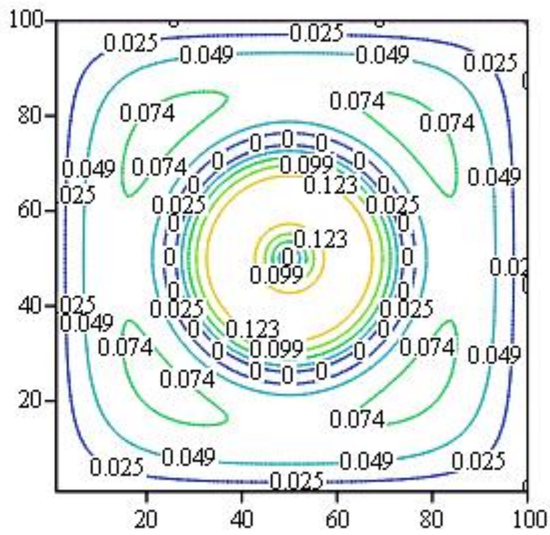
$$\varphi(x,y) := ff(x,y) - Sp(x,y)$$

$$z\varphi_{k,l} := \varphi\left(\frac{k}{Q},\frac{l}{Q}\right)$$

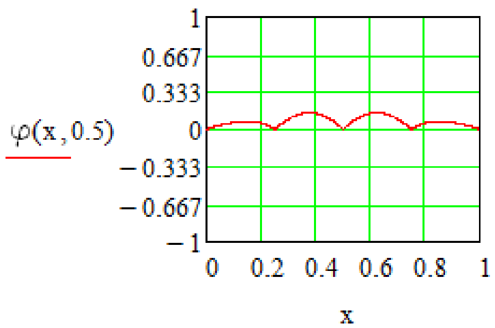
Графік функції φ

φ(x,y)=f(x,y)-Sp(x,y)

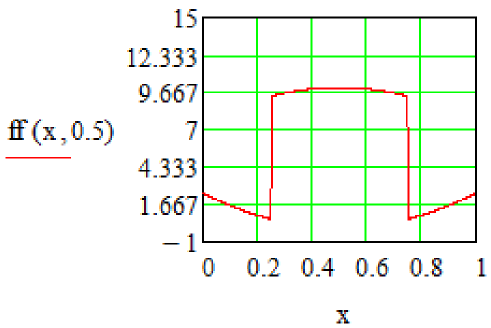




zφ   zφ

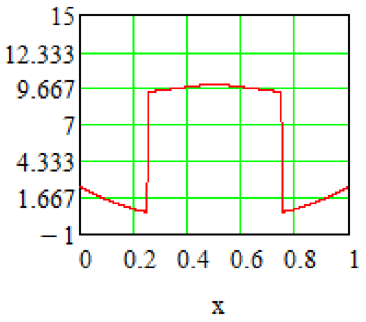


Це неперервна



Це розривна

$Sp(x, 0.5)$



Це сплайн

$PR := 2$ Выбор функции с использованием переключателя

$$f(x,y) := \begin{vmatrix} ff(x,y) \text{ if } PR = 2 \\ Sp(x,y) \text{ if } PR = 3 \\ \varphi(x,y) \text{ if } PR = 4 \end{vmatrix}$$

$N1 := 50$

$M := 100$ число, що дає розбивку відрізка на M частин

$N := 16$ число, пов'язане з кількістю доданків у сумі Фур'є

$NNN := (2 \cdot N + 1)^2 \rightarrow 1089$ число доданків у сумі Фур'є

$por := 2 \cdot N + 1 = 33$ порядок матриці коефіцієнтів

$NN := 7$

$2^{NN+1} = 256$ $\qquad$ $2^{NN+1} - 1 = 255$

Побудова зображень поверхні з використанням таблиці значень функції

Задання таблиці значень функції z=f(x,y)

$pp := 1 .. N1 + 1$

$qq := 1 .. N1 + 1$

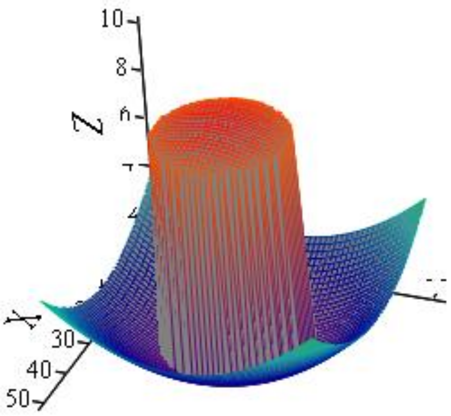
$$zz_{pp, qq} := f\left(\frac{pp}{N1}, \frac{qq}{N1}\right)$$

$f(0.5, 0.5) = 10$

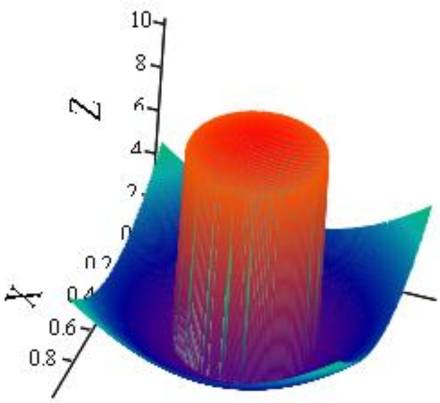
$m := \max(zz) = 10$

Зображення поверхні z=f(x,y) з використанням таблиці значень функції f(x,y)

Зображення поверхні z=f(x,y) з безпосереднім використанням функції f(x,y)



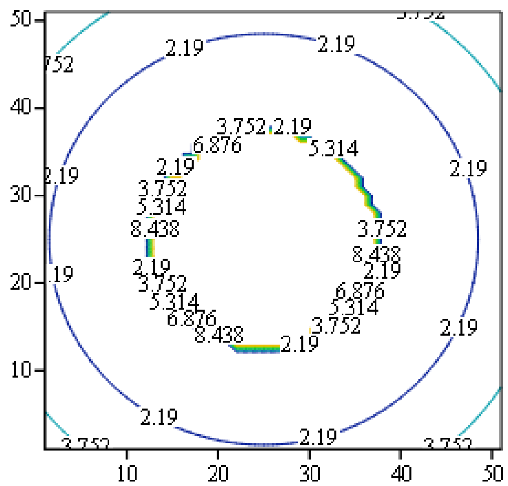
zz



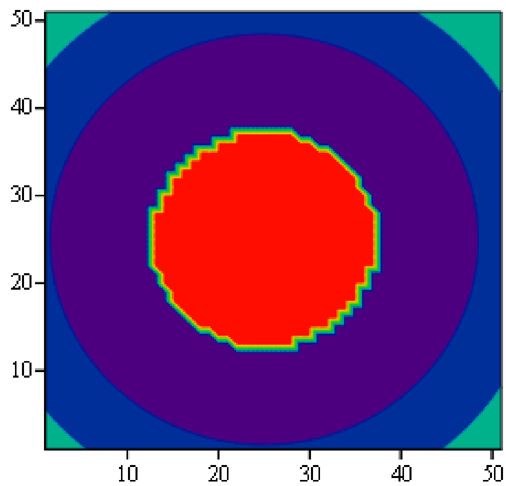
f

Нумеровані лінії рівня відновлюваної функції

Лінії рівня відновлюваної функції



zz



zz

Задана інформація для побудови матриці коoефіцієнтів та сум ФУР'Є

$\mathrm{time}(0) = 1.6082463889649998 \times 10^{9}$ **Лічильник часу роботи програми**

$T := \mathrm{time}(0)$

Формула для підрахунку коефіцієнтів Фур'є $CF(k,l)=$

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\cdot e^{-i\cdot 2\pi(k\cdot x+l\cdot y)}\,dx\,dy$$

Далі знаходження коефіцієнтів Фур'є з використанням проекційних даних

$t := 1..M$

$v := 1..M$

Розбивка відрізка вздовж осі ОХ та ОУ на М частин

$k := -N..N$

$l := -N..N$

Перебір *k* та *l* в коефіцієнтах Фур'є

Точки розбиття відрізка вздовж осі ОХ та ОУ на М частин

$$X_t := \frac{t-0.5}{M} \qquad Y_v := \frac{v-0.5}{M}$$

$$\gamma 1_t := \int_0^1 f(X_t, y)\,dy$$

Це проекційні дані вздовж відрізків, паралельних осі ОУ. Їх число М.

$$\gamma 2_v := \int_0^1 f(x, Y_v)\,dx$$

Це проекційні дані вздовж відрізків, паралельних осі ОХ. Їх число М

$X^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$5\cdot 10^{-3}$	0.015	0.025	0.035	0.045	0.055	0.065	...

$Y^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$5\cdot 10^{-3}$	0.015	0.025	0.035	0.045	0.055	0.065	...

$\gamma1^{T} =$

	1	2	3
1	3.215529068994095	3.1228680144460537	...

$\gamma2^{T} =$

	1	2	3
1	3.215529068994095	3.1228680144460537	...

$$C00 := \frac{1}{M} \cdot \sum_{j=1}^{M} \gamma1_j \qquad C00 = 3.4920396401882083$$

Це наближене обчислення зовнішнього інтеграла,

що дає *C00*= $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dy \right) dx$

$$\frac{1}{2M} = 5 \times 10^{-3}$$

Число для зміщення в середину частинного відрізка

Далі підрахунок коефіцієнтів *Ck0*= $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dy \right) \cdot e^{-i \cdot 2\pi k \cdot x}\, dx$ та *C0l*= $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dx \right) \cdot e^{-i \cdot 2\pi l \cdot y}\, dy.$

На кожному частинному j-му відрізку інтеграли від експонент подаються так:

$$\text{exp1}(M, k, j) = \int_{X_j - \frac{1}{2M}}^{X_j + \frac{1}{2M}} e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot x}\, dx, \quad \text{exp2}(M, l, j) = \int_{Y_j - \frac{1}{2M}}^{Y_j + \frac{1}{2M}} e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot l \cdot y}\, dy$$

Далі зовнішній інтеграл береться за формулою центральних прямокутників.
Попередньо внутрішній інтеграл подано як кусково сталу функцію,
враховуючи раніше отримані $\gamma1_t$ та $\gamma2_v$

$$Ck0 := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in -N..N \\ \quad \left| \begin{array}{l} A_{N+1+k} \leftarrow C00 \ \text{ if } k = 0 \\ A_{N+1+k} \leftarrow \left[\sum_{j=1}^{M} \left(\gamma1_j \cdot \int_{X_j - \frac{1}{2M}}^{X_j + \frac{1}{2M}} e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot x}\, dx \right) \right] \ \text{ otherwise} \\ A \end{array} \right. \\ A \end{array} \right.$$

$Ck0 =$

	1
1	967784468-2.42861286636753i·10^-17
2	1922886+1.5699247457590102i·10^-15
3	5954168-1.1674688993323912i·10^-15
4	8454174+1.1345091532888318i·10^-15
5	0203491-1.5612511283791264i·10^-16
6	6265813+1.0408340855860843i·10^-16
7	63557573-6.349087922075114i·10^-16
8	44197628+7.927686285214008i·10^-16
9	1429237-2.7755575615628914i·10^-17
10	44430778-9.315465065995454i·10^-16
11	69938183-7.719519468096791i·10^-17
12	1415879-3.8250652645288596i·10^-16
13	27239016-6.591949208711866i·10^-17
14	62236776-3.690624195140657i·10^-16
15	2876874-1.5135462327897642i·10^-16
16	...

Якщо б взяти інтеграл вручну, то вираз у квадратних дужках був би таким

$$A_{N+1+k} = \frac{\left(1 - e^{i\cdot 2\cdot \pi\cdot \frac{k}{M}}\right)}{(-i\cdot 2\cdot \pi\cdot k)}\cdot \sum_{j=1}^{M} \left(\gamma 1_j\cdot e^{-i\cdot 2\cdot \pi\cdot k\cdot \frac{j}{M}}\right)$$

. Далі при обчислені інших коефіцієнтів буде використана саме така форма запису і при заповненні матриці коефіцієнтів розрахунки такі ж саме.

$$C0l := \left| \begin{array}{l} \text{for } l \in -N..N \\ \quad \left| \begin{array}{l} A_{N+1+l} \leftarrow C00 \quad \text{if } l = 0 \\ A_{N+1+l} \leftarrow \left[\sum_{j=1}^{M} \left(\gamma 2_j\cdot \int_{Y_j - \frac{1}{2M}}^{Y_j + \frac{1}{2M}} e^{-i\cdot 2\cdot \pi\cdot l\cdot y}\, dy\right)\right] \quad \text{otherwise} \\ A \end{array}\right. \\ A \end{array}\right.$$

$C0l =$

	1
1	967784468-2.42861286636753i·10^{-17}
2	1922886+1.569924745759010 2i·10^{-15}
3	5954168-1.167468899332391 2i·10^{-15}
4	8454174+1.134509153288831 8i·10^{-15}
5	0203491-1.561251128379126 4i·10^{-16}
6	6265813+1.040834085586084 3i·10^{-16}
7	63557573-6.349087922075114i·10^{-16}
8	44197628+7.927686285214008i·10^{-16}
9	1429237-2.775557561562891 4i·10^{-17}
10	44430778-9.315465065995454i·10^{-16}
11	69938183-7.719519468096791i·10^{-17}
12	1415879-3.825065264528859 6i·10^{-16}
13	27239016-6.591949208711866i·10^{-17}

Якщо б взяти інтеграл вручну, то вираз у квадратних дужках був би таким

$$A_{N+1+l} = \frac{\left(1 - e^{i\cdot 2\cdot \pi\cdot \frac{l}{M}}\right)}{(-i\cdot 2\cdot \pi\cdot l)}\cdot \sum_{j=1}^{M} \left(\gamma 2_j\cdot e^{-i\cdot 2\cdot \pi\cdot l\cdot \frac{j}{M}}\right)$$

. Далі при обчислені інших коефіцієнтів буде використана саме така форма запису і при заповненні матриці коефіцієнтів розрахунки такі ж самі.

*********Задання інтегралів для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є ************************

C(k,l) при $k\cdot x + l\cdot y = t,$ k>l>0.

$$F1(k,l,tt) := \int_{-\frac{l\cdot tt}{k}}^{\frac{k}{l}\cdot tt} f\left[\frac{k\cdot tt - l\cdot vv}{k^2 + l^2}, \frac{l\cdot tt + k\cdot vv}{\left(k^2 + l^2\right)}\right] dvv$$

$$F2(k,l,tt) := \int_{-\frac{l\cdot tt}{k}}^{\frac{\left(k^2 + l^2 - l\cdot tt\right)}{k}} f\left(\frac{k\cdot tt - l\cdot vv}{k^2 + l^2}, \frac{l\cdot tt + k\cdot vv}{k^2 + l^2}\right) dvv$$

$$F3(k,l,tt) := \int_{\frac{-k^2 - l^2 + k\cdot tt}{l}}^{\frac{k^2 + l^2 - l\cdot tt}{k}} f\left[\frac{k\cdot tt - l\cdot vv}{k^2 + l^2}, \frac{l\cdot tt + k\cdot vv}{\left(k^2 + l^2\right)}\right] dvv$$

*********Задання інтегралів для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є ************************

$C(k,l)$ при $k\cdot x + l\cdot y = t$, l>k>0.

$$G1(k,l,tt) := \int_{-\frac{l\cdot tt}{k}}^{\frac{k\cdot tt}{l}} f\left[\frac{k\cdot tt - l\cdot vv}{k^2+l^2}, \frac{l\cdot tt + k\cdot vv}{\left(k^2+l^2\right)}\right] dvv$$

$$G2(k,l,tt) := \int_{\frac{-k^2-l^2+k\cdot tt}{l}}^{\frac{k\cdot tt}{l}} f\left[\frac{k\cdot tt - l\cdot vv}{k^2+l^2}, \frac{l\cdot tt + k\cdot vv}{\left(k^2+l^2\right)}\right] dvv$$

$$G3(k,l,tt) := \int_{\frac{-k^2-l^2+k\cdot tt}{l}}^{\frac{k^2+l^2-l\cdot tt}{k}} f\left[\frac{k\cdot tt - l\cdot vv}{k^2+l^2}, \frac{l\cdot tt + k\cdot vv}{\left(k^2+l^2\right)}\right] dvv$$

****

Задання інтегралів для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є C(k,-l) при $k\cdot x - l\cdot y = v$, k>l.

$$\phi1(k,l,vv) := \int_{-\frac{k\cdot vv}{l}}^{\frac{\left(k^2+l^2+l\cdot vv\right)}{k}} f\left[\frac{k\cdot vv + l\cdot tt}{k^2+l^2}, \frac{k\cdot tt - l\cdot vv}{\left(k^2+l^2\right)}\right] dtt$$

$$\phi2(k,l,vv) := \int_{\frac{l\cdot vv}{k}}^{\frac{\left(k^2+l^2+l\cdot vv\right)}{k}} f\left[\frac{k\cdot vv + l\cdot tt}{k^2+l^2}, \frac{k\cdot tt - l\cdot vv}{\left(k^2+l^2\right)}\right] dtt$$

$$\phi3(k,l,vv) := \int_{\frac{l\cdot vv}{k}}^{\frac{\left(k^2+l^2-k\cdot vv\right)}{l}} f\left[\frac{k\cdot vv + l\cdot tt}{k^2+l^2}, \frac{k\cdot tt - l\cdot vv}{\left(k^2+l^2\right)}\right] dtt$$

****

Задання інтегралів для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є C(k,-l) при $k\cdot x - l\cdot y = v$, l>k.

$$\omega1(k,l,vv) := \int_{-\frac{k\cdot vv}{l}}^{\frac{k^2+l^2+l\cdot vv}{k}} f\left[\frac{k\cdot vv + l\cdot tt}{k^2+l^2}, \frac{k\cdot tt - l\cdot vv}{\left(k^2+l^2\right)}\right] dtt$$

$$\omega2(k,l,vv) := \int_{-\frac{k\cdot vv}{l}}^{\frac{k^2+l^2-k\cdot vv}{l}} f\left[\frac{k\cdot vv + l\cdot tt}{k^2+l^2}, \frac{k\cdot tt - l\cdot vv}{\left(k^2+l^2\right)}\right] dtt$$

$$\omega3(k,l,vv) := \int_{\frac{l\cdot vv}{k}}^{\frac{k^2+l^2-k\cdot vv}{l}} f\left[\frac{k\cdot vv + l\cdot tt}{k^2+l^2}, \frac{k\cdot tt - l\cdot vv}{\left(k^2+l^2\right)}\right] dtt$$

Наближене обчислення *з допомогою значень в середніх точках* коефіцієнтів Фур'є ***C(k,l)*** при $k \cdot x + l \cdot y = t$, k>l>0 *для FFFFFFF.*

$NN = 7 \qquad 2^{NN+1} = 256 \qquad 2^{NN+1} - 1 = 255$

$qq := 0 .. 2^{NN+1} - 1$

$$C2ppkklD1(k,l) := \frac{1}{k^2+l^2} \cdot \left(\frac{e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2^{NN+1}}} - 1}{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1} \right) \cdot \sum_{qq=0}^{2^{NN+1}-1} \left[F1\left[k, l, l \cdot \frac{(qq+0.5)}{2^{NN+1}}\right] \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{qq}{2^{NN+1}} \cdot 1} \right]$$

$$C2ppkklD2(k,l) := \frac{k-l}{k^2+l^2} \cdot \left[\frac{e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{(k-l)}{2^{NN+1}}} - 1}{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot (k-l)} \right] \cdot \sum_{qq=0}^{2^{NN+1}-1} \left[F2\left[k, l, l + \frac{(qq+0.5)}{2^{NN+1}} \cdot (k-l)\right] \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{qq}{2^{NN+1}} \cdot (k-l)} \right]$$

$$C2ppkklD3(k,l) := \frac{1}{k^2+l^2} \cdot \left(\frac{e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2^{NN+1}}} - 1}{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1} \right) \cdot \sum_{qq=0}^{2^{NN+1}-1} \left[F3\left[k, l, l \cdot \left[\frac{(qq+0.5)}{2^{NN+1}}\right] + k\right] \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{qq}{2^{NN+1}} \cdot 1} \right]$$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

$C2ppkkF(k,l) := C2ppkklD1(k,l) + C2ppkklD2(k,l) + C2ppkklD3(k,l)$

***Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є ***
C(k,l) при $k \cdot x + l \cdot y = t$, l>k>0 *для GGGGGGG.*

$$C2ppkllD1(k,l) := \frac{k}{k^2+l^2} \cdot \left(\frac{e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{k}{2^{NN+1}}} - 1}{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot k} \right) \cdot \sum_{qq=0}^{2^{NN+1}-1} \left[G1\left[k, l, k \cdot \frac{(qq+0.5)}{2^{NN+1}}\right] \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{qq}{2^{NN+1}} \cdot k} \right]$$

$$C2ppkllD2(k,l) := \frac{l-k}{k^2+l^2} \cdot \left[\frac{e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{(l-k)}{2^{NN+1}}} - 1}{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot (l-k)} \right] \cdot \sum_{qq=0}^{2^{NN+1}-1} \left[G2\left[k, l, k + \frac{(qq+0.5)}{2^{NN+1}} \cdot (l-k)\right] \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{qq}{2^{NN+1}} \cdot (l-k)} \right]$$

$$C2ppkllD3(k,l) := \frac{k}{k^2+l^2} \cdot \left(\frac{e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{k}{2^{NN+1}}} - 1}{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot k} \right) \cdot \sum_{qq=0}^{2^{NN+1}-1} \left[G3\left[k, l, l + k \cdot \left[\frac{(qq+0.5)}{2^{NN+1}}\right]\right] \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{qq}{2^{NN+1}} \cdot k} \right]$$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

$C2ppllF(k,l) := C2ppkllD1(k,l) + C2ppkllD2(k,l) + C2ppkllD3(k,l)$

$$C2pmkklD1(k,l) := \frac{l}{k^2+l^2}\cdot\left[\frac{e^{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{-l}{2^{NN+1}}}-1}{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot(-l)}\right]\cdot\sum_{qq=0}^{2^{NN+1}-1}\left[\phi 1\left[k,l,-l\cdot\frac{(qq+0.5)}{2^{NN+1}}\right]\cdot e^{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{qq}{2^{NN+1}}\cdot(-l)}\right]$$

$$C2pmkklD2(k,l) := \frac{k-l}{k^2+l^2}\cdot\left[\frac{e^{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{(k-l)}{2^{NN+1}}}-1}{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot(k-l)}\right]\cdot\sum_{qq=0}^{2^{NN+1}-1}\left[\phi 2\left[k,l,\left[\frac{(qq+0.5)}{2^{NN+1}}\right]\cdot(k-l)\right]\cdot e^{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{qq}{2^{NN+1}}\cdot(k-l)}\right]$$

$$C2pmkklD3(k,l) := \frac{l}{k^2+l^2}\cdot\left(\frac{e^{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{l}{2^{NN+1}}}-1}{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot l}\right)\cdot\sum_{qq=0}^{2^{NN+1}-1}\left[\phi 3\left[k,l,k-l+l\cdot\left[\frac{(qq+0.5)}{2^{NN+1}}\right]\right]\cdot e^{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{qq}{2^{NN+1}}\cdot l}\right]$$

$$C2pmkllD1(k,l) := \frac{k}{k^2+l^2}\cdot\left(\frac{e^{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{k}{2^{NN+1}}}-1}{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot k}\right)\cdot\sum_{qq=0}^{2^{NN+1}-1}\left[\omega 1\left[k,l,\left[k\cdot\frac{(qq+0.5)}{2^{NN+1}}-l\right]\right]\cdot e^{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{qq}{2^{NN+1}}\cdot k}\right]$$

$$C2pmkllD2(k,l) := \frac{l-k}{k^2+l^2}\cdot\left[\frac{e^{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{(k-l)}{2^{NN+1}}}-1}{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot(k-l)}\right]\cdot\sum_{qq=0}^{2^{NN+1}-1}\left[\omega 2\left[k,l,\frac{(qq+0.5)}{2^{NN+1}}\cdot(k-l)\right]\cdot e^{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{qq}{2^{NN+1}}\cdot(k-l)}\right]$$

$$C2pmkllD3(k,l) := \frac{k}{k^2+l^2}\cdot\left(\frac{e^{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{k}{2^{NN+1}}}-1}{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot k}\right)\cdot\sum_{qq=0}^{2^{NN+1}-1}\left[\omega 3\left[k,l,k\cdot\left[\frac{(qq+0.5)}{2^{NN+1}}\right]\right]\cdot e^{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{qq}{2^{NN+1}}\cdot k}\right]$$

*******Побудова матриці ***B*** всіх наближено знайдених коефіцієнтів ***C(k,l)**********

$$b00 := \left|\begin{array}{l}
\text{for } k \in -N..N \\
\quad \text{for } l \in -N..N \\
\quad\quad \left|\begin{array}{l}
B_{N+k+1,N+l+1} \leftarrow C00 \;\text{ if } k = 0 \wedge l = 0 \\
B_{N+k+1,N+l+1} \leftarrow \dfrac{\left(1-e^{i\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{l}{M}}\right)}{(-i\cdot 2\cdot\pi\cdot l)}\cdot\displaystyle\sum_{j=1}^{M}\left(\gamma 2_j\cdot e^{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot l\cdot\frac{j}{M}}\right) \;\text{ if } k = 0 \wedge l \neq 0 \\
B_{N+k+1,N+l+1} \leftarrow \dfrac{\left(1-e^{i\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{k}{M}}\right)}{(-i\cdot 2\cdot\pi\cdot k)}\cdot\displaystyle\sum_{j=1}^{M}\left(\gamma 1_j\cdot e^{-i\cdot 2\cdot\pi\cdot k\cdot\frac{j}{M}}\right) \;\text{ if } k \neq 0 \wedge l = 0 \\
B_{N+k+1,N+l+1} \leftarrow 0 \;\text{ otherwise} \\
B
\end{array}\right. \\
B
\end{array}\right.$$

$$
\text{bpp} := \left|
\begin{array}{l}
\text{for } k \in -N..N \\
\quad \text{for } l \in -N..N \\
\quad\quad \left|
\begin{array}{l}
B_{N+k+1,N+l+1} \leftarrow \text{C2ppkklD1}(k,l) + \text{C2ppkklD2}(k,l) + \text{C2ppkklD3}(k,l) \ \text{ if } \ k > 0 \wedge l > 0 \wedge k \geq l \\
B_{N+k+1,N+l+1} \leftarrow \text{C2ppkllD1}(k,l) + \text{C2ppkllD2}(k,l) + \text{C2ppkllD3}(k,l) \ \text{ if } \ k > 0 \wedge l > 0 \wedge l > k \\
B_{N+k+1,N+l+1} \leftarrow 0 \ \text{ otherwise} \\
B
\end{array}
\right. \\
B
\end{array}
\right.
$$

$$
\text{bpm} := \left|
\begin{array}{l}
\text{for } k \in -N..N \\
\quad \text{for } l \in -N..N \\
\quad\quad \left|
\begin{array}{l}
B_{N+k+1,N+l+1} \leftarrow \text{C2pmkklD1}(k,|l|) + \text{C2pmkklD2}(k,|l|) + \text{C2pmkklD3}(k,|l|) \ \text{ if } \ (k > 0 \wedge l < 0) \wedge |l| \leq k \\
B_{N+k+1,N+l+1} \leftarrow \text{C2pmkllD1}(k,|l|) + \text{C2pmkllD2}(k,|l|) + \text{C2pmkllD3}(k,|l|) \ \text{ if } \ k > 0 \wedge l < 0 \wedge |l| > k \\
B_{N+k+1,N+l+1} \leftarrow 0 \ \text{ otherwise} \\
B
\end{array}
\right. \\
B
\end{array}
\right.
$$

$$
\text{bmp} := \left|
\begin{array}{l}
\text{for } k \in -N..N \\
\quad \text{for } l \in -N..N \\
\quad\quad \left|
\begin{array}{l}
B_{N+k+1,N+l+1} \leftarrow \overline{\text{bpm}_{N-k+1,N-l+1}} \ \text{ if } \ k < 0 \wedge l > 0 \\
B_{N+k+1,N+l+1} \leftarrow 0 \ \text{ otherwise} \\
B
\end{array}
\right. \\
B
\end{array}
\right.
$$

$$
\text{bmm} := \left|
\begin{array}{l}
\text{for } k \in -N..N \\
\quad \text{for } l \in -N..N \\
\quad\quad \left|
\begin{array}{l}
B_{N+k+1,N+l+1} \leftarrow \overline{\text{bpp}_{N-k+1,N-l+1}} \ \text{ if } \ k < 0 \wedge l < 0 \\
B_{N+k+1,N+l+1} \leftarrow 0 \ \text{ otherwise} \\
B
\end{array}
\right. \\
B
\end{array}
\right.
$$

Сума Фур'є з коефіцієнтами, поданими у вигляді матриці B з урахуванням проекційних даних

$$
\text{BSNF}(x,y) := \sum_{k=-N}^{N} \sum_{l=-N}^{N} \left[B_{N+k+1,N+l+1} \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot (k \cdot x + l \cdot y)} \right]
$$

Задання матриці точних значень функції z=f(x,y) --- ZT

$N1 := 100$

$p := 1..N1+1$ $\qquad$ $q := 1..N1+1$

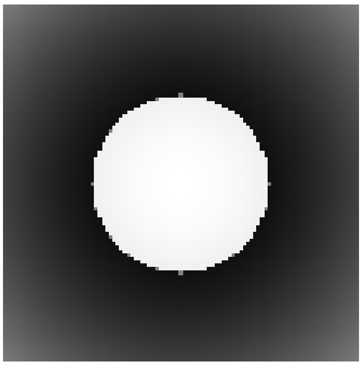
$$ZT_{p,q} := f\left(\frac{p-1}{N1}, \frac{q-1}{N1}\right)$$

Задання матриці наближених значень функції -- значень суми Фур'є----BZF

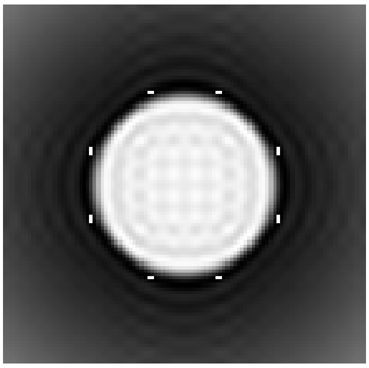
$$BZF_{p,q} := BSNF\left(\frac{p-1}{N1}, \frac{q-1}{N1}\right)$$ з проекційними даними

$$KK := \frac{255}{\max(ZT)} = 25.5$$ коефіцієнт для напівтонового зображення

$$KK2 := \frac{255}{\max(BZF)}$$

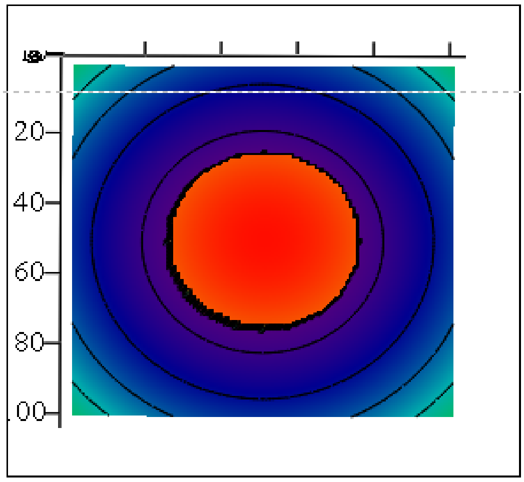


$ZT \cdot KK$



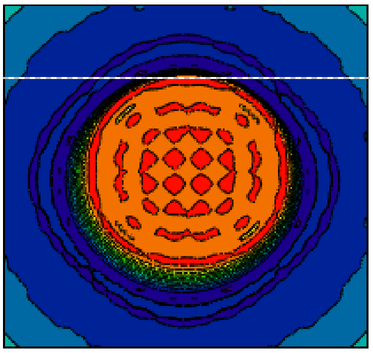
$BZF \cdot KK2$

Лінії рівня заданої функції



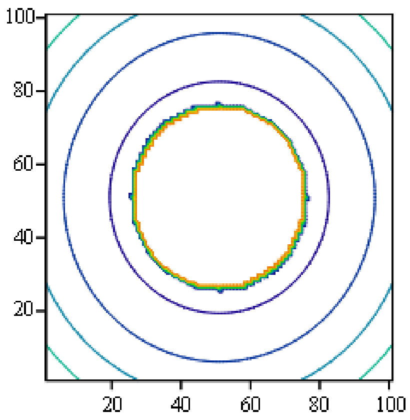
ZT

Лінії рівня відтвореної функції



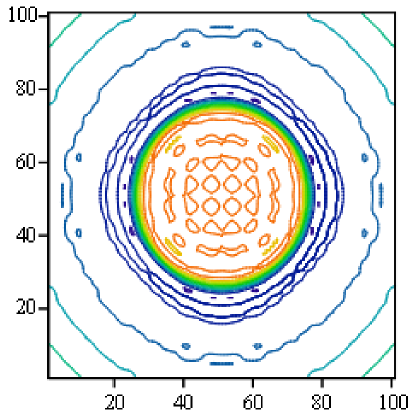
BZF

Лінії рівня заданої функції



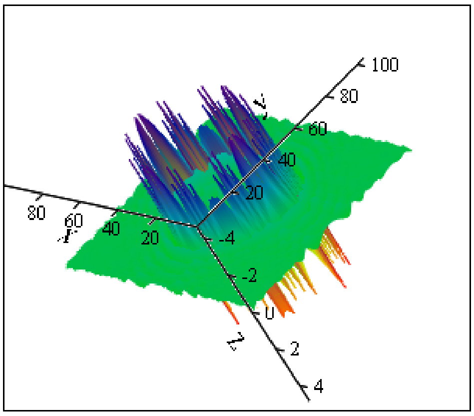
ZT

Лінії рівня відтвореної функції

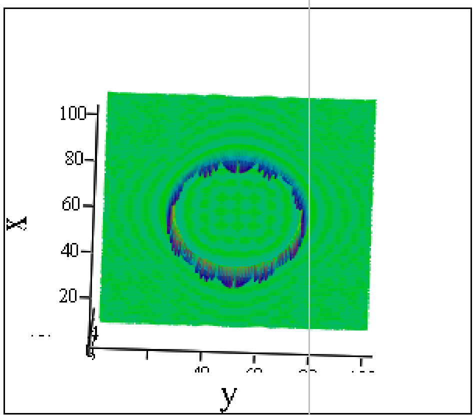


BZF

Зображення похибок від заміни заданої функції відтвореною функцією

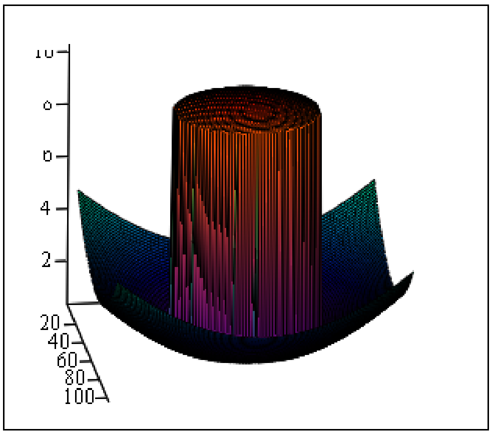


ZT – BZF



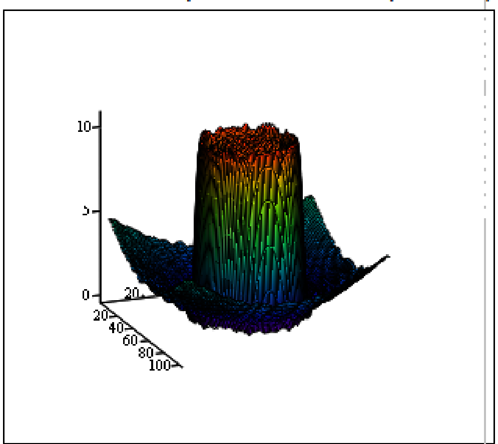
ZT – BZF

Зображення заданої функції



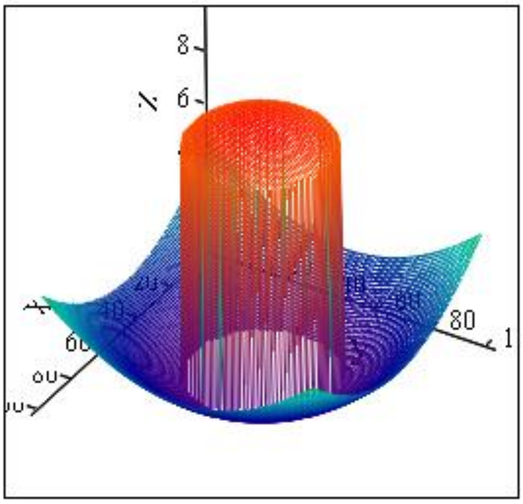
ZT

Зображення відтвореної функції



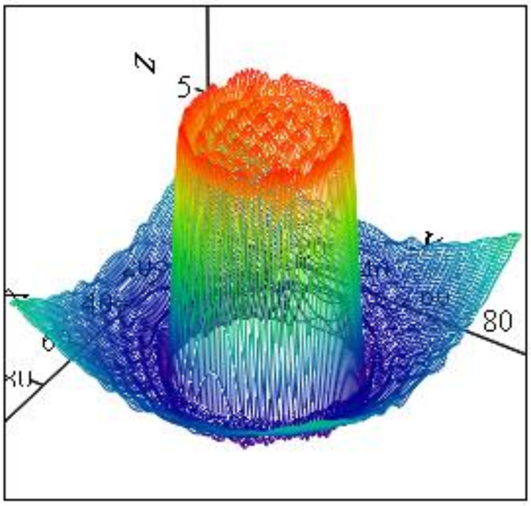
BZF

Зображення заданої функції



ZT

Зображення відтвореної функції



BZF

Порівняння результатів. Кількісні характеристики

Задання таблиці значень функції z=f(x,y)

$N1 := 100$

$p := 1..N1+1$ $\qquad$ $q := 1..N1+1$

$$ZT_{p,q} := f\left(\frac{p-1}{N1}, \frac{q-1}{N1}\right)$$

Задання таблиці значень суми Фур'є

$$BZF_{p,q} := BSNF\left(\frac{p-1}{N1}, \frac{q-1}{N1}\right)$$

з проекційними даними

Підрахунок похибок від заміни функції сумою Фур'є. *ZT*--матриця точних значень, *BZF* --матриця наближених значень

$$\max(ZT - BZF) = 4.554116030891127 + 2.768618667658984i \times 10^{-15}$$

$$\min(ZT - BZF) = -4.34925530560195 - 3.1745439610375565i \times 10^{-15}$$

максимум та мінімум різниці між точними ченнями функції

$$modtoch := \left| \begin{array}{l} \text{for } p \in 1..N1+1 \\ \quad \text{for } q \in 1..N1+1 \\ \quad\quad A_{p,q} \leftarrow \left|ZT_{p,q}\right| \\ A \end{array} \right.$$

матриця модулів точних значень функції

$\max(modtoch) = 10$

$$modrizn := \left| \begin{array}{l} \text{for } p \in 1..N1+1 \\ \quad \text{for } q \in 1..N1+1 \\ \qquad A_{p,q} \leftarrow \left| ZT_{p,q} - BZF_{p,q} \right| \\ A \end{array} \right.$$

матриця модулів різниць між точними та наближеними значеннями функції

$pogr1 := \max(modrizn) = 4.554$

максимальна по модулю похибка

$pogr2 := \frac{\max(modrizn)}{\max(modtoch)} = 0.45541160308911266$ максимальна відносна похибка

$$pogr3 := \left[\left[\sum_{d=1}^{N1+1}\left[\sum_{h=1}^{N1+1}\left(modrizn_{d,h}\right)^2\right]\right]\cdot\frac{1}{(N1+1)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = 0.5635006634831137$$

середньоквадратична похибка

$$pogr4 := \left[\left[\sum_{d=1}^{N1+1}\left[\sum_{h=1}^{N1+1}\left(modrizn_{d,h}\right)\right]\right]\cdot\frac{1}{(N1+1)^2}\right] = 0.2250375097376573 8$$

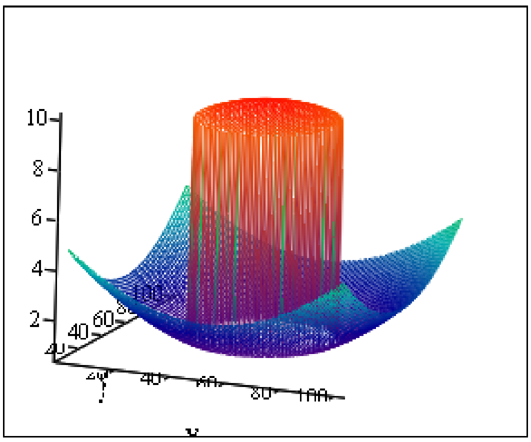
середня абсолютна похибка

Підрахунок часу роботи програми

$aa1 := time(1) - T = 462.08000016212463$ **час роботи програми у секундах**

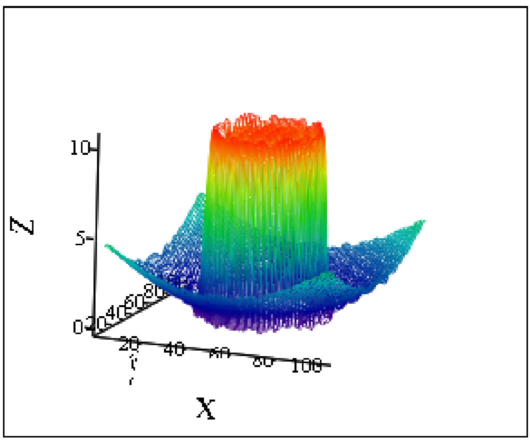
$chas := \frac{aa1}{60}\ float,3 \ \rightarrow 7.7$ **час роботи програми у мінутах**

Зображення заданої функції



ZT

Зображення відтвореної функції



BZF

$M = 100$ Число інтервалів розбиття відрізка при використанні проекційних даних

$N = 16$ число, що дає нижній та верхній індекс для суми Фур'є

$NN = 7$ число для використання проекційних даних

$2^{NN+1} = 256$ Число інтервалів розбиття відрізка при використанні проекційних даних

$2 \cdot N + 1 = 33$ порядок матриці коефіцієнтів Фур'є

$(2 \cdot N + 1)^2 = 1.089 \times 10^3$ число доданків у сумі Фур'є

$chas = 7.7$ мінут

$N1 = 100$ Число для побудови матриць значень функції

Задання таблиці значень функції z=f(x,y)

$N1 := 100$

$p := 1..N1 + 1$ $q := 1..N1 + 1$

$$ZT_{p,q} := ff\left(\frac{p-1}{N1}, \frac{q-1}{N1}\right)$$

Задання таблиці значень суми Фур'є

$$BZF_{p,q} := BSNF\left(\frac{p-1}{N1}, \frac{q-1}{N1}\right)$$

з проекційними даними

$$Sp_{p,q} := Sp\left(\frac{p-1}{N1}, \frac{q-1}{N1}\right)$$

$$BZFSp_{p,q} := BZF_{p,q} + Sp_{p,q}$$

Приклад 1 $N = 16$ $chas = 7.7$

$NN + 1 = 8$ $2^{NN+1} = 256$

число знаків =17

максимум та мінімум різниці між точними та наближеними значеннями функції

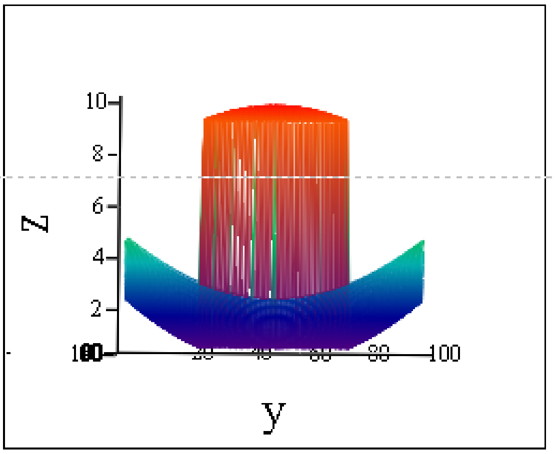
$$\max(ZT - BZFSp) = 0.17072131040247418 + 2.768618667658984i \times 10^{-15}$$

$$\min(ZT - BZFSp) = -10.5398205940444 - 3.1745439610375565i \times 10^{-15}$$

$pogr1 = 4.554116030891127$ $pogr2 = 0.45541160308911266$

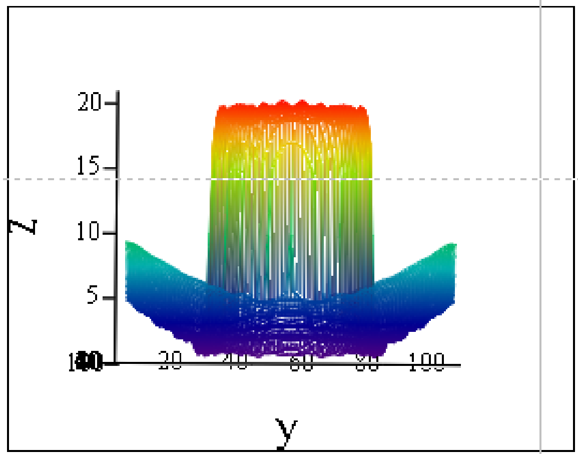
$pogr3 = 0.56350066348311$ $pogr4 = 0.22503750973765738$

Зображення заданої функції

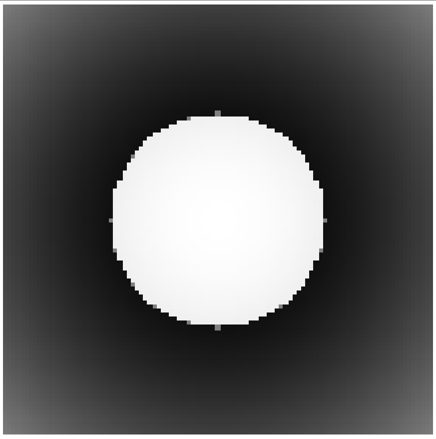


ZT

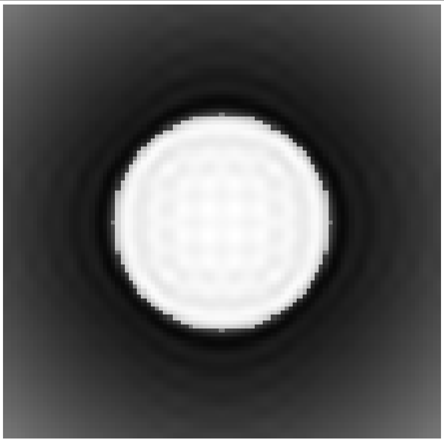
Зображення відтвореної функції



BZFSp

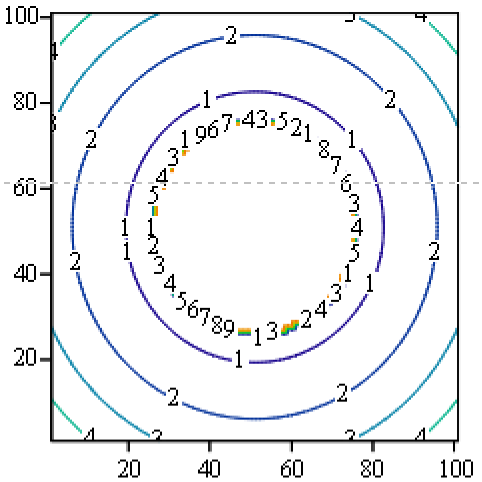


ZT·KK

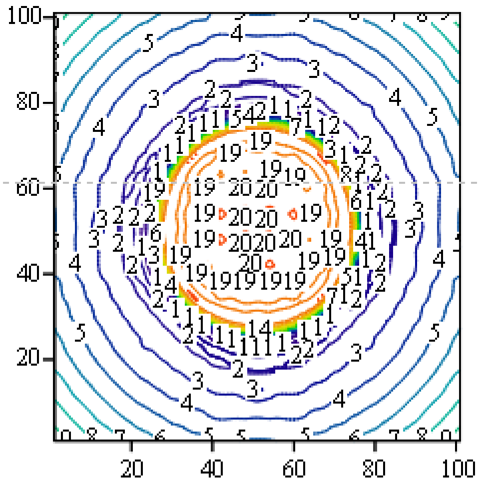


BZFSp·KK2

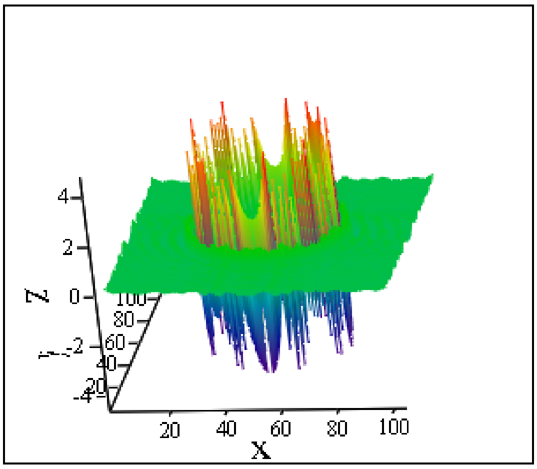
Лінії рівня заданої функції



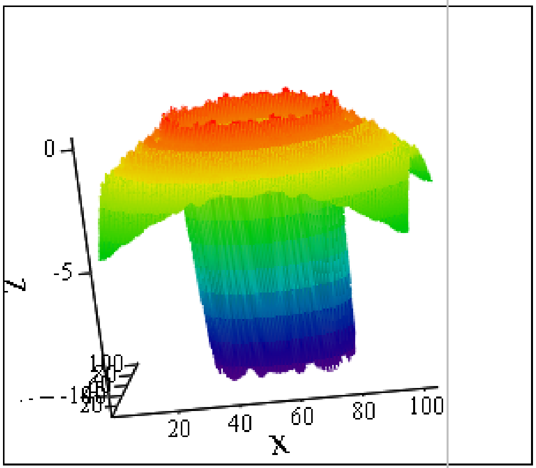
Лінії рівня відтвореної функції



Зображення похибок від заміни заданої функції відтвореною функцією

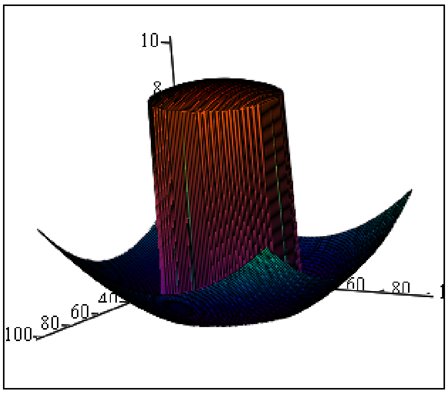


ZT – BZF



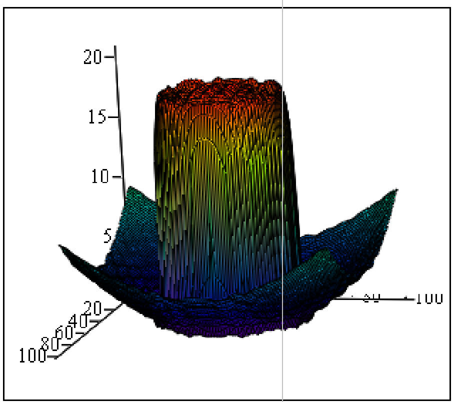
ZT – BZFSp

Зображення заданої функції

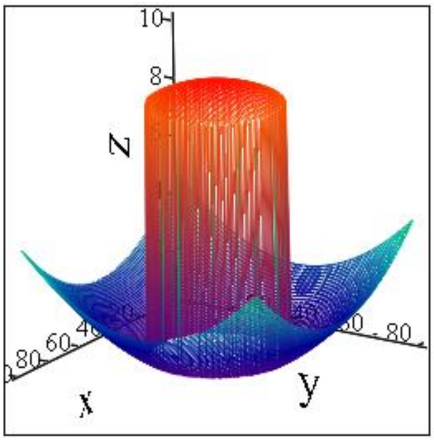


ZT

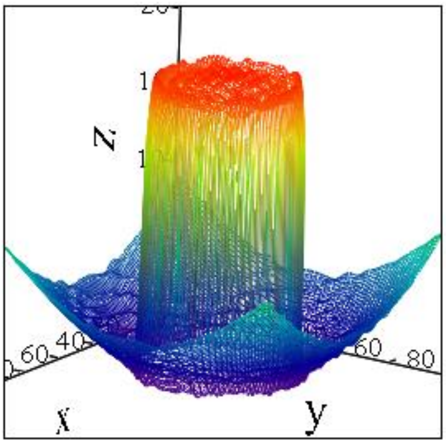
Зображення відтвореної функції



BZFSp



ZT



BZFSp

ВІДОМІСТЬ АТЕСТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

Позначення	Найменування	Дод. відомості
	Текстові документи	
1	Пояснювальна записка	99 с.
2	Презентаційний матеріал	34 с.
	Інші документи	
3	Роздруківки програм	20 с.
4	Рецензія	2 с.
5	Відгук керівника	1 с.

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="4" rowspan="3">Застосування методу скінченних сум Фур’є з проекційними даними для відновлення розривних функцій з відомими лініями розриву</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Змін</td><td>Арк.</td><td>Номер докум.</td><td>Підп.</td><td>Дата</td></tr>
<tr><td colspan="2">Розроб.</td><td>Бобков М.І.</td><td></td><td></td><td rowspan="4">(Тема роботи)
Відомість
атестаційної
роботи</td><td></td><td>Аркуш</td><td>Аркушів</td></tr>
<tr><td colspan="2">Перевір.</td><td>Литвин О.Г.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Н. контр.</td><td>Сидоров М.В.</td><td></td><td></td><td colspan="3" rowspan="2">ХНУРЕ
Кафедра ПМ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Затв.</td><td>Тевяшев А.Д.</td><td></td><td></td></tr>
</table>