



Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Завідувач кафедри \_\_\_\_\_

(підпис)

“ 10 ” листопада 2025 р.

**ЗАВДАННЯ**  
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Сафоненку Віталію Віталійовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Розрахунок режиму сталого поточкорозподілу в інженерних  
мережах в умовах невизначеності

затверджена наказом по університету від 10 листопада 2025 р. № 1028 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 18 грудня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель сталого поточкорозподілу

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі \_\_\_\_\_

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій \_\_\_\_\_

1. Актуальність теми роботи \_\_\_\_\_

2. Постановка задачі \_\_\_\_\_

3. Аналіз предметної області \_\_\_\_\_

4. Метод чисельного аналізу \_\_\_\_\_

5. Результати обчислювального експерименту \_\_\_\_\_

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	10 – 16 листопада 2025 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	17 – 23 листопада 2025 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	24 – 30 листопада 2025 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	01 – 07 грудня 2025 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	08 – 17 грудня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	18 грудня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 10 листопада 2025 р.

Здобувач \_\_\_\_\_  
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_ доц. Світлана КОЗИРЕНКО  
(підпис) (посада, Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 99 с., 8 табл., 1 рис., 1 дод., 40 джерел.

ІНЖЕНЕРНА МЕРЕЖА, ВОДОПРОВІДНА МЕРЕЖА, ГАЗОПРОВІДНА МЕРЕЖА, АКТИВНІ ЕЛЕМЕНТИ, ГРАФ МЕРЕЖІ, ЗАКОНИ КІРХГОФА, МОДЕЛЬ СТАЛОГО ПОТОКОРОЗПОДІЛУ, ГІДРАВЛІЧНИЙ РОЗРАХУНОК, ЛІНЕАРИЗАЦІЯ, МЕТОД НЬЮТОНА.

Об'єкт дослідження – процес сталого поточкорозподілу в інженерних мережах.

Мета роботи – застосування лінеаризованих моделей сталого поточкорозподілу для розв'язання задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності.

Методи дослідження – метод Ньютона розв'язання систем нелінійних рівнянь, лінеаризація рівнянь моделі сталого поточкорозподілу, методи обчислення числових характеристик випадкових величин

Задача розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах мережі в умовах невизначеності полягає в розрахунку імовірнісних характеристик залежних змінних моделі сталого поточкорозподілу при завданні вимірних значень незалежних змінних і їх дисперсій. Ця задача включає два етапи: гідравлічний розрахунок інженерних мереж з метою отримання оцінок математичних сподівань залежних змінних і розрахунок оцінок дисперсій залежних змінних з використанням лінеаризованих рівнянь моделі сталого поточкорозподілу. Розроблено алгоритми, що реалізують ці етапи. Здійснено програмну реалізацію. Наведено приклад розрахунку ділянки водопровідної мережі.

Результати роботи можна застосовувати при управлінні режимами функціонування інженерних мереж, а також їх проектуванні і реконструкції.

## ABSTRACT

Introductory note: 99 p., 8 tables, 1 figures, 1 appendix, 40 sources.

ENGINEERING NETWORK, WATER SUPPLY NETWORK, GAS PIPE-LINE NETWORK, ACTIVE ELEMENTS, NETWORK GRAPH, KIRCHHOFF'S LAWS, STEADY-STATE FLOW DISTRIBUTION MODEL, HYDRAULIC CALCULATION, LINEARIZATION, NEWTON'S METHOD.

Object of research – the process of steady-state flow distribution in engineering networks.

Purpose of work – the application of linearized steady-state flow distribution models to solve the problem of calculating the steady-state flow distribution regime in engineering networks under conditions of uncertainty.

Methods of research – Newton's method for solving systems of nonlinear equations, linearization of steady-state flow distribution model equations, methods for calculating numerical characteristics of random variables.

The problem of calculating the steady-state flow distribution regime in engineering networks under conditions of uncertainty consists in calculating the probabilistic characteristics of dependent variables of the steady-state flow distribution model given the measured values of independent variables and their variances. This problem includes two stages: hydraulic calculation of engineering networks to obtain estimates of the mathematical expectations of dependent variables, and calculation of estimates of the variances of dependent variables using linearized equations of the steady-state flow distribution model. Algorithms implementing these stages have been developed. Software implementation has been carried out. An example of calculating a section of a water supply network is provided.

The results of the work can be applied in managing the operating regimes of engineering networks, as well as in their design and reconstruction.

## ЗМІСТ

	С.
Перелік скорочень, умовних познач, одиниць і термінів .....	8
Вступ .....	9
1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження .....	12
1.1 Огляд математичних моделей сталого поточкорозподілу в інженерних мережах .....	12
1.1.1 Основи моделювання режимів сталого поточкорозподілу в інженерних мережах .....	12
1.1.2 Математичне представлення структури інженерної мережі .....	13
1.1.3 Математична модель сталого поточкорозподілу ділянок інженерної мережі .....	17
1.1.4 Постулати інженерних мереж .....	20
1.1.5 Пряма задача аналізу сталого поточкорозподілу в інженерних мережах .....	22
1.2 Методи чисельного розв'язання прямої задачі аналізу .....	26
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності .....	30
1.3.1 Змістовна постановка задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності .....	30
1.3.2 Формальна постановка задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності .....	32
1.3.2.1 Математична модель сталого поточкорозподілу в інженерних мережах .....	32
1.3.2.2 Постановка задачі гідравлічного розрахунку інженерних мереж з пасивними елементами .....	37

1.3.2.3	Постановка задачі гідравлічного розрахунку інженерних мереж з активними елементами .....	39
1.3.2.4	Математична постановка задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності.....	43
1.4	Постановка задач дослідження .....	47
2	Вибір та обґрунтування методу розв'язання задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності .....	49
2.1	Застосування методу Ньютона для розв'язання задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах .....	49
2.2	Застосування лінеаризованих рівнянь моделі сталого поточкорозподілу для розрахунку оцінок дисперсій режимних параметрів.....	50
	Висновки за розділом 2 .....	55
3	Програмна реалізація .....	56
3.1	Python як мова програмної реалізації .....	56
3.2	Алгоритм розв'язання задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності .....	57
3.2.1	Алгоритм розв'язання задачі гідравлічного розрахунку інженерних мереж .....	57
3.2.2	Алгоритм розв'язання задачі розрахунку оцінок дисперсій режимних параметрів .....	59
3.3	Опис програми .....	63
	Висновки за розділом 3 .....	66
4	Результати обчислювального експерименту .....	68
	Висновки за розділом 4 .....	81
	Висновки .....	83
	Перелік джерел посилання .....	85
	Додаток А Лістинг програми .....	89

**ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ**

СПР – сталий поточкорозподіл;

ІМ – інженерна мережа;

ВМ – водопровідна мережа;

ГМ – газопровідна мережа.

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Актуальність роботи зумовлена її практичною спрямованістю.

Велике число різноманітних інженерних мереж (ІМ) призначене для подачі з родовищ і розподілу між споживачами цільового продукту (рідкого або газоподібного). Такі мережі включають водопровідні мережі (ВМ) і газові мережі (ГМ).

У зв'язку з складністю ІМ. виникає необхідність в рішенні складних проблем, пов'язаних з проектуванням, реконструкцією, експлуатацією і управлінням режимами функціонування. Деякі етапи рішення цих проблем зводяться до розв'язання різноманітних складних математичних задач.

Проектування ІМ при розгляді її, як задачі управління в широкому сенсі, полягає в створенні такої мережі, яка здатна виконати своє основне функціональне призначення: забезпечити всіх споживачів мережі цільовим продуктом в необхідних кількостях і під заданим тиском.

Оперативне управління ІМ повинне забезпечити виконання її функціонального призначення при всій сукупності обурюючих чинників, технологічних обмежень і відмов окремих її елементів, що викликаються аварійними ситуаціями або обумовлюються профілактичними роботами.

Автоматизоване управління поточкорозподілом в ІМ має на увазі процес розв'язання за допомогою обчислювальної техніки комплексу задач при проектуванні, реконструкції і оперативному управлінні цими мережами. Необхідна умова здійснення автоматизованого управління — розробка математичних моделей і методів розв'язання таких задач і реалізація цих методів для конкретних мереж у вигляді спеціального математичного забезпечення.

Основою для розв'язання задач проектування, реконструкції і оперативного управління режимами функціонування є знання повного поточкорозподілу в мережах, тобто значень тисків у вузлах мережі і витрат цільового продукту по всіх ділянках мережі. Для отримання повного поточкорозподілу в мережі необ-

хідно розв'язувати задачу розрахунку режиму сталого поточкорозподілу (СПР) в ІМ. Задача розрахунку режиму СПР в ІМ полягає в розв'язанні рівнянь моделі СПР при завданні в якості незалежних змінних вимірних значень режимних параметрів на входах та виходах мережі. Така задача називається задачею гідравлічного розрахунку ІМ.

У реальних умовах функціонування ІМ вимірювання режимних параметрів на входах і виходах мережі здійснюються з випадковими помилками з нульовим математичним сподіванням і відомою дисперсією, тобто самі є випадковими величинами. Тому виникає задача розрахунку режиму СПР в мережі в умовах невизначеності. Вона полягає в розрахунку імовірнісних характеристик залежних змінних моделі сталого поточкорозподілу при завданні вимірних значень незалежних змінних і їх дисперсій.

Таким чином, тема кваліфікаційної роботи є актуальною.

**Мета і завдання кваліфікаційної роботи.** Метою кваліфікаційної роботи є застосування лінеаризованих моделей сталого поточкорозподілу для розв'язання задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз математичних моделей та методів розрахунку режимів сталого поточкорозподілу в інженерних мережах;
- навести змістовну та математичну постановку задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності;
- застосувати лінеаризовану модель сталого поточкорозподілу для розв'язання задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності;
- розробити алгоритм розв'язання задачі гідравлічного розрахунку інженерних мереж з метою оцінювання математичних сподівань режимних параметрів на входах и виходах мережі;
- розробити алгоритм розрахунку оцінок дисперсій режимних параметрів на входах и виходах інженерної мережі з використанням лінеаризованих рів-

нянь моделі сталого поточкорозподілу;

- виконати програмну реалізацію розроблених алгоритмів;
- провести обчислювальний експеримент та проаналізувати його результат, показвши працездатність запропонованих алгоритмів на прикладі розрахунку ділянки інженерної мережі.

*Об'єктом дослідження є процес сталого поточкорозподілу в інженерних мережах.*

*Предметом дослідження є методи розрахунку режимів сталого поточкорозподілу в інженерних мережах.*

**Методи дослідження.** У роботі використовуються метод Ньютона розв'язання систем нелінійних рівнянь, лінеаризація рівнянь моделі сталого поточкорозподілу, методи обчислення числових характеристик випадкових величин.

**Публікації.** Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на міжнародній мультидисциплінарній науковій інтернет – конференції «Світ наукових досліджень.» (м. Тернопіль, Україна, м. Ополе, Польща, 20-21 листопада 2025 р.) [1].

# 1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

## 1.1 Огляд математичних моделей сталого поточкорозподілу в інженерних мережах

### 1.1.1 Основи моделювання режимів сталого поточкорозподілу в інженерних мережах

При розв'язуванні задач проектування, реконструкції та управління інженерними мережами (ІМ), як газопровідними, так і водопровідними, необхідним етапом є розрахунок режимів функціонування цих мереж [2 – 14]. На практиці для ефективного управління та планування раціональних режимів функціонування ІМ найбільш поширення отримала математична модель сталого процесу поточкорозподілу (СПР) в цих мережах, яка базується на деяких передумовах [15].

1. Мережа є системою взаємодії підсистем трьох типів: споживачів, активних елементів, ліній зв'язку.

2. Кожна підсистема  $i$  мережі характеризується двома змінними величинами: послідовним (витратою)  $q_i$  та паралельним (втратою напору)  $h_i$ , рядом параметрів, а також обраним напрямом. Втрата напору  $h_i$  являється різницею тисків у відповідному ступеню, під яким знаходиться цільовий продукт (газ або вода) на початку та в кінці  $i$ -ї ділянки мережі.

3. До споживачів в мережі відносять деяку фіктивну ділянку (стік), яка направлена від будь-якого вузла мережі до точки з нульовим тиском. Ця ділянка характеризується своєю витратою цільового продукту та напором. Останній завжди співпадає з тиском у вузлі мережі з якого виходить стік.

4. До активних елементів для водопровідних мереж (ВМ) слід віднести насосні агрегати, для газопровідних мереж (ГМ) – газоперекачувальні агрегати.

5. Лінії зв'язку, або пасивні елементи, є ділянками трубопроводу. Залеж-

ність втрати напору для пасивного елемента від витрати є монотонною та непарною функцією.

6. Структура ІМ задається графом мережі, що відображає характер взаємодії між підсистемами.

7. Потік цільового продукту, що подається в мережу, дорівнює сумарному потоку, що споживається в мережі.

8. В мережі мають місце закони Кірхгофа або постулати мереж. Перший закон Кірхгофа полягає в тому, що алгебраїчна сума витрат в будь-якому вузлі мережі дорівнює нулю. Другий закон Кірхгофа полягає в тому, що сумарна втрата напору в будь-якому замкнутому циклі також дорівнює нулю.

Дані передумови дають можливість розглядати ІМ як сильно зв'язний лінійний граф  $G(V, E)$ , на якому визначені закони Кірхгофа. Граф мережі містить  $v = \text{Card}(V)$  вершин та  $e = \text{Card}(E)$  дуг, де  $V, E$  – множини вершин та дуг графа мережі, відповідно. Кожній із дуг поставлені у відповідність ряд активних й пасивних елементів та дві змінні величини: витрати  $q_i$  та втрати напору  $h_i$ , що пов'язані між собою залежністю, що визначається параметрами цих елементів.

Система рівнянь для дуг графа мережі, що відповідають пасивним та активним елементам, разом з рівняннями, які відображають закони Кірхгофа, є математичною моделлю СПР в ІМ, яка показує взаємозв'язок між змінними, параметрами та структурою ІМ.

### 1.1.2 Математичне представлення структури інженерної мережі

Структура ІМ задається у вигляді сильно зв'язного лінійного графа  $G(V, E)$ .

Розглянемо кінцевий орієнтований зв'язний лінійний граф з  $e$  ребрами (гілками) та  $v$  вершинами (вузлами) [16-19].

Математично лінійний граф відображається матрицею інцидентності  $A_\alpha$ .

Елементи матриці інцидентності  $A_\alpha$  визначаються з таких умов:

- $\alpha_{ki} = 1$ , якщо  $i$ -та дуга інцидентна до вершини  $k$  та спрямована до неї;
- $\alpha_{ki} = -1$ , якщо  $i$ -та дуга інцидентна до вершини  $k$  та спрямована від неї;
- $\alpha_{ki} = 0$ , якщо  $i$ -та дуга не інцидентна до вершини  $k$ .

Граф можна задати також у вигляді еквівалентної математичної форми, як множину  $A$   $v$  вузлових підмножин  $A_k$ . Елементами підмножини  $A_k$  є номери дуг графа, що інцидентні до  $k$ -ї вершини та взяті зі знаком плюс, якщо дуга направлена до вузла  $k$ , та зі знаком мінус при протилежному напрямленню дуги.

Деревом графа називається підграф, що містить всі вершини графа та не утворює жодного замкнутого циклу. Дуги, що входять в дерево, називаються гілками дерева, всі інші - хордами. Число гілок дерева дорівнює  $v-1$ , кількість хорд дорівнює  $\mu = (e - v + 1)$ . Число  $\mu$  називається цикломатичним числом графа.

Будь-якому довільно обраному дереву графа однозначно відповідає  $v-1$  головний перетин (узагальнений вузол) та фундаментальна система  $\mu$  циклів. Головний перетин є підмножиною дуг графа, що містить гілку дерева та хорди, що з'єднують два піддерева графа, які утворюються з дерева, що розглядається, після видалення цієї гілки дерева; фундаментальний цикл - підмножина ребер графа, що включає хорду та гілки дерева, які утворюють єдиний простий ланцюг, яка з'єднує кінцеві точки цієї хорди.

Для орієнтованого графа  $(v-1)$  головний перетин математично описується матрицею головних перетинів  $Q_\alpha = [q_{ij}]$  розмірності  $(v-1) \times e$  та рангу  $(v-1)$ , а система фундаментальних циклів - цикломатичною матрицею  $B_a = [b_{ij}]$  розмірності  $\mu \times e$  та рангу  $\mu$ .

Елементи матриці  $Q_\alpha$  визначають із таких умов:

–  $q_{ij} = 1$ , якщо  $i$ -та дуга належить  $j$ -му перетину та її напрямок в перетині співпадає з напрямком гілки дерева з номером  $j$ ;

–  $q_{ij} = -1$ , якщо  $i$ -та дуга належить  $j$ -му перетину та її напрямок в перетині протилежний напрямку гілки дерева з номером  $j$ ;

–  $q_{ij} = 0$ , якщо  $i$ -та дуга не належить  $j$ -му перетину.

Елементи матриці  $B_\alpha$  дорівнюють:

–  $b_{ri} = 1$ , якщо  $i$ -та дуга входить до  $r$ -го фундаментального циклу та її напрямок співпадає з напрямком хорди в цьому циклі;

–  $b_{ri} = -1$ , якщо  $i$ -та дуга входить до  $r$ -го фундаментального циклу та її напрямок протилежний напрямку хорди в цьому циклі;

–  $b_{ri} = 0$ ,  $i$ -та дуга не належить  $r$ -му циклу.

Оскільки в кожен перетин входить тільки одна гілка дерева, а в кожен фундаментальний цикл тільки одна хорда графа, то матриця  $Q_\alpha$  містить  $(v-1)$  одиничний базисний вектор-стовпець з номерами, які відповідають гілкам дерева, а  $B_\alpha$  –  $\mu$  одиничних базисних вектор-стовпців, номери яких відповідають номерам хорд графа.

Так саме, як лінійний граф може бути представлений математично у вигляді матриці інцидентності  $A_\alpha$  або множини вузлових підмножин  $A$ ,  $(v-1)$  головний перетин та система  $\mu$  фундаментальних циклів можуть бути представлені у вигляді матриць  $Q_\alpha$  і  $B_\alpha$  та, в більш компактній формі, у вигляді множини головних перетинів  $Q$  та множини фундаментальних циклів  $B$ , відповідно.

Множина головних перетинів  $Q$  складається з  $(v-1)$ -ї підмножини  $Q_j$ , елементами кожного з яких є номери дуг графа, що належать  $j$ -му головному перетину ( тобто перетину, що містить  $j$ -ту гілку дерева). Номери дуг беруть зі знаком плюс, якщо напрямок дуги в перетині співпадає з напрямком  $j$ -ї гілки дерева, та зі знаком мінус у протилежному випадку. Елемент  $j$  – провідний

елемент підмножини  $Q_j$ . Він належить лише цій підмножині та однозначно визначає її.

Множина фундаментальних циклів  $B$  складається із  $\mu$  підмножин  $B_r$ , елементами кожного із яких є номери дуг графа, що належать  $r$ -му циклу (тобто циклу, що містить  $r$ -ту хорду). Дуги мають знак плюс, якщо їх напрямок в циклі співпадає з напрямком  $r$ -ї хорди, та знак мінус у протилежному випадку.

Розглянемо взаємозв'язок між матрицями  $A_\alpha$ ,  $Q_\alpha$  і  $B_\alpha$ . Матриця головних перетинів  $Q_\alpha$  та відповідне їй дерево можуть бути отримані внаслідок ряду елементарних перетворень матриці інцидентності  $A_\alpha$  до вигляду, що містить  $\nu - 1$  незалежний одиничний вектор-стовпець та нульовий останній рядок. Взаємозв'язок між матрицями  $Q_\alpha$  та  $B_\alpha$  визначається основною теоремою топології мереж:

$$B_\alpha Q_\alpha' = Q_\alpha B_\alpha' = 0. \quad (1.1)$$

Переставимо стовпці матриць  $Q_\alpha$  і  $B_\alpha$  таким чином, щоб перші  $\nu - 1$  стовпці відповідали гілкам дерева, а інші  $\mu$  – хордам. Така процедура перестановки відповідає перенумерації дуг графа, внаслідок якої гілкам дерева привласнюються номери від 1 до  $\nu - 1$ , а хордам – від  $\nu$  до  $e$ . Тоді матриці  $Q_\alpha$  і  $B_\alpha$  приймуть такий вигляд

$$Q_\alpha = [I | Q_{\alpha 2}], \quad (1.2)$$

$$B_\alpha = [B_{\alpha 1} | I], \quad (1.3)$$

де  $I$  – одинична матриця розмірності  $\nu - 1$  в  $Q_\alpha$  та  $\mu$  в  $B_\alpha$ ;

$Q_{\alpha 2}$  – підматриця розмірності  $\mu \times (\nu - 1)$ ;

$B_{\alpha 1}$  – підматриця розмірності  $\mu \times (\nu - 1)$ .

Підставив вирази (1.2), (1.3) у співвідношення (1.1), отримаємо:

$$Q_{\alpha 2} = -B'_{\alpha 1}. \quad (1.4)$$

### 1.1.3 Математична модель сталого поточкорозподілу ділянок інженерних мереж

Розглянемо залежність між паралельною та послідовною змінною  $i$ -ої ділянки ІМ у загальному випадку. Будемо розглядати лише два типи елементів мережі: реальний та фіктивний. При цьому реальна ділянка ІМ відповідає дузі, кожен вузол якої інцидентний не менш ніж трьом дугам графа, та в загальному випадку складається із послідовно включених активних та пасивних елементів. Тоді залежність  $h_i(q_i)$  для цієї ділянки визначається параметрами елементів  $i$ -ї гілки та може бути представлена у такому вигляді [15]:

$$h_i = \sum_{j=1}^{m_i} h_{ij}^{(n)}(q_i) - \sum_{j=1}^{n_i} h_{ij}^{(a)}(q_i), i = 1, \dots, e \quad (1.5)$$

де  $h_{ij}^{(n)}$  та  $h_{ij}^{(a)}$  – паралельні змінні  $j$ -го пасивного та активного елементу  $i$ -ї гілки;

$m_i$  – число пасивних елементів гілки;

$n_i$  – число активних елементів гілки.

Будемо вважати, що послідовна змінна  $q_i$  додатна, якщо напрямок цієї змінної співпадає з напрямком  $i$ -ої дуги, та від'ємна у протилежному випадку. Також вважається, що дуга та її активні джерела однаково орієнтовані, тобто напрямок послідовної змінної, що створюється  $i$ -им джерелом  $i$ -ї гілки, співпадає з її напрямком.

Функція  $h_{ij}^{(n)}(q_i)$  – монотонно зростаюча непарна функція  $q_i$ , тобто

$$\frac{d}{dq_i} h_{ij}^{(n)}(q_i) \geq 0, \quad (1.6)$$

$$h_{ij}^{(n)}(-q_i) = -h_{ij}^{(n)}(q_i). \quad (1.7)$$

Очевидно, сумарна паралельна змінна, що визначається параметрами всіх пасивних елементів  $i$ -ої гілки  $h_i^{(n)}(q_i) = \sum_{j=1}^{m_i} h_{ij}^{(n)}(q_i)$  також є монотонно зростаючою непарною функцією  $q_i$ .

Більшість емпіричних залежностей можна апроксимувати наступною формулою [15]:

$$h_{ij}^{(n)} = \operatorname{sgn} q_{ij} r_{ij} |q_i|^{\aleph_{ij}}, \quad (1.8)$$

де  $r_{ij} > 0$  та  $\aleph_{ij} \geq 1$  – відповідно опір та коефіцієнт нелінійності  $j$ -го пасивного елемента  $i$ -ої гілки, що визначаються експериментально або на основі емпіричних формул, вони залежать від параметрів цього елемента, а іноді й від послідовної змінної  $q_i$ ;

$\operatorname{sgn} q_i$  – знак  $q_i$  ( $\operatorname{sgn} q_i = 1$ , якщо  $q_i \geq 0$ ;  $\operatorname{sgn} q_i = -1$ , якщо  $q_i < 0$ ).

Паралельна змінна  $j$ -го активного елемента  $i$ -ої гілки  $h_{ij}^{(a)}(q_i)$  визначається навантажувальною характеристикою цього елемента і в більшості випадків (наприклад, для ВМ) може бути апроксимована в заданій робочій області  $q_i^+ \leq q_i \leq q_i^{++}$  поліномом другого ступеня вигляду [15]:

$$h_{ij}^{(a)}(q_i) = \psi_{0ij} + \psi_{1ij} q_i + \psi_{2ij} q_i^2, \quad (1.9)$$

де  $h_{ij}^{(a)}(q_i)$  – постійна або монотонно-спадна функція в робочій області

$q_i^+ \leq q_i \leq q_i^{++}$ , тобто

$$\frac{d}{dq_i} h_{ij}^{(a)}(q_i) \leq 0. \quad (1.10)$$

Підставив вирази (1.8) та (1.9) в формулу (1.5), отримаємо залежність між послідовною та паралельною змінною для  $i$ -ої дуги графа ВМ у сталому режимі:

$$h_i = \sum_{j=1}^{m_i} \operatorname{sgn} q_{ij} r_{ij} |q_i|^{\aleph_{ij}} - \sum_{j=1}^{n_i} (\psi_{0ij} + \psi_{1ij} q_i + \psi_{2ij} q_i^2), \quad i = 1, 2, \dots, e. \quad (1.11)$$

Ділянку мережі  $i$  що відповідає споживачу, будемо характеризувати деяким вільним напором  $h_i^{(H)}$  та витратою  $q_i$ . Втрата напору співпадає з тиском в початковому вузлі фіктивної ділянки, а сама ділянка є деякою еквівалентним навантаженням, що характеризується своїми параметрами, які визначають взаємозв'язок між паралельною та послідовною змінними цього навантаження, тобто залежність  $h_i^{(H)} = h_i^{(H)}(q_i)$ . Будемо вважати, що ця залежність з достатньою точністю може бути апроксимована виразом

$$h_i^{(H)} = \operatorname{sgn} q_i r_i^H |q_i|^{\aleph_i^H}, \quad (1.12)$$

та представляє собою окремий, більш простий випадок виразу (1.11). В загальному випадку вирази (1.8) та (1.12) не можна вважати ідентичними, оскільки  $r_i^H$  та  $\aleph_i^H$  є випадковими функціями від часу, а  $r_{ij}$  та  $\aleph_{ij}$  майже не залежать від часу [20]. Однак при моделюванні сталого поточкорозподілу будемо вважати, що  $r_i^H$  та  $\aleph_i^H$  постійні та не залежать від часу.

### 1.1.4 Постулати інженерних мереж

Перший закон Кірхгофа полягає в тому, що алгебраїчна сума послідовних змінних, що поставлені у відповідність дугам графа ІМ, які інциденті будь-якому вузлі або які належать будь-якому перетину, дорівнює нулю. Закон може бути сформульований в матричній формі:

$$A_\alpha \bar{q} = 0,$$

або

$$Q_\alpha \bar{q} = 0. \quad (1.13)$$

Відповідно до другого закону Кірхгофа, нулю дорівнює алгебраїчна сума паралельних змінних, які поставлені у відповідність дугам графа мережі, що належать будь-якому замкнутому циклу. Цей закон можна сформулювати в матричному вигляді таким чином:

$$B_\alpha \bar{h} = 0. \quad (1.14)$$

Для більш компактного математичного представлення законів Кірхгофа в матричній формі виберемо дерево графа мережі так, що гілкам дерева дамо номери від 1 до  $\nu - 1$ , а хордам – від  $\nu$  до  $e$ . Внаслідок такої нумерації будуть справедливі співвідношення (1.2) – (1.4), а вектори  $\bar{q}$  та  $\bar{h}$  розіб'ються на два складових вектори:

$$\bar{q}' = (\bar{q}'_1, \bar{q}'_2), \quad (1.15)$$

$$\bar{h}' = (\bar{h}'_1, \bar{h}'_2), \quad (1.16)$$

де  $i$ -та компонента  $(\nu-1)$  мірних векторів  $\bar{q}_1$  та  $\bar{h}_1$  відповідно послідовна та паралельна змінні  $i$ -ої гілки дерева;

$r$ -та компонента  $\mu$ -мірних векторів  $\bar{q}_2$  та  $\bar{h}_2$  – паралельна та послідовна змінні  $r$ -ої хорди графа ІМ.

Підставляючи вирази (1.15) та (1.2) в формулу (1.13), а вирази (1.16) та (3.3) в формулу (1.14), отримаємо такі залежності для першого та другого постулатів ІМ:

$$\bar{q}_1 = -Q_2 \bar{q}_2, \quad (1.17)$$

$$\bar{h}_2 = -B_{\alpha 1} \bar{h}_1. \quad (1.18)$$

Ці залежності показують, що значення послідовної змінної в гілках дерева мережі є лінійною комбінацією значень послідовних змінних в хордах, а значення паралельної змінної в хорді – лінійною комбінацією значень паралельних змінних в гілках дерева.

Беручи до уваги вираз (1.4), перший та другий постулати можна записати за допомогою лише матриці  $Q_{\alpha 2}$ :

$$\begin{cases} \bar{q}_1 = -Q_{\alpha 2} \bar{q}_2 \\ \bar{h}_2 = Q'_{\alpha 2} \bar{h}_1 \end{cases}, \quad (1.19)$$

або лише матриці  $B_{\alpha 1}$

$$\begin{cases} \bar{h}_2 = -B_{\alpha 1} \bar{h}_1 \\ \bar{q}_1 = B'_{\alpha 1} \bar{q}_2 \end{cases}. \quad (1.20)$$

Вираз (1.20) представимо в алгебраїчній формі:

$$q_i = \sum_{r=v}^e b_{1ri} q_r \quad i = (1, \dots, v-1), \quad (1.21)$$

$$h_r = \sum_{i=1}^{v-1} b_{1ri} h_i \quad (r = v, \dots, e). \quad (1.22)$$

Будь який з виразів, що описують перший і другий закони Кірхгофа, в сукупностями із залежностями (1.5) або (1.11) є математичною моделлю сталого поточкорозподілу в ІМ, тобто є тією системою рівнянь, яка дозволяє однозначно відобразити взаємозв'язок між змінними, параметрами і геометричною структурою мережі. Ця математична модель лежить в основі розв'язання задач аналізу і синтезу мереж.

#### 1.1.5 Пряма задача аналізу сталого поточкорозподілу в інженерних мережах

Розглянемо пряму задачу аналізу сталого поточкорозподілу в ІМ. Фактично пряма задача аналізу є задачею розрахунку режиму СПР в ІМ або задачею гідравлічного розрахунку ІМ. Основна ідея прямої задачі аналізу полягає в тому, щоб по відомим параметрам ділянок мережі та її топології визначити вектори послідовної та паралельної змінних [15]. Визначення цих змінних зводиться до розв'язання рівнянь математичної моделі, наприклад (1.21), (1.22) та (1.5), відносно векторів  $\bar{q}$  та  $\bar{h}$ , або після пониження порядку цієї системи внаслідок підстановки  $h_i$  (компонент вектору  $\bar{h}$ ) з (1.5) в (1.22) до розв'язання системи  $\mu$  нелінійних рівнянь

$$f_r = \sum_{j=1}^{m_r} h_{rj}^{(n)}(q_r) - \sum_{j=1}^{n_r} h_{rj}^{(a)}(q_r) +$$

$$+ \sum_{i=v}^e b_{1ri} \left[ \sum_{j=1}^{m_r} h_{rj}^{(n)}(q_r) - \sum_{j=1}^{n_r} h_{rj}^{(a)}(q_r) \right] = 0, r = v, \dots, e, \quad (1.23)$$

при  $(v-1)$ -му лінійному рівнянні зв'язку (1.21) відносно вектору  $\bar{q}$ .

Розв'язок системи нелінійних рівнянь зазвичай має декілька коренів. Покажемо, що, не зважаючи на нелінійність рівнянь математичної моделі процесів поточкорозподілу в ІМ, при виконанні умов (1.6) та (1.10) розв'язок прямої задачі аналізу єдиний. Для цього доведемо, що при виконанні цих умов матриця Якобі (матриця перших часткових похідних відносно складових вектору  $\bar{q}_2$ ) системи нелінійних рівнянь (1.23) при лінійних рівняннях зв'язку (1.21) додатно визначена для всіх  $\bar{q}$ , що задовольняють цим рівнянням зв'язку.

Розглянемо функцію, змінні якої пов'язані між собою співвідношенням (1.21), й стаціонарні точки співпадають з коренями системи рівнянь (1.23) та (1.21):

$$Z = \sum_{i=1}^e \int \left[ \sum_{j=1}^{m_r} h_{rj}^{(n)}(q_r) - \sum_{j=1}^{n_r} h_{rj}^{(a)}(q_r) \right] dq_i, \quad (1.24)$$

де всі  $q_i$  задовольняють умові (1.21).

Беручи часткові похідні функції (1.24) по змінним  $q_r (r = v, \dots, e)$ , прирівнюючи їх до нуля та маючи на увазі те, що відповідно до виразу (1.21)  $\frac{\partial q_i}{\partial q_r} = b_{1ri}$ ,

отримаємо:

$$\frac{\partial Z}{\partial q_r} = f_r = 0. \quad (1.25)$$

Тобто, дійсно, стаціонарні точки функції (1.24) при умові (1.21) співпадає з коренями системи рівнянь (1.23), (1.21).

Підставляючи значення послідовної змінної  $q_i (i=1, \dots, v-1)$  із рівнянь зв'язку (1.21) в функцію (1.24), отримаємо

$$Z = Z(\bar{q}_2), \quad (1.26)$$

де  $\bar{q}_2 - \mu$ - мірний вектор, складова  $q_r$  якого відповідає значенню витрати в  $r$ -й хорді графа мережі.

Покажемо, що диференційна квадратична форма

$$\aleph = \frac{1}{2} \Delta \bar{q}_2' H \Delta \bar{q}_2, \quad (1.27)$$

функції (1.24) при умовах (1.6), (1.10), (1.21), або, що одне й те ж саме, функція (1.27) при умовах (1.6), (1.10), додатно визначена для будь-якого  $\bar{q}_2$ .

У виразі (1.27)  $H$  - матриця Гессе, елементи якої визначаються за формулами:

$$h_{rr} = \frac{\partial f_r}{\partial q_r} = \sum_{j=1}^{m_r} \frac{\partial h_{rj}^{(n)}(q_r)}{\partial q_r} - \sum_{j=1}^{n_r} \frac{\partial h_{rj}^{(a)}(q_r)}{\partial q_r} + \sum_{i=1}^{v-1} b_{1ri}^2 \left[ \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\partial h_{rij}^{(n)}(q_i)}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\partial h_{rij}^{(a)}(q_i)}{\partial q_i} \right], \quad r = v, \dots, e, \quad (1.28)$$

$$(h_{rk})_{r \neq k} = \left( \frac{\partial f_r}{\partial q_k} \right)_{r \neq k} = \sum_{i=1}^{v-1} b_{1ri} b_{1ki} \left[ \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\partial h_{rij}^{(n)}(q_i)}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\partial h_{rij}^{(a)}(q_i)}{\partial q_i} \right], \quad (1.29)$$

$$r = v, \dots, e; k = v, \dots, e.$$

Підставивши вирази (1.28) та (1.29) в формулу (1.27), виконуючи перемноження матриць та беручи до уваги, що

$$\Delta q_i = \sum_{r=v}^e b_{1ri} \Delta q_r, i = 1, \dots, v-1,$$

а також вирази (1.6) та (1.10), для всіх  $\bar{q}$ , що задовольняють виразу (1.21), отримаємо наступний вираз:

$$\aleph(\bar{q}_r, \Delta \bar{q}_r) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^e \left[ \sum_{j=1}^{m_r} \frac{\partial h_{rj}^{(n)}(q_r)}{\partial q_r} \Delta q_r^2 - \sum_{j=1}^{n_r} \frac{\partial h_{rj}^{(a)}(q_r)}{\partial q_r} \Delta q_r^2 \right] > 0. \quad (1.30)$$

Отже, матриця Якобі додатно визначена для всіх  $\bar{q}$ , що задовольняють першому закону Кірхгофа.

Оскільки квадратична форма (1.30), а отже й матриця Гесса  $H$ , завжди додатно визначена, функція (1.26) опукла та може мати лише одну стаціонару точку, що є мінімумом функції [21]. Тому система  $\mu$  нелінійних рівнянь (1.23) при  $(v-1)$ -му лінійному рівнянні зв'язку (1.21) та виконанні умов (1.6) та (1.10) має (у випадку існування) єдиний розв'язок [22].

Отже, більшість ітераційних методів буде приводити до мети при будь-яких початкових наближеннях.

Таким чином, функція (1.24) за умов (1.21), (1.6), (1.10) строго опукла, а її матриця других похідних позитивно визначена в будь-якій точці, для складових якої справедливо співвідношення (1.21). Діагональні елементи цієї матриці (1.28) позитивні і переважають над будь-яким елементом в рядку і стовпці

$$h_{jj} > |h_{ij}| = |h_{ji}|. \quad (1.31)$$

Строго опуклість функції (1.24) за умов (1.21), (1.6), (1.10), очевидно, значно спрощує розв'язання прямої задачі аналізу, оскільки більшість ітераційних методів приводитимуть до мети при будь-яких початкових наближеннях. Крім того, як впливає з виразу (1.25), для даної задачі можна застосовувати не тіль-

ки методи, придатні для розв'язання систем нелінійних рівнянь [23-25], але й методи багатовимірної безумовної оптимізації [26-29].

## 1.2 Методи чисельного розв'язання прямої задачі аналізу

Розглянемо застосування методу Ньютона для розв'язання прямої задачі аналізу [23, 24, 30].

Підставимо значення компонент  $q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, (v-1)$  вектору послідовних змінних  $\bar{q}_1$  з рівняння (1.21) в формулу (1.23), отримаємо систему  $\mu$  нелінійних рівнянь з  $\mu$  невідомими компонентами  $q_r$ ,  $r = v, \dots, e$  вектору послідовних змінних  $\bar{q}_2$ :

$$f_r = f_r(q_v, \dots, q_e), \quad r = v, \dots, e. \quad (1.32)$$

Нехай знайдено  $k$ -те наближення кореня цієї системи  $\bar{q}_2^{(k)'} = (q_v^{(k)}, \dots, q_e^{(k)})$ .

Тоді точний корінь системи  $\bar{q}_2' = (q_v, \dots, q_e)$  можна записати у вигляді

$$\bar{q}_2 = \bar{q}_2^{(k)} + \Delta \bar{q}_2^{(k)}, \quad (1.33)$$

де вектор  $\Delta \bar{q}_2^{(k)'} = (\Delta q_v^{(k)}, \dots, \Delta q_e^{(k)})$  – вектор поправок (похибки кореня в точці  $k$ -го наближення).

Підставив вираз (1.33) в систему рівнянь (1.32), отримаємо:

$$f_r = f_r(q_v^{(k)} + \Delta q_v^{(k)}, \dots, q_e^{(k)} + \Delta q_e^{(k)}) = 0, \quad r = v, \dots, e. \quad (1.34)$$

Розкладемо ліву частину рівняння (1.34) в околі точки  $\bar{q}_2^{(k)}$  у ряд Тейлора, обмежившись лінійними членами розкладу:

$$f_r(\bar{q}_2^{(k)}) + \sum_{j=v}^e \frac{\partial f_r(\bar{q}_2^{(k)})}{\partial q_j} \Delta q_j^{(k)} = 0, \quad r = v, \dots, e, \quad (1.35)$$

або

$$W(\bar{q}_2^{(k)}) \Delta \bar{q}_2^{(k)} = -\bar{f}(\bar{q}_2^{(k)}), \quad (1.36)$$

де  $W$  – матриця Якобі системи функцій  $f_r$ ,  $r = v, \dots, e$ .

Матриця Якобі  $W$  співпадає з матрицею  $H$  Гессе функції (1.26), позитивно визначена для всіх  $\bar{q}_2$ . Елементи матриці Якобі  $W$  обчислюються за формулами (1.28), (1.29).

Система рівнянь (1.36) є системою лінійних рівнянь відносно вектору поправок  $\Delta \bar{q}_2^{(k)}$  в точці  $k$ -го наближення. Матриця цієї системи є Якобіан вектор – функції  $\bar{f}^{(k)}$ , а стовбець вільних членів є вектор – функція, взята з оберненим знаком, при  $k$ -ом наближенні кореня системи нелінійних рівнянь (1.32).

З формул (1.28), (1.29) можна побачити, що матриця Якобі симетрична, а при виконанні умов (1.6), (1.10) будь-який її діагональний елемент додатній та більше будь-якого елемента, що знаходиться в одній з ним строчці або стовбці. З позитивної визначеності матриці Якобі в будь-якій точці випливає її невідомобленість та існування зворотної матриці.

Таким чином, розв'язок лінійної системи рівнянь (1.36) можна подати у вигляді:

$$\Delta \bar{q}_2^{(k)} = -(W^{-1})^{(k)} \bar{f}(\bar{q}_2^{(k)}). \quad (1.37).$$

Виходячи з виразу (1.33), отримаємо основне співвідношення метода Ньютона:

$$\bar{q}_2^{(k+1)} = \bar{q}_2^{(k)} - (W^{-1})^{(k)} \bar{f}(q_2^{(k)}). \quad (1.38)$$

Оскільки для визначення вектору поправок  $\Delta \bar{q}_2^{(k)}$  враховувались тільки лінійні члени розкладу,  $(k + 1)$ -те наближення не є точним розв'язком системи лінійних рівнянь(1.36). Ітераційний процес уточнення кореня продовжується до досягнення заданої точності обчислення  $|f_r^{(k+1)}| \leq \varepsilon$  для всіх  $r$ ,  $r = v, \dots, e$ .

Використовуючи вираз(1.21), що відображає перший закон Кірхгофа, можна за отриманими значеннями компонент вектору  $\bar{q}_2$  отримати компоненти вектору  $\bar{q}_1$ . Таким чином, всі компоненти вектору послідовних змінних  $\bar{q}$  будуть визначені.

Підставляючи отриманні значення компонент вектору послідовних змінних  $\bar{q}$  у вираз (1.5), визначимо вектор паралельних змінних  $\bar{h}$ .

Метод Ньютона, що застосовується для розв'язання системи рівнянь (1.23), (1.21), має швидку збіжність, але потребує виконання великої кількості операцій на кожній ітерації, пов'язаних з обчисленням і обертанням матриці Якобі.

Модифікований метод Ньютона дозволяє для уточнення кореня системи рівнянь (1.32) на кожній ітерації використовувати обернену матрицю Якобі, отриману в точці початкового наближення.

Приблизно можна вважати, що

$$(W^{-1})(\bar{q}_2^{(k)}) \approx (W^{-1})(\bar{q}_2^{(0)}), \quad (1.39)$$

або

$$(W^{-1})^{(k)} \approx (W^{-1})^{(0)}.$$

Тоді основне співвідношення для модифікованого методу Ньютона має

ВИГЛЯД:

$$\bar{q}_2^{(k+1)} = \bar{q}_2^{(k)} - (W^{-1})^{(0)} \bar{f}(q_2^{(k)}). \quad (1.40)$$

Модифікований метод Ньютона може бути використаним при умові, що початкове наближення  $\bar{q}_2^{(0)}$  достатньо близько до шуканого розв'язку.

Метод Лобачова – Кросса був розроблений для розрахунку поточкорозподілу у ВМ і набув поширення в практиці їх експлуатації [15, 30]. Метод фактично є наближеним методом Ньютона, отриманим в результаті деяких математично некоректних перетворень.

У цьому методі вважається, що всі недіагональні елементи матриці Якобі системи рівнянь (1.32) нульові, а поправку кореня на  $k$ -ій ітерації визначають за наближеними формулами:

$$\Delta q_r^{(k)} = - \frac{f_r^{(k)}}{\left( \frac{\partial f_r}{\partial q_r} \right)^{(k)}}, \quad r = v, \dots, e, \quad (1.41)$$

де  $f_r$  і  $\frac{\partial f_r}{\partial q_r}$  обчислюються за формулами (1.23), (1.28).

Такі математичні припущення були зроблені тому, що для ВМ елементи головної діагоналі матриці Якобі позитивні й переважають над будь-яким елементом у рядку та стовпчику, а багато недіагональних елементів дорівнюють нулю.

Особливе значення під час розв'язання системи рівнянь (1.23), (1.21) наближеним методом Ньютона має вибір незалежних циклів у мережі. Під час формування системи фундаментальних циклів дерево графа мережі необхідно вибирати так, щоб його гілки належали якомога меншій кількості фундаментальних циклів одночасно, що призводить до більшої кількості нульових елементів у цикломатичній матриці  $B_1$ . В якості хорд обирались дуги, які мали біль-

ший гідравлічний опір. Від вибору дерева графа мережі значно залежить швидкість збіжності метода.

Дамо порівняльну характеристику розглянутим методам розв'язку прямої задачі аналізу з точки зору ефективності.

Метод Ньютона збігається значно швидше інших методів, але потребує більшої кількості обчислень на кожній ітерації. Метод завжди призводить до розв'язку розглядуваної системи нелінійних рівнянь. Швидкість збіжності менше залежить від вибору початкових наближень порівнювано з іншими методами. Вибір дерева графа мережі впливає тільки на час виконання однієї ітерації. Кількість ітерації не залежить від обраного дерева і приводить до слабкої залежності швидкості збіжності метода Ньютона від вибору системи фундаментальних циклів.

Модифікований метод Ньютона не завжди має збіжність до розв'язку прямої задачі аналізу при довільному виборі початкових наближень.

Метод Лобачова – Кросса є найбільш простим за розрахунковою схемою, але не є математично обґрунтованим, часто не дає збіжності, а якщо й дає збіжність, то дуже повільну, яка залежить від вибору дерева графа мережі.

Дерево необхідно обрати таким чином, щоб його гілки належали одночасно меншій кількості незалежних циклів та мали малий гідравлічний опір.

### 1.3 Змістовна та формальна постановки задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності

#### 1.3.1 Змістовна постановка задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності

Система рівнянь для дуг графа мережі, що відповідають пасивним та активним елементам, разом з рівняннями, що відображають закони Кірхгофа, є математичною моделлю СПР в ІМ, яка однозначно показує взаємозв'язок між

змінними, параметрами та структурою ІМ.

Задача розрахунку режиму СПР в ІМ полягає у розв'язанні рівнянь моделі СПР при завданні в якості незалежних змінних вимірних значень режимних параметрів на входах та виходах мережі [20]. Таку задачу прийнято називати задачею гідравлічного розрахунку ІМ.

При розв'язанні цієї задачі повинні виконуватись умови спостереження [22], які для ІМ, що містить  $l$  входів та  $n$  виходів, зводяться до того, що на кожному вході або виході повинно бути відомо значення або тиску, або витрат, до того ж повинно бути відомо хоча б одне значення тиску (сумарне значення режимних параметрів повинно дорівнювати  $(l + n)$ ).

Розв'язання задачі розрахунку режиму СПР в ІМ дозволяє по заданим значенням граничних умов (тисків, витрат) знайти точний поточкорозподіл мережі, тобто витрати по всіх ділянках мережі та тиск у всіх вузлах мережі. При цьому на входах та виходах мережі розраховуються тиск або витрати, що не є граничними умовами.

Але така задача не враховує випадковий характер граничних умов. У реальних умовах функціонування ІМ вимірювання режимних параметрів на входах і виходах мережі здійснюються з випадковими помилками з нульовим математичним сподіванням і відомою дисперсією, тобто самі є випадковими величинами. Тому виникає задача дослідження імовірнісних характеристик залежних змінних моделі СПР, яка полягає у розрахунку математичних сподівань та дисперсій залежних змінних моделі СПР при заданих значеннях математичних сподівань та дисперсій незалежних змінних.

Таким чином, задача розрахунку режиму СПР в ІМ в умовах невизначеності включає два етапи: гідравлічний розрахунок ІМ з метою отримання математичних сподівань залежних змінних і розрахунок дисперсій режимних параметрів з використанням лінеаризованих рівнянь моделі СПР.

Для розрахунку режиму СПР в ІМ в умовах невизначеності необхідні такі початкові дані: структура мережі, задана у вигляді графа  $G(V, E)$ ; параметри магістральних ділянок (довжина, діаметр, геодезичні відмітки початку і кінця

ділянок трубопроводу); параметри активних елементів; залежність між паралельною і послідовною змінними реальних ділянок; вимірювання значень  $(l + n)$  режимних параметрів на входах і виходах мережі, а також значення їх дисперсій, причому потрібно хоча би одне вимірювання значення тиску та його дисперсія.

Потрібно визначити значення режимних параметрів (тисків або витрат) на всіх входах і виходах ІМ і їх дисперсії, а також значення витрат по всіх пасивних і активних ділянках мережі і тисків у всіх вузлах мережі.

### 1.3.2 Формальна постановка задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності

#### 1.3.2.1 Математична модель сталого поточкорозподілу в інженерних мережах

Розглянемо окремий випадок загальної математичної моделі СПР, коли в якості ділянок враховуються лише пасивні ділянки мережі.

У більшості випадків для пасивних елементів різних класів ІМ залежність  $h_i = h_i(q_i)$ ,  $i \in E$  може бути апроксимована наступною формулою [20]:

$$h_i(q_i) = P_{iH}^\alpha - P_{iK}^\alpha = c_i q_i |q_i|^{\chi_i - 1}, \quad i \in E. \quad (1.42)$$

де  $P_{iH}, P_{iK}$  – тиски на початку та наприкінці  $i$ -ої ділянки мережі;

$c_i$  – гідравлічний опір  $i$ -ої ділянки мережі, причому  $c_i > 0$ ;

$\chi_i$  – коефіцієнт нелінійності  $i$ -ої ділянки мережі, причому  $\chi_i \geq 1$ ;

$\alpha$  – показник ступеня при значеннях тисків на початку та в кінці ділянки мережі, відповідно.

Система  $e$  рівнянь вигляду  $h_i = h_i(q_i)$ ,  $i \in E$  для дуг графа мережі спільно

з рівняннями, що відповідають законам Кірхгофа, є математичною моделлю СПР в ІМ, яка відображає взаємозв'язок між змінними, параметрами та структурою мережі.

Доповнимо реальну мережу нульовою вершиною та фіктивними ділянками, які з'єднують цю вершину з усіма входами та виходами мережі. Входами мережі є всі її вузлові вершини, через які до мережі надходить цільовий продукт, а виходами – всі вузлові вершини, через які здійснюється відбір цільового продукту.

Отриманий граф містить  $e$  дуг та  $v$  вершин. Множину  $E$  дуг графа мережі можна записати як  $E = M \cup K$ , де  $M$  – множина дуг графа мережі, що відповідають реальним ділянкам;  $K = L \cup N$  – множина дуг графа мережі, що відповідають фіктивним ділянкам мережі;  $L, N$  – множини дуг, що відповідають входам та виходам мережі, відповідно. Виберемо дерево графа мережі, тоді  $E = E_1 \cup E_2$ , де  $E_1, E_2$  – множини дуг, що відповідає гілкам дерева і хордам. Зазначимо, що нульова вершина є початковою для дуг, які відповідають входам мережі, і кінцевою для дуг, які відповідають виходам мережі. Тоді модель СПР в ІМ з пасивними елементами можна записати [31]:

$$f_r = h_r + \sum_{i \in E} b_{1ri} h_r = 0, \quad r \in E_2; \quad (1.43)$$

$$q_i = \sum_{i \in E_2} b_{1ri} q_r, \quad i \in E_1; \quad (1.44)$$

де

$$h_i(q_i) = \psi_i(P_{in}, P_{ik}) = c_i q_i |q_i|^{\chi_i - 1}, \quad i \in M; \quad (1.45)$$

$$h_j = -P_j^\alpha, \quad j \in L; \quad (1.46)$$

$$h_j = P_j^\alpha, \quad j \in N, \quad (1.47)$$

де  $P_j^\alpha$  – тиск на початку ( $j \in N$ ) або наприкінці ( $j \in L$ )  $j$ -ої фіктивної дуги;

$b_{lri}$  – елемент цикломатичної матриці  $B_1$ , яка побудована для гілок дерева граф мережі.

Перетворимо систему рівнянь (1.43), (1.44) шляхом підстановки виразів (1.45) – (1.47) в (1.43). В результаті отримаємо таку систему рівнянь:

$$\phi_r(q_r, r \in E_2; P_j, j \in L \cup N) = 0, r \in E_2.$$

Ця система рівнянь містить  $e_2 = \text{card}(E_2)$  рівнянь та  $e_2 + l + n$ , де  $l = \text{card}(L)$ ,  $n = \text{card}(N)$  невідомих, тобто. є недовизначеною.

Для розв'язання даної системи необхідно задати  $(e + n)$  граничних умов, тобто. на кожному вході або виході мережі має бути задане значення витрати або тиску. При цьому обов'язкове повинно бути задано хоча б одне значення тиску.

Розв'язання системи рівнянь (1.43), (1.44) з урахуванням виразів (1.45) – (1.47) дає можливість визначити значення витрат у всіх дугах графа мережі, а також значення тисків на всіх входах та виходах мережі. Значення тиску в проміжних вузлах мережі обчислюються після розв'язання системи рівнянь (1.43), (1.44) методом підстановки відповідно до виразу (1.45).

Розглянемо випадок загальної математичної моделі СПР, коли в якості ділянок враховуються не тільки пасивні, а і активні ділянки мережі. Для визначеності розглянемо математичну модель СПР в ВМ з активними елементами.

Математична модель СПР в кільцевих ВМ співпадає з моделлю СПР в ІМ. При цьому послідовна змінна – це витрата води, паралельна – різниця тисків на початку і в кінці відповідної ділянки трубопроводу. Активними елементами ВМ є насосні агрегати, напірні характеристики яких апроксимується поліномом другого ступеня [11, 20].

Будемо розглядати ВМ, реальними ділянками якої є пасивні і активні елементи, тобто  $M = M_p \cup M_a$ , де  $M_p$  – множина дуг, що відповідають пасив-

ним елементам (ділянкам трубопроводу),  $M_a$  – множина дуг, що відповідають активним елементам (насосним агрегатам).

Для пасивних ділянок ВМ існує залежність  $h_i(q_i)$ ,  $i \in M_p$  такого вигляду:

$$h_i(q_i) = P_{iH} - P_{iK} = c_i q_i |q_i|, i \in M_p, \quad (1.48)$$

тобто показник ступеня при значеннях тисків на початку та в кінці ділянки мережі  $\alpha=1$ , коефіцієнт нелінійності кожної ділянки мережі  $\chi=2$ .

Активним елементом ВМ є насосний агрегат. Його напірна характеристика апроксимується поліномом другого ступеня

$$h_i(q_i) = P_{iH} - P_{iK} = \psi_{0i} + \psi_{1i} q_i + \psi_{2i} q_i^2, i \in M_a, \quad (1.49)$$

де  $\psi_{0i}$ ,  $\psi_{1i}$ ,  $\psi_{2i}$  коефіцієнти апроксимації напірних характеристик насосних агрегатів.

Конкретизуємо рівняння моделі СПР для ВМ з активними елементами. Як і для мережі з пасивними елементами, доповнимо реальну мережу нульовою вершиною і фіктивними ділянками, які з'єднують цю вершину з усіма входами і виходами мережі. Отриманий граф містить  $e$  дуг і  $v$  вершин.

Як і раніше, множину  $E$  дуг графа мережі можна представити як  $E = M \cup K$ , де  $M$  – множина дуг графа мережі, що відповідають реальним ділянкам;  $K$  – множина дуг графа мережі, що відповідає фіктивним ділянкам мережі. Але для ВМ з активними елементами  $M = M_p \cup M_a$ , де  $M_p$  – множина дуг графа мережі, що відповідають пасивним елементам;  $M_a$  – множина дуг графа мережі, що відповідають активним елементам. В цьому випадку система рівнянь моделі СПР записується в такому вигляді [11, 20]:

$$f_r = h_r + \sum_{i \in E_1} b_{1ri} h_i = 0, \in E_2, \quad (1.50)$$

$$q_i = \sum_{r \in E_2} b_{1ri} q_r, r \in E_1, \quad (1.51)$$

$$h_i = P_{iH} - P_{iK} = c_i q_i |q_i|, i \in M_p, \quad (1.52)$$

$$h_i = P_{iH} - P_{iK} = \psi_{0i} + \psi_{1i} q_i + \psi_{2i} q_i |q_i| = 0, i \in M_a, \quad (1.53)$$

$$h_i = -P_j, j \in L, \quad (1.54)$$

$$h_j = P_j, j \in N. \quad (1.55)$$

Розв'язання системи рівнянь (1.50), (1.51) з урахуванням виразів (1.52)-(1.55) дозволяє визначити витрати у всіх дугах графа мережі і значення тисків на всіх входах і виходах мережі.

Визначення значень тисків у всіх проміжних вузлах здійснюється після розв'язання системи (1.50), (1.51) методом підстановки відповідно до виразів (1.52), (1.53).

Дана система містить в якості змінних витрати  $q_i, i \in M \cup L \cup N$  та тиску  $P_j, j \in L \cup N$ , тобто є  $m+n+l$  невідомих витрат й  $n+l$  невідомих тисків, де  $m = \text{Card}(M), l = \text{Card}(L), n = \text{Card}(N)$ .

ВМ буде спостерігаючою, якщо можна розв'язати систему рівнянь (1.50), (1.51) [22]. Таким чином, умови спостережливості моделі СПР еквівалентні умовам можливості розв'язання системи рівнянь (1.50), (1.51).

Перетворимо систему рівнянь (1.50), (1.51) шляхом підстановки виразів (1.52) – (1.55) в (1.50). Отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\phi_r(q_r, r \in E_2; P_j, j \in L \cup N) = 0, r \in E_2. \quad (1.56)$$

Система рівнянь (1.56) містить  $e_2 = \text{card}(E_2)$  рівнянь та  $e_2 + l + n$  невідомих, тобто є недовизначеною.

Для забезпечення виконання умов спостережливості моделі СПР в ВМ необхідно задати  $l + n$  граничних умов, тобто на кожному вході або виході ВМ

потрібно задати або значення витрати, або значення тиску, причому хоча б на одному вході або виході ВМ треба задати значення тиску.

### 1.3.2.2 Постановка задачі гідравлічного розрахунку інженерних мереж з пасивними елементами

Розглянемо систему рівнянь математичної моделі СПР в ІМ, які містять тільки пасивні ділянки.

Математична модель для пасивної ділянки ІМ має вигляд:

$$\omega_i(P_{iH}, P_{iK}, q_i) = P_{iH}^\alpha - P_{iK}^\alpha - c_i q_i |q_i|^{\chi_i - 1} = 0, \quad i \in M .. \quad (1.57)$$

Конкретизуємо рівняння моделі СПР (1.43)–(1.47), використовуючи залежності (1.57) для пасивних елементів.

Кожна дуга графа мережі повинна бути віднесена до однієї з трьох множин:  $M, L, N$ .

Виберемо дерево графа мережі таким чином, щоб воно не містило фіктивних дуг, які відповідають виходам мережі. Тоді кожна з множин  $M, L, N$  розіб'ється на дві множини, що відповідають гілкам дерева  $M_1, L_1, N_1$  та хордам  $M_2, L_2, N_2$ . Крім того  $N_1 = \emptyset$ .

У кожному вузлі, що відповідає входу або виходу мережі (дугам множин  $L, N$ ), задається значення тиску або витрати. Завдання цих величин розбиває кожна із множин  $L_1, L_2, N_2$  на дві в залежності від того, чи задана в цих дугах витрата  $L_{11}, L_{21}, N_{21}$  або тиск  $L_{12}, L_{22}, N_{22}$ . Наведений вибір дерева графа мережі, враховуючі залежність (1.57), дозволяють представити математичну модель СПР в ІМ у наступному вигляді[20, 30]:

$$f_r = c_r q_r |q_r|^{\chi_r - 1} + \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri} c_i q_i |q_i|^{\chi_r - 1} = 0, \quad r \in M_2, \quad (1.58)$$

$$f_r = -P_r^\alpha - \sum_{i \in L_{11}} b_{1ri} P_i^\alpha - \sum_{i \in L_{12}} b_{1ri} P_i^{\alpha+} + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} (c_i q_i |q_i|^{\chi_i - 1} + \Delta h_i^\Gamma) = 0, \quad r \in L_{21}, \quad (1.59)$$

$$f_r = -P_r^{\alpha+} - \sum_{i \in L_{11}} b_{1ri} P_i^\alpha - \sum_{i \in L_{12}} b_{1ri} P_i^{\alpha+} + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} (c_i q_i |q_i|^{\chi_i - 1} + \Delta h_i^\Gamma) = 0, \quad r \in L_{22}, \quad (1.60)$$

$$f_r = P_r^\alpha - \sum_{i \in L_{11}} b_{1ri} P_i^\alpha - \sum_{i \in L_{12}} b_{1ri} P_i^{\alpha+} + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} (c_i q_i |q_i|^{\chi_i - 1} + \Delta h_i^\Gamma) = 0, \quad r \in N_{21}, \quad (1.61)$$

$$f_r = P_r^{\alpha+} - \sum_{i \in L_{11}} b_{1ri} P_i^\alpha - \sum_{i \in L_{12}} b_{1ri} P_i^{\alpha+} + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} (c_i q_i |q_i|^{\chi_i - 1} + \Delta h_i^\Gamma) = 0, \quad r \in N_{22}, \quad (1.62)$$

$$f_r = \sum_{\substack{r \in M_2 \cup \\ \cup L_{22} \cup N_{22}}} b_{1ri} q_r + Q_i^+ - q_i^+ = 0, \quad i \in L_{11}, \quad (1.63)$$

$$q_i = \sum_{\substack{r \in M_2 \cup \\ \cup L_{22} \cup N_{22}}} b_{1ri} q_r + Q_i^+, \quad i \in L_{12} \cup M_1, \quad (1.64)$$

де

$$Q_i^+ = \sum_{r \in L_{21} \cup N_{21}} b_{1ri} q_r^+ = 0, \quad i \in L_{11} \cup L_{12} \cup M_1. \quad (1.65)$$

Знаком «+» відмічені задані величини. Тут  $\Delta h_r^\Gamma$  – різниця геодезичних відміток початку та кінця  $i$ -ї ділянки трубопроводу. Крім того, береться до уваги той факт, що для будь-якого замкнутого циклу, який містить реальні ділянки, виконується співвідношення:

$$\Delta h_r^\Gamma + \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri} h_r^\Gamma = 0, r \in M_2. \quad (1.66)$$

Для ГМ величина втрати напору на ділянці трубопроводу унаслідок різних геодезичних рівнів початку і кінця ділянки мала в порівнянні з тиском, що має місце в мережі, тому цієї величиною можна нехтувати.

Система рівнянь (1.58) – (1.65) містить  $Card(M_2) + Card(L_2) + Card(N_2)$  рівнянь за другим законом Кірхгофа та  $Card(M_1) + Card(L_1)$  рівнянь за першим, і стільки ж змінних витрат та тисків. Витрати в гілках дерева  $q_i, i \in M_1 \cup L_{12}$  є залежними, вони визначаються з рівнянь (1.64), які враховуються при розв'язку як рівняння зв'язку. Для визначення невідомих витрат  $q_j, j \in M_2 \cup L_{22} \cup N_{22}$  та тисків  $P_i, i \in L_{11}$  необхідно розв'язати систему рівнянь (1.58), (1.60), (1.62), (1.63). Значення тисків  $P_r, r \in L_{21} \cup N_{21}$  визначаються із виразів (1.59), (1.61) шляхом підстановки в ці рівняння раніше знайдених значень витрат  $q_j, j \in M_2 \cup L_{22} \cup N_{22}$  та тисків  $P_i, i \in L_{11}$ .

### 1.3.2.3 Постановка задачі гідравлічного розрахунку інженерних мереж з активними елементами

Будемо розглядати задачу гідравлічного розрахунку ІМ з активними елементами на прикладі ВМ з активними елементами [11, 14, 20].

Будемо використовувати рівняння моделі СПР (1.50) – (1.55), застосовуючи залежності (1.48), (1.49) для пасивних та активних елементів ВМ.

На відміну від ІМ з пасивними елементами, для ВМ з активними елементами множину реальних ділянок мережі можна записати в такому вигляді:  $M = M_p \cup M_a$ , де  $M_p$  – множина дуг графа мережі, що відповідають пасивним елементам;  $M_a$  – множина дуг графа мережі, що відповідають активним елементам.

Дерево графа мережі будується так, щоб воно не містило фіктивних дуг, які відповідають виходам мережі. Тоді кожна з множин  $M, L, N$  розіб'ється на дві множини, що відповідають гілкам дерева  $M_1 = M_{p1} \cup M_{a1}, L_1, N_1$ , до того ж  $N_1 = \emptyset$ , та хордам  $M_2 = M_{p2} \cup M_{a2}, L_2, N_2$ .

Як і раніше у випадку ІМ з пасивними елементами, у кожному вузлі, що відповідає входу або виходу мережі (дугам множин  $L, N$ ), задається значення тиску або витрати. Завдання цих величин розбиває кожна із множин  $L_1, L_2, N_2$  на дві в залежності від того задана в цих дугах витрата  $L_{11}, L_{21}, N_{21}$  або тиск  $L_{12}, L_{22}, N_{22}$ . Такий вибір дерева графа мережі дозволяє представити математичну модель СПР в ВМ мережах з активними елементами в такому вигляді:

$$f_r = c_r q_r |q_r| + \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri} c_i q_i |q_i| + \sum_{i \in M_{a1}} b_{1ri} (\psi_{1i} + \psi_{2i} q_i + \psi_{3i} q_i |q_i|) = 0, r \in M_{p2}, \quad (1.67)$$

$$f_r = \psi_{1r} + \psi_{2r} q_r + \psi_{3r} q_r |q_r| + \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri} c_i q_i |q_i| + \sum_{i \in M_{a1}} b_{1ri} (\psi_{1i} + \psi_{2i} q_i + \psi_{3i} q_i |q_i|) = 0, r \in M_{a2}, \quad (1.68)$$

$$f_r = -P_r - \sum_{i \in L_{11}} b_{1ri} P_i - \sum_{i \in L_{12}} b_{1ri} P_i^+ + \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri} (c_i q_i |q_i| + \Delta h_i^{\Gamma}) + \sum_{i \in M_{a1}} b_{1ri} (\psi_{1i} + \psi_{2i} q_i + \psi_{3i} q_i |q_i|) = 0, r \in L_{21}, \quad (1.69)$$

$$f_r = -P_r^+ - \sum_{i \in L_{11}} b_{1ri} P_i - \sum_{i \in L_{12}} b_{1ri} P_i^+ + \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri} (c_i q_i |q_i| + \Delta h_i^{\Gamma}) + \sum_{i \in M_{a1}} b_{1ri} (\psi_{1i} + \psi_{2i} q_i + \psi_{3i} q_i |q_i|) = 0, r \in L_{22}, \quad (1.70)$$

$$f_r = P_r - \sum_{i \in L_{11}} b_{1ri} P_i - \sum_{i \in L_{12}} b_{1ri} P_i^+ + \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri} (c_i q_i |q_i| + \Delta h_i^{\Gamma}) + \sum_{i \in M_{a1}} b_{1ri} (\psi_{1i} + \psi_{2i} q_i + \psi_{3i} q_i |q_i|) = 0, r \in N_{21}, \quad (1.71)$$

$$f_r = P_r^+ - \sum_{i \in L_{11}} b_{1ri} P_i - \sum_{i \in L_{12}} b_{1ri} P_i^+ + \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri} (c_i q_i |q_i| + \Delta h_i^\Gamma) + \sum_{i \in M_{a1}} b_{1ri} (\psi_{1i} + \psi_{2i} q_i + \psi_{3i} q_i |q_i|) = 0, r \in N_{22}, \quad (1.72)$$

$$f_r = \sum_{r \in M_{p2} \cup M_{a2} \cup L_{22} \cup N_{22}} b_{1ri} q_r + Q_i^+ - q_i^+ = 0, i \in L_{11}, \quad (1.73)$$

$$q_i = \sum_{r \in M_{p2} \cup M_{a2} \cup L_{22} \cup N_{22}} b_{1ri} q_r + Q_i^+, i \in L_{12} \cup M_1, \quad (1.74)$$

де

$$Q_i^+ = \sum_{r \in L_{21} \cup N_{21}} b_{1ri} q_r^+ = 0, i \in L_{11} \cup L_{12} \cup M_1. \quad (1.75)$$

Для ВМ величина втрати напору на ділянці трубопроводу унаслідок різних геодезичних відміток початку і кінця ділянки досить велика в порівнянні з тиском, що має місце в мережі, тому цю величину треба враховувати при розрахунках режимів СПР у ВМ.

У виразах (1.67), (1.68) величини  $\Delta h_r^\Gamma$ ,  $r \in M_2$  не враховуються, тому що виконується співвідношення:

$$\Delta h_r^\Gamma + \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri} h_r^\Gamma = 0, r \in M_2. \quad (1.76)$$

Система рівнянь (1.67) – (1.74) містить  $Card(M_2) + Card(L_2) + Card(N_2)$  рівнянь за другим законом Кірхгофа та  $Card(M_1) + Card(L_1)$  рівнянь за першим, і стільки ж змінних витрат та тисків. Витрати у гілках дерева є залежними, вони визначаються з рівнянь (1.74), які враховуються при розв'язку як рівняння зв'язку. Для визначення невідомих витрат  $q_j$ ,  $j \in M_{p2} \cup M_{a2} \cup L_{22} \cup N_{22}$

та тисків  $P_i, i \in L_{11}$  необхідно розв'язати систему рівнянь (1.67), (1.68), (1.70), (1.72), (1.73). Значення тисків  $P_r, r \in L_{21} \cup N_{21}$  визначаються із виразів (1.69), (1.71) шляхом підстановки в ці рівняння раніше знайдених значень витрат  $q_j, j \in M_{p2} \cup M_{a2} \cup L_{22} \cup N_{22}$  та тисків  $P_i, i \in L_{11}$ .

Особливої уваги заслуговує окремий випадок задачі гідравлічного розрахунку ВМ з активними елементами, коли, як граничні умови, використовуються значення тисків на всіх входах та виходах мережі. Такий випадок виникає при гідравлічному розрахунку насосної станції.

Тоді  $L_{11} = \emptyset; N_{21} = \emptyset; L_{21} = \emptyset$ . Крім того, до гілок дерева, які відповідають тільки входам мережі, віднесемо лише один вхід, позначимо його як 1, тобто  $L_{12} = \{1\}$ . Тоді рівняння моделі СПР (1.67)–(1.74) зведеться до наступного вигляду [11]:

$$f_r = c_r q_r |q_r| + \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri} c_i q_i |q_i| + \sum_{i \in M_{a1}} b_{1ri} (\psi_{1i} + \psi_{2i} q_i + \psi_{3i} q_i |q_i|) = 0, r \in M_{p2} \quad (1.77)$$

$$f_r = \psi_{1r} + \psi_{2r} q_r + \psi_{3r} q_r |q_r| + \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri} c_i q_i |q_i| + \sum_{i \in M_{a1}} b_{1ri} (\psi_{1i} + \psi_{2i} q_i + \psi_{3i} q_i |q_i|) = 0, r \in M_{a2}, \quad (1.78)$$

$$f_r = -P_r^+ + P_1^+ + \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri} (c_i q_i |q_i| + \Delta h_i^r) + \sum_{i \in M_{a1}} b_{1ri} (\psi_{1i} + \psi_{2i} q_i + \psi_{3i} q_i |q_i|) = 0, r \in L_{22}, \quad (1.79)$$

$$f_r = P_r^+ - P_1^+ + \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri} (c_i q_i |q_i| + \Delta h_i^r) + \sum_{i \in M_{a1}} b_{1ri} (\psi_{1i} + \psi_{2i} q_i + \psi_{3i} q_i |q_i|) = 0, r \in N_{22}, \quad (1.80)$$

$$q_i = \sum_{r \in M_{p2} \cup M_{a2} \cup L_{22} \cup N_{22}} b_{1ri} q_r = 0, i \in M_{p1} \cup M_{a1} \cup L_{12}. \quad (1.81)$$

Розв'язок нелінійної системи рівнянь (1.77) – (1.80), з урахуванням рівняння зв'язку (1.81), дозволяє отримати значення витрат  $q_r, r \in M_{p2} \cup M_{a2} \cup L_{22} \cup N_{22}$ , які обчислюються з використанням рівняння зв'язку (1.81), яке відображає перший закон Кірхгофа.

Таким чином, задача гідравлічного розрахунку ВМ з активними елементами в такій постановці зводиться до розв'язку системи нелінійних рівнянь вигляду [11]:

$$f_r \{q_r\} = 0, r \in M_{p2} \cup M_{a2} \cup L_{22} \cup N_{22}. \quad (1.82)$$

#### 1.3.2.4 Математична постановка задачі розрахунку режиму сталого

потокорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності

Постановка задачі розрахунку режиму СПР в умовах невизначеності розглядається для ІМ з пасивними елементами. Математична модель СПР для цього класу ІМ записана у вигляді системи нелінійних рівнянь (1.58) – (1.65).

Перетворимо початкову систему рівнянь (1.58) – (1.65) таким чином. Для визначеності будемо вважати, що гілками дерева є дуги, які відповідають реальним ділянкам мережі, і одна дуга, що відповідає входу мережі із заданим тиском. Присвоїмо їй номер 1. У цьому випадку множини  $L_{11} = \emptyset$ ,  $L_{12} = \{1\}$ , а система рівнянь (1.58) – (1.65) набуває вигляду:

$$f_r = c_r q_r |q_r|^{a_r - 1} + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} c_i q_i |q_i|^{a_i - 1} = 0, r \in M_2, \quad (1.83)$$

$$f_r = P_1^\alpha - P_r^\alpha + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} (c_i q_i |q_i|^{a_i - 1} + \Delta h_i^{(r)}) = 0, r \in L_{22}, \quad (1.84)$$

$$f_r = P_r^\alpha - P_1^\alpha + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} (c_i q_i |q_i|^{a_i - 1} + \Delta h_i^{(r)}) = 0, r \in N_{22}, \quad (1.85)$$

$$f_r = P_1^\alpha - P_r^\alpha + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} (c_i q_i |q_i|^{\alpha_i - 1} + \Delta h_i^{(r)}) = 0, r \in L_{21}, \quad (1.86)$$

$$f_r = P_r^\alpha - P_1^\alpha + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} (c_i q_i |q_i|^{\alpha_i - 1} + \Delta h_i^{(r)}) = 0, r \in N_{21}, \quad (1.87)$$

$$q_i = \sum_{r \in M_2 \cup L_{22} \cup N_{22}} b_{1ri} q_r + \sum_{r \in L_{21} \cup N_{21}} b_{1ri} q_r, i \in M_1 \cup L_{12}. \quad (1.88)$$

Для системи рівнянь (1.83) – (1.87) з урахуванням рівнянь (1.88) незалежними змінними є витрати  $q_1$ ,  $i \in L_{21} \cup N_{21}$  і тиски  $P_1$ ,  $P_j$ ,  $j \in L_{22} \cup N_{22}$  а залежними – витрати  $q_r$ ,  $r \in M_2 \cup L_{22} \cup N_{22}$  і тиски  $P_r$ ,  $r \in L_{21} \cup N_{21}$ . Витрати у хордах  $q_r$ ,  $r \in M_2 \cup L_{22} \cup N_{22}$  визначаються в результаті розв'язання системи рівнянь (1.83) – (1.85) з урахуванням рівнянь зв'язку (1.88), а тиски  $P_r$ ,  $r \in L_{21} \cup N_{21}$  – рівняннями (1.86), (1.87).

Нехай відомі математичні сподівання тисків  $P_1^0$ ,  $P_j^0$ ,  $j \in L_{22} \cup N_{22}$  і витрат  $q_i^0$ ,  $i \in L_{21} \cup N_{21}$  на входах та виходах мережі, а також їх дисперсії  $\sigma_{P_1}^2$ ,  $\sigma_{P_j}^2$ ,  $j \in L_{22} \cup N_{22}$ ;  $\sigma_{q_i}^2$ ,  $i \in L_{21} \cup N_{21}$ .

Значення тисків та витрат, що вимірюються, можна представити у вигляді

$$P_1 = P_1^0 + \Delta P_1;$$

$$P_j = P_j^0 + \Delta P_j, j \in L_{22} \cup N_{22};$$

$$q_i = q_i^0 + \Delta q_i, i \in L_{21} \cup N_{21},$$

де  $\Delta P_1$ ;  $\Delta P_j$ ,  $j \in L_{22} \cup N_{22}$ ;  $\Delta q_i$ ,  $i \in L_{21} \cup N_{21}$  – помилки вимірювань відповідних тисків та витрат на входах та виходах мережі, що є випадковими величинами з нульовими математичними сподіваннями і відомими дисперсіями  $\sigma_{P_1}^2$ ,  $\sigma_{P_j}^2$ ,  $j \in L_{22} \cup N_{22}$ ;  $\sigma_{q_i}^2$ ,  $i \in L_{21} \cup N_{21}$ .

Потрібно отримати оцінки математичних сподівань тисків  $P_j^0$ ,  $j \in L_{21} \cup N_{21}$  та витрат  $q_i^0$ ,  $i \in L_{22} \cup N_{22}$  на входах та виходах мережі і оцінки дисперсій  $\sigma_{P_j}^2$ ,  $j \in L_{21} \cup N_{21}$ ;  $\sigma_{q_i}^2$ ,  $i \in L_{22} \cup N_{22}$ .

Оцінки математичних сподівань залежних змінних можна отримати в результаті розв'язання задачі гідравлічного розрахунку ІМ, а оцінки дисперсій – з використанням лінеаризованих рівнянь моделі СПР (1.83) – (1.88) [32,33].

Тиски  $P_r$ ,  $r \in L_{21} \cup N_{21}$  є складними функціями від  $P_1$ ,  $P_j$ ,  $j \in L_{22} \cup N_{22}$ ,  $q_j$ ,  $j \in L_{21} \cup N_{21}$ , тобто

$$P_r = P_r(P_1; P_j, j \in L_{22} \cup N_{22}; q_j, j \in L_{21} \cup N_{21}), r \in L_{21} \cup N_{21}. \quad (1.89)$$

Розкладемо функцію (1.89) у ряд Тейлора в околі точки  $P_1^\circ$ ,  $P_j^\circ$ ,  $j \in L_{22} \cup N_{22}$ ,  $q_j^\circ$ ,  $j \in L_{21} \cup N_{21}$ , яка відповідає режиму СПР. Обмежувачись лінійними членами розкладу, отримаємо

$$P_r = P_r(P_1^0; P_j^0, j \in L_{22} \cup N_{22}; q_j^0, j \in L_{21} \cup N_{21}) + \left( \frac{\partial P_r}{\partial P_1} \right)^\circ \Delta P_1 + \\ + \sum_{j \in L_{22} \cup N_{22}} \left( \frac{\partial P_r}{\partial P_j} \right)^\circ \Delta P_j + \sum_{j \in L_{21} \cup N_{21}} \left( \frac{\partial P_r}{\partial q_j} \right)^\circ \Delta q_j, r \in L_{21} \cup N_{21}, \quad (1.90)$$

де  $\Delta P_1 = P_1 - P_1^\circ$ ,

$\Delta P_j = P_j - P_j^\circ$ ,  $j \in L_{22} \cup N_{22}$ ,

$\Delta q_j = q_j - q_j^\circ$ ,  $j \in L_{21} \cup N_{21}$ .

Похідні у формулі (1.90) обчислюються в точці розкладу.

Отримаємо оцінки математичних сподівань тисків на входах і виходах мережі:

$$P_r^0 = P_r(P_1^0; P_j^0, j \in L_{22} \cup N_{22}; q_j^0, j \in L_{21} \cup N_{21}), r \in L_{21} \cup N_{21} \quad (1.91)$$

Враховуючи, що  $M[\Delta P_1] = 0$ ;  $M[\Delta P_j] = 0$ ,  $j \in L_{22} \cup N_{22}$ ;  $M[\Delta q_i] = 0$ ,  $i \in L_{21} \cup N_{21}$ , маємо  $\sigma_{\Delta P_1}^2 = \sigma_{P_1}^2$ ;  $\sigma_{\Delta P_j}^2 = \sigma_{P_j}^2$ ,  $j \in L_{22} \cup N_{22}$ ;  $\sigma_{\Delta q_i}^2 = \sigma_{q_i}^2$ ,  $i \in L_{21} \cup N_{21}$ .

За умови, що помилки вимірювань незалежні, отримаємо вираз для оцінки дисперсії тисків  $P_r, r \in L_{21} \cup N_{21}$  [34]:

$$\begin{aligned} \sigma_{P_r}^2 = & \left( \frac{\partial P_r}{\partial P_1} \right)^{02} \sigma_{P_1}^2 + \sum_{j \in L_{22} \cup N_{22}} \left( \frac{\partial P_r}{\partial P_j} \right)^{02} \sigma_{P_j}^2 + \\ & + \sum_{j \in L_{21} \cup N_{21}} \left( \frac{\partial P_r}{\partial q_j} \right)^{02} \sigma_{q_j}^2, r \in L_{21} \cup N_{21}, \end{aligned} \quad (1.92)$$

Витрати  $q_r, r \in L_{22} \cup N_{22}$  на входах та виходах мережі також є неявними функціями  $q_r, r \in L_{21} \cup N_{21}, P_1, P_r, r \in L_{22} \cup N_{22}$ :

$$q_r = q_r(P_1; P_j, j \in L_{22} \cup N_{22}; q_j, j \in L_{21} \cup N_{21}), r \in L_{22} \cup N_{22}. \quad (1.93)$$

Аналогічно попередньому випадку, отримаємо оцінки математичних сподівань витрат  $q_r, r \in L_{22} \cup N_{22}$  на входах і виходах мережі:

$$q_r^0 = q_r(P_1^0; P_j^0, j \in L_{22} \cup N_{22}; q_j^0, j \in L_{21} \cup N_{21}), r \in L_{22} \cup N_{22}. \quad (1.94)$$

Вираз для оцінки дисперсії витрат  $q_r, r \in L_{22} \cup N_{22}$  має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{q_r}^2 = & \left( \frac{\partial q_r}{\partial P_1} \right)^{02} \sigma_{P_1}^2 + \sum_{j \in L_{22} \cup N_{22}} \left( \frac{\partial q_r}{\partial P_j} \right)^{02} \sigma_{P_j}^2 + \\ & + \sum_{j \in L_{21} \cup N_{21}} \left( \frac{\partial q_r}{\partial q_j} \right)^{02} \sigma_{q_j}^2, r \in L_{22} \cup N_{22}. \end{aligned} \quad (1.95)$$

#### 1.4 Постановка задач дослідження

Виходячи з проведеного аналізу предметної області, можна дійти висновку про необхідність застосування для розв'язання задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності чисельних методів розв'язання систем нелінійних рівнянь та лінеаризованих рівнянь моделі сталого поточкорозподілу.

Метою кваліфікаційної роботи є застосування лінеаризованих моделей сталого поточкорозподілу для розв'язання задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання:

- провести огляд і аналіз математичних моделей та методів розрахунку режимів сталого поточкорозподілу в інженерних мережах;
- навести змістовну та математичну постановку задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності;
- застосувати лінеаризовану модель сталого поточкорозподілу для розв'язання задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності;
- розробити алгоритм розв'язання задачі гідравлічного розрахунку інженерних мереж з метою оцінювання математичних сподівань режимних параметрів на входах и виходах мережі;
- розробити алгоритм розрахунку оцінок дисперсій режимних параметрів на входах и виходах інженерної мережі з використанням лінеаризованих рів-

нянь моделі сталого поточкорозподілу;

- виконати програмну реалізацію розроблених алгоритмів;
- провести обчислювальний експеримент та проаналізувати його результат, показвши працездатність запропонованих алгоритмів на прикладі розрахунку ділянки інженерної мережі.

## 2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ РОЗРАХУНКУ РЕЖИМУ СТАЛОГО ПОТОКОРОЗПОДІЛУ В ІНЖЕНЕРНИХ МЕРЕЖАХ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

### 2.1 Застосування методу Ньютона для розв'язання задачі

розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах

Задачі розрахунку режиму СПР в ІМ використовується для оцінювання математичних сподівань режимних параметрів на входах и виходах мережі

Розглянемо метод розв'язання задачі розрахунку режиму СПР в ІМ на прикладі ВМ з активними елементами, математична постановка якої записана у вигляді системи нелінійних рівнянь (1.77) – (1.81).

Для розв'язку системи нелінійних рівнянь (1.82) застосуємо метод Ньютона, основне співвідношення для якого має такий вигляд [23,24]:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - (W(\bar{x})^{(k)})^{-1} \bar{f}(\bar{x}^{(k)}), \quad (2.1)$$

де  $k$  – номер ітерації;

$W(\bar{x})^{(k)}$  – матриця Якобі, визначена в поточній точці  $\bar{x}^{(k)}$ ;

$\bar{x}^{(k)}$  – вектор змінних на  $k$ -ої ітерації;

$\bar{f}(\bar{x}^{(k)})$  – значення вектор-функції  $\bar{f}(\bar{x})$  в поточній точці  $\bar{x}^{(k)}$ .

Для задачі (1.82) основне співвідношення метода Ньютона можна записати в такому вигляді:

$$\bar{q}_r^{(n+1)} = \bar{q}^{(n)} - (W(\bar{q}^{(n)}))^{-1} \bar{f}(\bar{q}^{(n)}), \quad (2.2)$$

де

$$\bar{q} = \{q_r, r \in M_{p2} \cup M_{a2} \cup L_{22} \cup N_{22}\},$$

$$\bar{f}(\bar{q}^k) = \{f, r \in M_{p2} \cup M_{a2} \cup L_{22} \cup N_{22}\}.$$

Елементи вектору  $\bar{f}(\bar{q}^k)$  обчислюються відповідно до виразів (1.77) – (1.80).

Елементи матриці Якобі  $W(\bar{q})$  обчислюються за такими формулами:

$$\frac{\partial f_r}{\partial q_r} = 2c_r |q_2| + 2 \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri}^2 c_i |q_i| +$$

$$+ \sum_{i \in M_{a1}} b_{1ri}^2 (\psi_{2i} + 2\psi_{3i} |q_i|), r \in M_{p2}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial f_r}{\partial q_r} = \psi_{2r} + 2\psi_{3r} |q_r| +$$

$$+ 2 \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri}^2 c_i |q_i| + \sum_{i \in M_{a1}} b_{1ri}^2 (\psi_{2i} + 2\psi_{3i} |q_i|), r \in M_{a2}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial f_r}{\partial q_k} = \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri} b_{1ki} c_i |q_i| + \sum_{i \in M_{a1}} b_{1ri}^2 (\psi_{2i} + 2\psi_{3i} |q_i|),$$

$$r \in M_{p2} \cup M_{a2} \cup L_{22} \cup N_{22},$$

$$k \in M_{p2} \cup M_{a2} \cup L_{22} \cup N_{22}, r \neq k, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial f_r}{\partial q_r} = 2 \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri}^2 c_i |q_i| + \sum_{i \in M_{a1}} b_{1ri}^2 (\psi_{2i} + 2\psi_{3i} |q_i|), L_{22} \cup N_{22}. \quad (2.6)$$

## 2.2 Застосування лінеаризованих рівнянь моделі сталого поточкорозподілу для розрахунку оцінок дисперсій режимних параметрів

Розглянемо порядок обчислення похідних  $\frac{\partial P_r}{\partial P_1}$ ,  $\frac{\partial P_r}{\partial P_j}$ ,  $j \in L_{22} \cup N_{22}$ ;  $\frac{\partial P_r}{\partial q_j}$ ,

$j \in L_{21} \cup N_{21}$  у формулі (1.90) [32].

Щоб обчислити похідні подамо значення тисків  $P_r$ ,  $r \in L_{21} \cup N_{21}$ , з рівнянь (1.86), (1.87) у такому вигляді:

$$P_r^\alpha = P_1^\alpha + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} (c_i q_i |q_i|^{\alpha_1 - 1} + \Delta h_i^{(r)}), r \in L_{21}, \quad (2.7)$$

$$P_r^\alpha = P_1^\alpha - \sum_{i \in M_1} b_{1ri} (c_i q_i |q_i|^{\alpha_1 - 1} + \Delta h_i^{(r)}), r \in N_{21}. \quad (2.8)$$

Знайдемо значення похідних  $\frac{\partial P_r}{\partial P_1}$ ,  $\frac{\partial P_r}{\partial P_j}$ ,  $j \in L_{22} \cup N_{22}$ ,  $\frac{\partial P_r}{\partial q_j}$ ,  $j \in L_{21} \cup N_{21}$

для  $P_r$ ,  $r \in L_{21}$ . З цією метою подамо вираз (2.7) у такому вигляді:

$$P_r = \left[ P_1^\alpha + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} (c_i q_i |q_i|^{\alpha_1 - 1} + \Delta h_i^{(r)}) \right]^{\frac{1}{\alpha}}, r \in L_{21}. \quad (2.9)$$

Тоді похідні за відповідними змінними будуть рівні:

$$\frac{\partial P_r}{\partial P_1} = A (\alpha P_1^{\alpha - 1} + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} c_i \alpha_i |q_i|^{\alpha_1 - 1} \frac{\partial q_i}{\partial P_1}), \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial P_r}{\partial P_1} = A \sum_{i \in M_1} b_{1ri} c_i \alpha_i |q_i|^{\alpha_1 - 1} \frac{\partial q_i}{\partial P_j}, j \in L_{22} \cup N_{22}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial P_r}{\partial q_1} = A \sum_{i \in M_1} b_{1ri} c_i \alpha_i |q_i|^{\alpha_1 - 1} \frac{\partial q_i}{\partial q_j}, j \in L_{21} \cup N_{21}, \quad (2.12)$$

де

$$A = \frac{1}{\alpha} \left[ P_1^\alpha + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} (b_i q_i |q_i|^{\alpha_1 - 1} + \Delta h_i^{(r)}) \right]^{\frac{1 - \alpha}{\alpha}}, \quad (2.13)$$

Щоб отримати часткові похідні  $\frac{\partial q_i}{\partial P_1}$ ,  $\frac{\partial q_i}{\partial P_j}$ ,  $j \in L_{22} \cup N_{22}$ ,  $\frac{\partial q_i}{\partial q_j}$ ,

$j \in L_{21} \cup N_{21}$  скористаємося виразом (1.88):

$$\frac{\partial q_i}{\partial P_1} = \sum_{r \in M_2 \cup L_{22} \cup N_{22}} b_{1ri} \frac{\partial q_r}{\partial P_1}, i \in M_1, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial P_j} = \sum_{r \in M_2 \cup L_{22} \cup N_{22}} b_{1ri} \frac{\partial q_r}{\partial P_j}, i \in M_1, j \in L_{22} \cup N_{22}, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial P_j} = b_{1ji} \sum_{r \in M_2 \cup L_{22} \cup N_{22}} b_{1ri} \frac{\partial q_r}{\partial q_j}, i \in M_1, j \in L_{21} \cup N_{21}, \quad (2.16)$$

Витрати в хордах  $q_r$ ,  $r \in M_2 \cup L_{22} \cup N_{22}$  є неявними функціями  $P_1$ ,  $P_j$ ,  $j \in L_{22} \cup N_{22}$ ,  $q_j$ ,  $j \in L_{21} \cup N_{21}$ . Щоб отримати вирази для похідних  $\frac{\partial q_r}{\partial P_1}$ ,  $\frac{\partial q_r}{\partial P_j}$ ,

$j \in L_{22} \cup N_{22}$ ,  $\frac{\partial q_r}{\partial q_j}$ ,  $j \in L_{21} \cup N_{21}$ , скористаємося теоремою ІУ для системи неявних функцій [35].

Подано систему рівнянь (1.83)–(1.85) у такому вигляді:

$$\begin{aligned} F_1(qr, r \in M_2 \cup L_{22} \cup N_{22}, qt \in L_{21} \cup N_{21}, P_1; P_r, r \in L_{22} \cup N_{22}) &= 0, \\ &\vdots \\ F_m(qr, r \in M_2 \cup L_{22} \cup N_{22}, qt \in L_{21} \cup N_{21}, P_1, P_r, r \in L_{22} \cup N_{22}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Введемо такі позначення:

$$Y_i \equiv q_r, r \in M_2 \cup L_{22} \cup N_{22}, i = 1, \dots, n_1,$$

$$X_i \equiv qt, t \in L_{21} \cup N_{21}, i = 1, \dots, n_2,$$

$$X_i \equiv P_1, i = n_2 + 1,$$

$$X_i \equiv P_r, r \in L_{22} \cup N_{22}, i = n_2 + 2, \dots, n_4.$$

Тут

$$\begin{aligned} n_1 &= \text{Card}(M_2 \cup L_{22} \cup N_{22}), \\ n_2 &= \text{Card}(L_{21} \cup N_{21}), \\ n_3 &= \text{Card}(L_{22} \cup N_{22}), \\ n_4 &= n_2 + n_3 + 1. \end{aligned}$$

Отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} F_1(Y_1, \dots, Y_{n_1}, X_1, X_2, \dots, X_{n_4}) = 0, \\ F_2(Y_1, \dots, Y_{n_1}, X_1, X_2, \dots, X_{n_4}) = 0, \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ F_{n_1}(Y_1, \dots, Y_{n_1}, X_1, X_2, \dots, X_{n_4}) = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Ця система визначає  $n_1$  змінних  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_1}$  як неявні функції  $X_1, X_2, \dots, X_{n_4}$ . Враховуючи, що система рівнянь (2.18) має єдиний розв'язок відносно  $q_r$ ,  $r \in M_2 \cup L_{22} \cup N_{22}$  при заданих значеннях  $q_r$ ,  $r \in L_{21} \cup N_{21}$ ,  $P_1$ ,  $P_r$ ,  $r \in L_{22} \cup N_{22}$ , а в околі отриманого розв'язку виконуються умови теореми ІУ, то вирази для часткових похідних мають вигляд:

$$\frac{\partial Y_j}{\partial X_k} = - \frac{\frac{D(F_1, \dots, F_{n_1})}{D(Y_1, \dots, Y_{j-1}, X_k, \dots, Y_{n_1})}}{\frac{D(F_1, \dots, F_{n_1})}{D(Y_1, \dots, Y_{n_1})}}, \quad (2.19)$$

де  $\frac{D(F_1, \dots, F_{n_1})}{D(Y_1, \dots, Y_{n_1})}$  – яacobіан функцій, що стоять у лівих частинах системи рівнянь

(2.18) за змінними  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_1}$ .

Елементи матриці Якобі обчислюються відповідно до таких виразів:

$$\frac{\partial F_r}{\partial q_r} = c_r a_r |q_r|^{a_r-1} + \sum_{i \in M_1} b_{1ri}^2 c_i a_i |q_i|^{a_i-1}, r \in M_2, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial q_k} = \sum_{i \in M_1} a_i b_{1ri} b_{1ki} c_i |q_i|^{a_i-1}, \quad (2.21)$$

$$r \in M_2 \cup L_{22} \cup N_{22}, k \in M_2 \cup L_{22} \cup N_{22}.$$

Значення похідних  $\frac{\partial F_r}{\partial X_k}$  визначаються таким чином:

$$\frac{\partial F_r}{\partial q_t} = \sum_{i \in M_1} a_i b_{1ri} b_{1ti} c_i |q_i|^{a_i-1}, \quad (2.22)$$

$$r \in M_2 \cup L_{22} \cup N_{22}, t \in L_{21} \cup N_{21},$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial P_1} = 0, r \in M_2, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial P_1} = \alpha P_1^{\alpha-1}, r \in L_{22}, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial P_1} = -\alpha P_1^{\alpha-1}, r \in N_{22}, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial P_k} = 0, r \in M_2, k \in L_{22} \cup N_{22}, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial P_r} = -\alpha P_r^{\alpha-1}, r \in L_{22}, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial P_r} = \alpha P_r^{\alpha-1}, r \in N_{22}, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial P_k} = 0, r \in L_{22} \cup N_{22}, k \in L_{22} \cup N_{22}. \quad (2.29)$$

Значення похідних  $\frac{\partial P_r}{\partial P_1}$ ,  $\frac{\partial P_r}{\partial P_j}$ ,  $j \in L_{22} \cup N_{22}$ ,  $\frac{\partial P_r}{\partial q_j}$ ,  $j \in L_{21} \cup N_{21}$  для  $P_r$ ,

$r \in N_{21}$  визначаються аналогічно з використанням виразу (2.8).

Порядок обчислення похідних  $\frac{\partial q_r}{\partial P_1}$ ;  $\frac{\partial q_r}{\partial P_j}$ ,  $j \in L_{22} \cup N_{22}$ ;  $\frac{\partial q_r}{\partial q_j}$ ,

$j \in L_{21} \cup N_{21}$ , якщо  $r \in L_{22} \cup N_{22}$ , для виразу (1.95) було розглянуто вище.

## Висновки за розділом 2

У цьому розділі розглянуто метод розв'язання задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності, наведено всі розрахункові формули.

Для оцінювання математичних сподівань режимних параметрів на входах и виходах мережі використовується задача розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах або, що теж саме, задача гідравлічного розрахунку інженерних мереж. Для розв'язання вказаної задачі розглянуто застосування методу Ньютона розв'язання систем нелінійних рівнянь.

Для розрахунку оцінок дисперсій режимних параметрів на входах і виходах мережі застосовується лінеаризація рівнянь моделі сталого поточкорозподілу. Залежні змінні моделі сталого поточкорозподілу розглядаються як лінійні залежності від незалежних змінних, що дає можливість обчислити дисперсії залежних змінних при завданні дисперсій незалежних змінних.

## 3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

### 3.1 Python як мова програмної реалізації

Для реалізації програмного продукту було обрано мову програмування Python. Це високорівнева мова загального призначення, яка поєднує в собі лаконічність синтаксису та потужні функціональні можливості. Згідно з офіційною документацією, Python є інтерпретованою мовою, яка підтримує об'єктно-орієнтований, функціональний та процедурний підходи до програмування. Ключовою особливістю мови є її дизайн, орієнтований на читабельність коду та підвищення продуктивності розробника завдяки зменшенню обсягу необхідного коду порівняно з компільованими мовами, такими як C++ або Java [36].

Важливим аспектом функціонування Python є його об'єктна модель. Усе в Python є об'єктом, що забезпечує гнучкість при роботі з різними типами даних. Стандартна реалізація мови (CPython) використовує автоматичне керування пам'яттю [37]. Механізм базується на підрахунку посилань (reference counting) у поєднанні з циклічним збирачем сміття (Garbage Collector), що дозволяє ефективно вивільняти ресурси без прямого втручання програміста. Така архітектура дозволяє розробнику зосередитися на реалізації бізнес-логіки, а не на низькорівневих операціях з пам'яттю.

Однією з головних переваг Python є низький поріг входження та інтуїтивно зрозумілий синтаксис. Структура мови дозволяє швидко опанувати базові алгоритмічні конструкції, що робить її ефективним інструментом як для прототипування, так і для створення повноцінних комерційних продуктів [38].

Водночас, простота Python є оманливою. Мова вимагає суворої дисципліни у форматуванні коду. Унікальною рисою синтаксису Python є використання відступів (індентації) для визначення блоків коду замість фігурних дужок або ключових слів begin/end. Це примушує дотримуватися єдиного стилю написання, що значно полегшує підтримку та читання коду іншими розробниками [39].

Ефективність та Pythonic way Python володіє розгалуженою стандартною

бібліотекою, яка реалізує концепцію *batteries included* (батареї в комплекті). Це забезпечує наявність готових модулів для роботи з мережевими протоколами, операційною системою, обробкою текстів тощо. Однак, для написання високоефективного коду необхідно використовувати ідіоматичні конструкції мови. Також важливе використання специфічних для Python інструментів, таких як генератори, спискові включення (*list comprehensions*) та декоратори. Використання стилю *Pythonic way* дозволяє не лише скоротити код, але й оптимізувати його виконання інтерпретатором [40].

Враховуючи динамічну сувору типізацію, наявність потужних бібліотек для обробки даних та веб-розробки, а також кросплатформність [36,37], Python є оптимальним вибором для розв'язання різних задач.

### 3.2 Алгоритм розв'язання задачі розрахунку режиму сталого потокорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності

#### 3.2.1 Алгоритм розв'язання задачі гідравлічного розрахунку інженерних мереж

Розглянемо алгоритм, що реалізує метод Ньютона розв'язання системи нелінійних рівнянь (1.77) – (1.81). Розв'язання цієї системи дає можливість отримати оцінки математичних сподівань режимних параметрів на входах та виходах ВМ з активними елементами. Результатом роботи цього алгоритму є режим СПР у ВМ з активними елементами.

Алгоритм розв'язання задачі гідравлічного розрахунку ВМ записується у вигляді послідовності кроків.

Крок 1. Введення початкових даних про структуру водопровідної мережі у вигляді вузлових пар., про параметри ділянок трубопроводу, про коефіцієнти апроксимації напорних характеристик насосних агрегатів, про значення різниць геодезичних висот для ділянок трубопроводу, про виміри тисків на входах і ви-

ходах мережі.

Крок 2. Призначення нульового значення номеру ітерації  $k$ , тобто  $k = 0$ .  
де  $k$  – номер ітерації;

Крок 3. Вибір початкових наближень для витрат у хордах  $q_r^{(0)}, r \in M_{p2} \cup M_{a2} \cup L_{22} \cup N_{22}$ ;

Крок 4. Обчислення значень витрат у гілках дерева  $q_i^{(k)}, i \in M_{p1} \cup M_{a1} \cup L_{12} \cup N_{12}$  відповідно до формули (1.81).

Крок 5. Визначення значень компонент вектору  $\bar{f}(\bar{q}^{(k)})$  відповідно до формул (1.77)–(1.80);

Крок 6. Перевірка виконання умови  $\|\bar{f}(\bar{q}^{(k)})\| \leq \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – задана точність.  
Якщо умови виконуються, то переходимо до кроку 10, в іншому випадку – до кроку 7.

Крок 7. Обчислення значень елементів матриці Якобі  $W(\bar{q}^{(k)})$  відповідно до формул (2.3)–(2.6);

Крок 8. Розв'язання системи лінійних рівнянь наступного вигляду:

$$W(\bar{q}^{(k)})\Delta\bar{q}^{(k)} = -\bar{f}(\bar{q}^{(k)}),$$

де  $\Delta\bar{q}^{(k)}$  – вектор правок до кореня системи нелінійних рівнянь вигляду

$$\Delta\bar{q}^{(k)} = \left\{ \Delta q_r^{(k)}, r \in M_{p2} \cup M_{a2} \cup L_{22} \cup N_{22} \right\}.$$

Крок 8. Обчислення значень витрат в хордах на  $(k + 1)$ -й ітерації

$$q_r^{(k+1)} = q_r^{(k)} + \Delta q_r^{(k)}, r \in M_{p2} \cup M_{a2} \cup L_{22} \cup N_{22}.$$

Крок 9. Збільшення на одиницю номеру ітерації,  $k = (k + 1)$ , та перехід до

кроку 4.

Крок 10. Формування результатів розв'язання задачі гідравлічного розрахунку водопровідної мережі:

$$q_r \approx q_r^k, r \in M_{p2} \cup M_{a2} \cup L_{22} \cup N_{22},$$

$$q_i \approx q_i^{(k)}, i \in M_{p1} \cup M_{a1} \cup L_{12}.$$

### 3.2.2 Алгоритм розв'язання задачі розрахунку оцінок дисперсій режимних параметрів

Алгоритм розв'язання задачі розрахунку оцінок дисперсій режимних параметрів на входах и виходах ІМ з використанням лінеаризованих рівнянь моделі СПР розглядається для ВМ з активними елементами.

Розглядається окремий випадок ВМ з активними елементами, коли на всіх входах та виходах мережі задаються значення тисків, тобто  $L_{11} = \emptyset; N_{21} = \emptyset; L_{21} = \emptyset$ . Тоді  $N_{22} \equiv N; L_{22} \equiv L_2$ .

Для даного випадку система рівнянь моделі СПР (1.67)–(1.74) запишіться у вигляді системи рівнянь (1.77)–(1.81).

Для обчислення оцінок дисперсій режимних параметрів на входах та виходах ВМ розглянемо застосування лінеаризованих рівнянь моделі СПР (1.77)–(1.81).

Витрати  $q_r, r \in L_2 \cup N$  є неявними функціями тисків  $P_1; P_j, j \in L_2 \cup N$ , функціональна залежність визначається нелінійними рівняннями моделі СПР (1.77) – (1.81).

Таким чином, можна записати:

$$q_r = q_r(P_1; P_j, j \in L_2 \cup N), r \in L_2 \cup N.$$

Розкладаючи цю функцію у ряд Тейлора в околі точки  $P_1^\circ$ ,  $P_j^\circ$ ,  $j \in L_{22} \cup N_{22}$  та обмежуючись лінійними членами розкладу, можна отримати вирази для оцінок математичних сподівань витрат  $q_r^0$ ,  $r \in L_2 \cup N$  на входах і виходах мережі, а також для їх дисперсій  $\sigma_{q_r}^2$ ,  $r \in L_2 \cup N$ :

$$q_r^0 = q_r(P_1^\circ; P_j^\circ, j \in L_2 \cup N), r \in L_2 \cup N; \quad (3.1)$$

$$\sigma_{q_r}^2 = \left( \frac{\partial q_r}{\partial P_1} \right)^2 \sigma_{P_1}^2 + \sum_{j \in L_2 \cup N} \left( \frac{\partial q_r}{\partial P_j} \right)^2 \sigma_{P_j}^2, \quad (3.2)$$

$$r \in L_2 \cup N.$$

Для отримання оцінок математичних сподівань витрат  $q_r^0$ ,  $r \in L_2 \cup N$  на входах і виходах мережі відповідно до виразу (3.1) використовується задача гідравлічного розрахунку ВМ з активними елементами, алгоритм розв'язання якої розглянутий раніше.

Для обчислення дисперсій  $\sigma_{q_r}^2$ ,  $r \in L_2 \cup N$ , необхідно отримати значення похідних  $\frac{\partial q_r}{\partial P_1}, \frac{\partial q_r}{\partial P_j}$ ,  $j \in L_2 \cup N$ ,  $r \in L_2 \cup N$  у формулі (3.2).

Оскільки витрати в хордах  $q_r, r \in M_{p2} \cup M_{a2} \cup L_2 \cup N$  є неявними функціями тисків  $P_1, P_j$ ,  $j \in L_2 \cup N$ , для отримання виразів для похідних  $\frac{\partial q_r}{\partial P_1}; \frac{\partial q_r}{\partial P_j}$ ,  $j \in L_2 \cup N$ ,  $r \in M_{p2} \cup M_{a2} \cup L_2 \cup N$  скористаємося правилом диференціювання систем неявних функцій.

Представимо систему рівнянь (1.77) – (1.80) у такому вигляді:

$$\begin{cases} F_1(q_r, r \in M_2 \cup L_2 \cup N; P_1; P_r, r \in L_2 \cup N) = 0, \\ \vdots \\ F_m(q_r, r \in M_2 \cup L_2 \cup N; P_1; P_r, r \in L_2 \cup N) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Введемо такі позначення:

$$Y_i \equiv q_r, r \in M_2 \cup L_2 \cup N; i = 1, \dots, n_1,$$

$$X_i \equiv P_1, i = 1,$$

$$X_i \equiv P_r, r \in L_2 \cup N; i = 2, \dots, n_3,$$

де  $n_1 = \text{Card}(M_2 \cup L_2 \cup N)$ ;

$$n_2 = \text{Card}(L_2 \cup N); n_3 = n_2 + 1.$$

З урахуванням введених позначень, систему рівнянь (3.3) можна записати у вигляді системи рівнянь такого вигляду:

$$\begin{cases} F_1(Y_1, \dots, Y_{n_1}, X_1, X_2, \dots, X_{n_3}) = 0, \\ F_2(Y_1, \dots, Y_{n_1}, X_1, X_2, \dots, X_{n_3}) = 0, \\ \vdots \\ F_m(Y_1, \dots, Y_{n_1}, X_1, X_2, \dots, X_{n_3}) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Ця система дозволяє визначити  $n_1$  змінних  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_1}$ , як неявні функції від  $X_1, X_2, \dots, X_{n_3}$ . Враховуючи, що система рівнянь (3.3) має єдине рішення відносно  $q_r, r \in M_2 \cup L_2 \cup N$  при заданих значеннях  $P_1; P_r, r \in L_2 \cup N$ , а в околі отриманого розв'язку виконуються умови теореми ІУ, вирази для частинних похідних мають вигляд:

$$\frac{\partial Y_j}{\partial X_k} = - \frac{\frac{D(F_1, \dots, F_{n_1})}{D(Y_1, \dots, Y_{n_1})}}{\frac{D(Y_1, \dots, Y_{j-1}, X_k, \dots, Y_{n_1})}{D(F_1, \dots, F_{n_1})}}, \quad (3.5)$$

де  $\frac{D(F_1, \dots, F_{n_1})}{D(Y_1, \dots, Y_{n_1})}$  – якобіан від функцій, що стоять в лівих частинах системи рівнянь (3.3), по змінних  $Y_1, \dots, Y_{n_1}$ .

Для обчислення елементів матриці Якобі використовуються такі наступних вирази:

$$\frac{\partial F_r}{\partial q_r} = 2c_r |q_r| + \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri}^2 c_i |q_i| + \sum_{i \in M_{a1}} b_{1ri}^2 (\psi_{i2} + 2\psi_{i3} |q_i|), \quad r \in M_{p2},$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial q_k} = 2 \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri} b_{1ki} c_i |q_i| + \sum_{i \in M_{a1}} b_{1ri} b_{1ki} (\psi_{i2} + 2\psi_{i3} |q_i|); \quad r, k \in M_{p2},$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial q_r} = \psi_{2i} + \psi_{3i} |q_r| + 2 \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri}^2 c_i |q_i| + 2 \sum_{i \in M_{a1}} b_{1ri}^2 (\psi_{i2} + 2\psi_{i3} |q_i|), \quad r \in M_{a2},$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial q_r} = 2 \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri} b_{1ki} c_i |q_i| + 2 \sum_{i \in M_{a1}} b_{1ri} b_{1ki} (\psi_{i2} + 2\psi_{i3} |q_i|); \quad r, k \in M_{a2}, r \neq k,$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial q_k} = 2 \sum_{i \in M_{p1}} b_{1ri} b_{1ki} c_i |q_i| + \sum_{i \in M_{a1}} b_{1ri} b_{1ki} (\psi_{i2} + 2\psi_{i3} |q_i|); \quad r, k \in L_2 \cup N.$$

Значення похідних  $\frac{\partial F_r}{\partial X_k}$  обчислюються за формулами:

$$\frac{\partial F_r}{\partial P_1} = 0, \quad r \in M_{p2} \cup M_{a2};$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial P_1} = 1, r \in L_2;$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial P_1} = -1, r \in N_2;$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial P_k} = 0, r \in M_2, k \in L_2 \cup N;$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial P_r} = -1, r \in L_2;$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial P_r} = 1, r \in N_{22};$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial P_k} = 0, r \in M_2, k \in L_2 \cup N_{22}; k \in L_2 \cup N_{22}.$$

### 3.3 Опис програми

Програма для розв'язання задачі гідравлічного розрахунку ВМ була реалізована в сучасному кросплатформенному середовищі за допомогою мови програмування Python 3.11 з використанням бібліотеки NumPy для виконання матричних операцій.

Для введення вихідних даних про структуру мережі, параметри ділянок трубопроводу і коефіцієнти апроксимації напірних характеристик насосних агрегатів, а також для завдання граничних умов на входах і виходах мережі використовується текстовий файл NASOS1.DOC.

Програмний продукт реалізовано з використанням об'єктно-орієнтованого підходу (клас HydraulicSolver) і являє собою основний скрипт та сукупність методів для реалізації розв'язання задачі гідравлічного розрахунку ВМ: solve, zanh, puz, smmt, gsopr, zak1, padh, fpr, vpr, mjacobi, gelg, vdav, vd.

Основний метод `solve` здійснює зчитування початкових даних про структуру графа мережі і задані режимні параметри на входах і виходах мережі, керує послідовністю виклику розрахункових методів, а також здійснює виведення результатів розв'язання задачі.

Метод `zanh` призначений для формування масиву втрат тиску на входах і виходах мережі на основі значень граничних умов.

Метод `ruz` призначений для формування масиву номерів проміжних вузлів графа мережі та оптимізації їх нумерації.

Метод `smmt` призначений для топологічного аналізу: формування номерів дуг графа мережі, відповідних гілкам дерева і хордам, а також для побудови цикломатичної матриці (матриці контурів) графа мережі.

Метод `gsorg` призначений для обчислення гідравлічних опорів пасивних ділянок мережі (ділянок трубопроводу) на основі їх фізичних характеристик (довжина, діаметр).

Метод `zak1` призначений для обчислення значень витрат в дугах, відповідних гілкам дерева графа мережі, відповідно до першого закону Кірхгофа.

Метод `radh` призначений для обчислення втрат тиску (напорів) для пасивних і активних ділянок мережі на основі поточних витрат.

Метод `frg` призначений для формування втрат тиску в дугах, відповідних хордам, відповідно до другого закону Кірхгофа.

Метод `vrg` призначений для обчислення перших похідних від втрати тиску по незалежних змінних (витратах) для пасивних і активних ділянок мережі.

Метод `mjasobi` призначений для формування та оновлення матриці Якобі системи нелінійних рівнянь моделі сталого поточкорозподілу.

Метод `gelg` реалізує метод Гаусса з вибором головного елемента і призначений для розв'язання систем лінійних рівнянь (знаходження поправок до витрат).

Методи `vdav` та `vd` призначені для обчислення значень п'єзометричного напору (тиску) в проміжних вузлах графа мережі після знаходження розподілу витрат.

Результатами розв'язання задачі гідравлічного розрахунку водопровідної мережі є значення витрат за всіма дугами графа мережі, відповідних ділянкам трубопроводу і насосним агрегатам, і значення напорів у всіх вузлах графа мережі. Результати роботи програми заносяться в файл REZ.txt.

Для роботи даного програмного продукту необхідні:

- операційна система Windows 10/11, Linux або macOS;
- встановлений інтерпретатор Python версії 3.8 або вище;
- 50 мегабайт дискового простору (для середовища виконання);
- 4 гігабайта оперативної пам'яті;
- сучасний процесор (Intel Core i3 / AMD Ryzen 3 або вище).

Програма для розв'язання задачі аналізу ймовірносних властивостей оцінок режимних параметрів (розрахунку дисперсій витрат на входах і виходах мережі) була реалізована в кросплатформенному середовищі за допомогою мови програмування Python 3.11 з використанням бібліотеки NumPy для виконання матричних операцій.

Для введення вихідних даних про режим роботи мережі використовуються результати попереднього гідравлічного розрахунку (значення витрат у дугах та гідравлічних опорів), а також задані значення дисперсій тисків на входах і виходах мережі.

Програмний продукт являє собою скрипт, що реалізує метод лінеаризації рівнянь моделі сталого поточкорозподілу, і складається з сукупності функцій для реалізації алгоритму: `build_jacobian`, `calculate_sensitivities`, `calculate_variances`. Основна програма здійснює ініціалізацію робочої точки системи (вектора витрат), формування матриці похідних та послідовний виклик розрахункових процедур для визначення похибок витратомірів.

Функція `build_jacobian` призначена для формування матриці Якобі системи нелінійних рівнянь. Вона обчислює часткові похідні від функцій нев'язок по витратах на основі фізичних параметрів мережі.

Функція `calculate_sensitivities` призначена для обчислення коефіцієнтів чутливості. Вона реалізує застосування теореми про неявні функції шляхом

розв'язання системи лінійних рівнянь або обернення матриці Якобі.

Функція `calculate_variances` призначена для безпосереднього обчислення дисперсій витрат у дугах, що відповідають входам і виходам мережі. Розрахунок виконується шляхом сумування добутків квадратів коефіцієнтів чутливості на задані дисперсії тисків.

Результатами розв'язання задачі є розрахункові значення дисперсій витрат та їх середньоквадратичних відхилень на вході та виходах водопровідної мережі.

Для роботи даного програмного продукту необхідні:

- операційна система Windows 10/11, Linux або macOS;
- встановлений інтерпретатор Python версії 3.8 або вище;
- 50 мегабайт дискового простору;
- 4 гігабайта оперативної пам'яті
- процесор Intel Core i3 / AMD Ryzen 3 або вище.

### Висновки за розділом 3

У цьому розділі проведено опис програмної реалізації алгоритмів розв'язання задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності.

У розділі наведено алгоритм розв'язання задачі гідравлічного розрахунку водопровідної мережі з активними елементами, реалізація якого дає можливість отримати оцінки математичних сподівань режимних параметрів на входах та виходах мережі. Також розглядається алгоритм розв'язання задачі розрахунку оцінок дисперсій режимних параметрів на входах и виходах мережі.

Для розробки програмного продукту було обрано мову програмування Python та бібліотеку NumPy, що дозволило забезпечити високу точність матричних обчислень та кросплатформність застосунку. Об'єктно-орієнтований під-

хід забезпечив модульність структури та логічне розмежування етапів розрахунку. Розроблений програмний засіб автоматизує повний цикл обчислень

Встановлено, що програма коректно виконує розрахунок витрат на ділянках трубопроводу та напорів у вузлах. Системні вимоги до апаратного забезпечення є помірними, що дозволяє ефективно експлуатувати програмний продукт на сучасних персональних комп'ютерах під управлінням ОС Windows, Linux або macOS.

Таким чином, створене програмне забезпечення є цілісним інструментом, готовим до практичного застосування для інженерних розрахунків водопровідних мереж.

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Задача розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в умовах невизначеності розв'язувалася для ділянки водопровідної мережі з активними елементами, Графічна ілюстрація графа мережі наведено на рисунку 4.1.

Граф ділянки водопровідної мережі, яка розглядається, 51 вузол та 54 дуг, з яких 50 дуг відповідають реальним ділянкам мережі та 4 дуги, що відповідають фіктивним ділянкам мережі. Дуги, що відповідають реальним ділянкам мережі, містить 45 дуг, що відповідають пасивним елементам мережі, тобто ділянкам трубопроводу, та 5 дуг, що відповідають активним елементам мережі, тобто насосним агрегатам. До фіктивних ділянок мережі слід віднести одну дугу, що відповідає входу мережі, та 3 дуги, що відповідають виходам мережі.

Для представлення структури ділянки водопровідної мережі кожна дуга графа мережі задається у вигляді вузлової пари. Для кожній дузі, що відповідає реальним елементам водопровідної мережі, задаються параметри, які характеризують даний елемент.

У таблиці 4.1 наведені параметри ділянок трубопроводу:

- довжина (м);
- діаметр (мм).

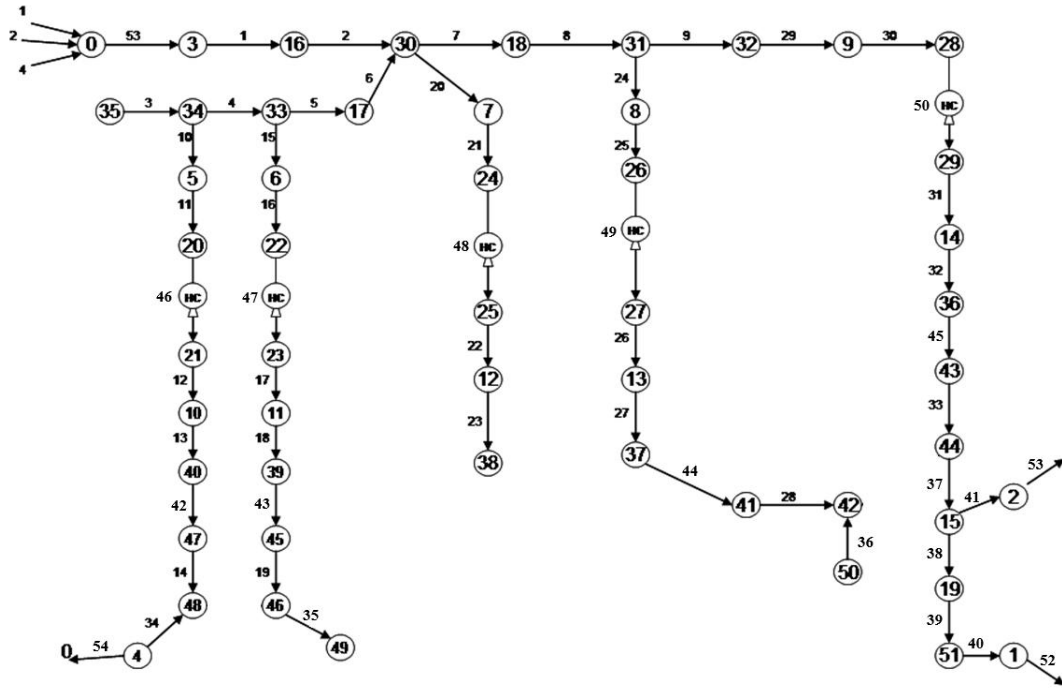


Рисунок 4.1 – Граф ділянки водопровідної мережі

Таблиця 4.1 – Параметри ділянок трубопроводу

Номер дуги	Вузлова пара	Довжина ділянки $l_i$ , м	Внутрішній діаметр ділянки $d_i$ , мм
1	3-16	10	800
2	16-30	20.5	800
3	35-34	2	800
4	34-33	5.05	800
5	33-17	2.05	800
6	17-30	3.06	800
7	30-18	1.18	800
8	18-31	2.05	800
9	31-32	5.05	800
10	34-5	5.7	600
11	5-20	3.06	500

Продовження таблиці 4.1

Номер дуги	Вузлова пара	Довжина ділянки $l_i$ , м	Внутрішній діаметр ділянки $d_i$ , мм
12	21-10	1.18	500
13	10-40	0.55	500
14	47-48	0.59	400
15	33-6	5.7	600
16	6-22	3.06	500
17	23-11	1.18	500
18	11-39	0.55	500
19	45-46	0.59	400
20	30-7	5.7	600
21	7-24	3.06	500
22	25-12	1.18	500
23	12-38	0.55	500
24	31-8	5.7	600
25	8-26	3.06	500
26	27-13	1.18	500
27	13-37	0.55	500
28	41-42	0.59	400
29	32-9	5.7	600
30	9-28	3.06	500
31	29-14	1.18	500
32	14-36	0.55	500
33	43-44	0.59	400
34	4-48	0.2	700
35	46-49	2.25	700
36	50-42	3.05	700

Кінець таблиці 4.1

Номер дуги	Вузлова пара	Довжина ділянки $l_i$ , м	Внутрішній діаметр ділянки $d_i$ , мм
37	44-15	1.2	700
38	15-19	1.3	600
39	19-51	1.56	600
40	51-1	1.15	700
41	15-2	4.01	700
42	40-47	10000	400
43	39-45	10000	400
44	37-41	10000	400
45	36-43	10000	400

Гідравлічний опір  $c_i, i \in M_p$  ділянок трубопроводу розраховується за формулою:

$$c_i = 0,001736 \frac{l_i}{d_i^{5,3}},$$

де  $l_i$  – довжина  $i$ -ї ділянки трубопроводу;

$d_i$  – внутрішній діаметр  $i$ -ї ділянки трубопроводу.

Для активних елементів задаються:

– вузлова пара;

– коефіцієнти апроксимації  $\psi_{0i}, \psi_{1i}, \psi_{2i}, i \in M_a$  залежності втрати напору

від витрати  $h(q_i)$  для  $i$ -го активного елемента вигляду:

$$h_i = \psi_{0i} + \psi_{1i}q_i + \psi_{2i}q_i |q_i|.$$

Коефіцієнти апроксимації напірних характеристик насосних агрегатів наведені в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 – Коефіцієнти апроксимації напірних характеристик насосних агрегатів

Номер дуги	Вузлова пара	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_2$
46	20-21	89.8804	$9.735 * 10^{-2}$	$-4.80575 * 10^{-4}$
47	22-23	89.8804	$9.735 * 10^{-2}$	$-4.80575 * 10^{-4}$
48	24-25	89.8804	$9.735 * 10^{-2}$	$-4.80575 * 10^{-4}$
49	26-27	89.8804	$9.735 * 10^{-2}$	$-4.80575 * 10^{-4}$
50	28-29	89.8804	$9.735 * 10^{-2}$	$-4.80575 * 10^{-4}$

Задача розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в умовах невизначеності розв'язувалася для випадку, коли в якості граничних умов функціонування задаються значення тисків на входах і виходах водопровідної мережі.

У таблиці 4.3 наведені значення граничних умов, в якості яких використовується значення тисків на входах і виходах мережі.

Таблиця 4.3 – Вихідні значення режимних параметрів на входах і виходах

Номер вузла	Тиск $P_s$
3	1.5
1	70
2	70
4	72

Пари розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в умовах невизначено-

сті крім розрахунку значень витрат по всіх дугах графа мережі та тисків у всіх вузлах графа потрібно розрахувати дисперсії витрат на входах та виходах мережі при завданні дисперсій тисків на входах і виходах мережі.

У таблиці 4.4 наведені вихідні значення дисперсій тисків на входах і виходах мережі.

Таблиця 4.4 – Вихідні значення дисперсій тисків на входах і виходах мережі.

Номер вузла	Задані значення дисперсій тисків $\sigma_{p_i}^2$
3	0.598
1	0.484
2	0.489
4	0.581

Для графа даної ділянки водопровідної мережі луги з номерами 51, 1 – 50 були віднесені до гілок графа мережі, тоді дуги з номерами 52 – 54 були хордами. При розглянутим завданні граничних умов виконувались умови  $N_{22} \equiv N = \{ 52, 53, 54 \}$ .

Для ділянки водопровідної мережі, що розглядається, і для даного завдання граничних умов розв'язувалася система трьох нелінійних рівнянь відносно витрат в дугах, що відповідають входам і виходам мережі. Як метод розв'язання використовувався метод Ньютона. Обиралися такі початкові наближення:  $q_{52} = 0.1$ ;  $q_{53} = 0.1$ ;  $q_{54} = 0.1$ ;

Розв'язок системи нелінійних рівнянь моделі сталого поточкорозподілу з заданою точністю  $\varepsilon = 10^{-6}$  був отриманий за десять ітерацій.

В результаті розрахунку режиму сталого поточкорозподілу отримані такі результати:

– значення гідравлічних опорів для всіх ділянок трубопроводу, які наве-

дені в таблиці 4.5;

– значення витрат по всіх дугах, що відповідають реальним та фіктивним ділянкам мережі, які наведені в таблиці 4.6;

– значення тисків у всіх вузлах ділянки мережі, які наведені в таблиці 4.7.

Таблиця 4.5 – Розрахункові значення гідравлічних опорів для ділянок трубопроводу

Номер дуги	Вузлова пара	Гідравлічні опори $c_i$
1	3-16	$5.840851 \cdot 10^{-8}$
2	16-30	$1.197374 \cdot 10^{-7}$
3	35-34	$1.16817 \cdot 10^{-8}$
4	34-33	$2.94963 \cdot 10^{-8}$
5	33-17	$1.197374 \cdot 10^{-8}$
6	17-30	$1.752255 \cdot 10^{-8}$
7	30-18	$1.752255 \cdot 10^{-8}$
8	18-31	$1.197374 \cdot 10^{-8}$
9	31-32	$2.94963 \cdot 10^{-8}$
10	34-5	$1.529418 \cdot 10^{-7}$
11	5-20	$2.15791 \cdot 10^{-7}$
12	21-10	$8.321354 \cdot 10^{-8}$
13	10-40	$3.878597 \cdot 10^{-8}$
14	47-48	$1.357648 \cdot 10^{-7}$
15	33-6	$1.529418 \cdot 10^{-7}$
16	6-22	$2.15791 \cdot 10^{-7}$
17	23-11	$8.321354 \cdot 10^{-8}$

Продовження таблиці 4.5

Номер дуги	Вузлова пара	Гідрравлічні опори $c_i$
18	11-39	$3.878597 * 10^{-8}$
19	45-46	$1.357648 * 10^{-7}$
20	30-7	$1.529418 * 10^{-7}$
21	7-24	$2.15791 * 10^{-7}$
22	25-12	$8.321354 * 10^{-8}$
23	12-38	$3.878597 * 10^{-8}$
24	31-8	$1.529418 * 10^{-7}$
25	8-26	$2.15791 * 10^{-7}$
26	27-13	$8.321354 * 10^{-8}$
27	13-37	$3.878597 * 10^{-8}$
28	41-42	$1.357648 * 10^{-7}$
29	32-9	$1.529418 * 10^{-7}$
30	9-28	$2.15791 * 10^{-7}$
31	29-14	$8.321354 * 10^{-8}$
32	14-36	$3.878597 * 10^{-8}$
33	43-44	$1.357648 * 10^{-7}$
34	4-48	$2.370628 * 10^{-9}$
35	46-49	$2.666956 * 10^{-8}$
36	50-42	$3.615208 * 10^{-8}$
37	44-15	$1.422377 * 10^{-8}$
38	15-19	$3.488147 * 10^{-8}$
39	19-51	$4.185776 * 10^{-8}$
40	51-1	$1.363111 * 10^{-8}$

Кінець таблиці 4.5

Номер дуги	Вузлова пара	Гідравлічні опори $c_i$
41	15-2	$4.75311 \cdot 10^{-8}$
42	40-47	$2.301098 \cdot 10^{-3}$
43	39-45	$2.301098 \cdot 10^{-3}$
44	37-41	$2.301098 \cdot 10^{-3}$
45	36-43	$2.301098 \cdot 10^{-3}$

Таблиця 4.6 – Розрахункові значення витрат по дугах графа мережі

Номер дуги	Вузлова пара	Значення витрат $q_i$
1	3-16	209.6171
2	16-30	209.6171
3	35-34	0
4	34-33	-102.7507
5	33-17	-102.7507
6	17-30	-102.7507
7	30-18	106.8664
8	18-31	106.8664
9	31-32	106.8664
10	34-5	102.7507
11	5-20	102.7507
12	21-10	102.7507
13	10-40	102.7507

Продовження таблиці 4.6

Номер дуги	Вузлова пара	Значення витрат $q_i$
14	47-48	102.7507
15	33-6	0
16	6-22	0
17	23-11	0
18	11-39	0
19	45-46	0
20	30-7	0
21	7-24	0
22	25-12	0
23	12-38	0
24	31-8	0
25	8-26	0
26	27-13	0
27	13-37	0
28	41-42	0
29	32-9	106.8664
30	9-28	106.8664
31	29-14	106.8664
32	14-36	106.8664
33	43-44	106.8664
34	4-48	-102.7507
35	46-49	0
36	50-42	0
37	44-15	106.8664
38	15-19	48.99176
39	19-51	48.99176

Кінець таблиці 4.6

Номер дуги	Вузлова пара	Значення витрат $q_i$
40	51-1	48.99176
41	15-2	57.87461
42	40-47	102.7507
43	39-45	0
44	37-41	0
45	36-43	106.8664
46	20-21	102.7507
47	22-23	0
48	24-25	0
49	26-27	0
50	28-29	106.8664
51	0-3	209.6171
52	1-0	48.99176
53	2-0	57.87461
54	4-0	102.7507

Таблиця 4.7 – Розраховані значення тисків у вузлах мережі

Номер вузла	Значення тиску $P_i$
1	70
2	70
3	1.5
4	72
5	1.489935

Продовження таблиці 4.7

Номер вузла	Значення тиску $P_i$
6	1.491861
7	1.492172
8	1.491835
9	1.489752
10	96.29619
11	91.37226
12	91.37257
13	91.37224
14	96.28181
15	70.00015
16	1.497434
17	1.491987
18	1.491972
19	70.00007
20	1.487657
21	96.29707
22	1.491861
23	91.37226
24	1.492172
25	91.37257
26	1.491835
27	91.37224
28	1.487288
29	96.28276
30	1.492172
31	1.491835
32	1.491499

Кінець таблиці 4.7

Номер вузла	Значення тиску $P_i$
33	1.491861
34	1.49155
35	1.49155
36	96.28136
37	91.37224
38	91.37257
39	91.37226
40	96.29578
41	91.37224
42	91.37224
43	70.00186
44	70.00031
45	91.37226
46	91.37226
47	72.00146
48	72.00003
49	91.37226
50	91.37224
51	69.99997

Отриманий внаслідок гідравлічного розрахунку ділянки водопровідної мережі режим сталого поточкорозподілу є основою для розрахунку дисперсій витрат на входах та виходах мережі, якій здійснюється за лінеаризованою моделлю сталого поточкорозподілу. Як вихідні дані використовуються розрахункові значення гідравлічних опорів ділянок трубопроводу та витрати по всіх дугах

графа мережі. Результати розрахунку дисперсій витрат у дугах, що відповідають входам та виходам мережі, наведено у таблиці 4.8.

Таблиця 4.8 – Розраховані значення дисперсій витрат

Номер дуги	Вузлова пара дуги	Значення дисперсій витрат $\sigma_{q_i}^2$
51	0-3	3.98707
52	1-0	0.37527
53	2-0	0.80848
54	4-0	2.80331

Аналіз отриманих результатів показав високу ефективність розроблених алгоритмів за швидкодією, стійку роботу для різних структур водопровідної мережі і типів насосних агрегатів, а також при зміні режимних параметрів в широкому діапазоні.

#### Висновки за розділом 4

У цьому розділі було розглянуто результати обчислювального експерименту, який полягав у розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в умовах невизначеності для ділянки водопровідної мережі з активними елементами складної, довільної структури.

Наведено результати розв'язання задачі гідравлічного розрахунку водопровідної мережі. Дана задача дозволяє отримати оцінки математичних сподівань залежних змінних моделі сталого поточкорозподілу при завданні математичних сподівань незалежних змінних.

Також наведено результати обчислення дисперсій режимних параметрів на входах та виходах мережі. Дана задача розв'язується по результатах гідрав-

лічного розрахунку мережі із застосуванням лінеаризованих рівнянь моделі сталого поточкорозподілу.

Аналіз результатів обчислювального експерименту дозволив підтвердити працездатність розробленого алгоритму розв'язання задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності.

## ВИСНОВКИ

Кваліфікаційна робота присвячена розв'язанню задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності. Тема кваліфікаційної роботи є актуальною.

У кваліфікаційній роботі були виконані:

- проведено огляд і аналіз математичних моделей та методів розрахунку режимів сталого поточкорозподілу в інженерних мережах;
- наведено змістовна та математична постановки задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності;
- застосовано лінеаризовану модель сталого поточкорозподілу для розв'язання задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в інженерних мережах в умовах невизначеності;
- розроблено алгоритм розв'язання задачі гідравлічного розрахунку інженерних мереж з метою оцінювання математичних сподівань режимних параметрів на входах и виходах мережі;
- розроблено алгоритм розрахунку оцінок дисперсій режимних параметрів на входах и виходах інженерної мережі з використанням лінеаризованих рівнянь моделі сталого поточкорозподілу;
- виконано програмну реалізацію розроблених алгоритмів;
- показано працездатність запропонованих алгоритмів на прикладі розрахунку ділянки інженерної мережі.

Результати роботи можна застосовувати для розв'язання різних задач управління режимами функціонування інженерних мереж, а також їх проектування і реконструкції, коли необхідно знання їх повного поточкорозподілу, яке можна визначити в результаті розв'язку задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу з урахуванням наявності випадкових помилок вимірювання режимних параметрів. Крім того, результати розрахунку режиму сталого поточкорозподілу використовуються при створенні автоматизованих систем проектування і оперативного планування поточкорозподілом в інженерних мережах.

Розв'язання задачі розрахунку режиму сталого поточкорозподілу в умовах невизначеності дозволяє визначати реакцію інженерної мережі на зміну граничних умов її функціонування, які є випадковими величинами, і отримати ймовірнісні характеристики оцінок розрахункових значень режимних параметрів.

**ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ**

1. Козиренко С. І., Сафоненко В. В. Розрахунок режиму сталого потоко-розподілу у водопровідних мережах в умовах невизначеності. *Світ наукових досліджень. Випуск 46* : матеріали Міжнародної мультидисциплінарної наукової інтернет-конференції (м. Тернопіль, Україна; м. Ополе, Польща, 20–21 листопада 2025 р.). Тернопіль, 2025. С. 216–218.
2. Zhu Y. Assessment Method for Gas Supply Reliability of Natural Gas Pipeline Systems. *Energies*. 2021. Vol. 14, No. 9. P. 1–20.
3. Ткачук О. А. Гідравлічні розрахунки трубопровідних систем водопостачання та водовідведення : монографія. Рівне : НУВГП, 2022. 192 с
4. Chen W. Data-Driven Flow Control for Natural Gas Pipeline Networks. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*. 2025. Vol. 21, No. 2. P. 950–962.
5. Baker L. Analysis of a model of a natural gas pipeline – a transfer function approach / L. Baker et al. *Transactions of Mathematics and Its Applications*. 2021. Vol. 5, Iss. 1. URL: <https://doi.org/10.1093/imatrm/tnab002> (дата звернення: 27.11.2025).
6. Cai G. Analysis and Suggestions on Hydraulic Calculation of Long-Distance Natural Gas Pipelines. Beijing : Energy China Press, 2023. 214 p.
7. Kim D.-H., Jang D.-W. Optimization of Water Distribution Network Demand Patterns Using Real-Coded Genetic Algorithms. *Water*. 2024. Vol. 16, Iss. 20. 2971. URL: <https://www.mdpi.com/2073-4441/16/20/2971> (дата звернення: 27.11.2025).
8. Стародубцев В. Є., Козиренко С. І. Розрахунок сталого режиму функціонування газопровідних мереж високого тиску. Матеріали 29-го Міжнародного молодіжного форуму «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (м. Харків, 16-19 квітня 2025 р.). Харків : ХНУРЕ, 2024. С. 324–326.
9. Adekunle A., Adekunle I., Familusi A.O., Adamu M. Analysis of Flow in Water Distribution Network Using Numerical and Experimental Modelling. *Acta*

- Technica Corviniensis - Bulletin of Engineering*. 2021. Tome XIV . Vol. 4. P. 25-28.
10. Тевяшев А. Д., Козыренко С. И. Метод построения стохастической модели квазистационарного режима работы водопроводной сети. Матеріали 7-ої Міжнародної науково-технічної конференції “Інформаційні системи та технології ICT–2018” (Коблеве–Харків, 10–15 вересня 2018р.). 2018. С. 140–144.
  11. Козиренко С.І., Сафоненко В.В. Розрахунок режиму сталого потоко-розподілу у водопровідних мережах з активними елементами. *Матеріали XXXII Міжнародної науково - практичної конференції “Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров’я” MicroCAD – 2024* (Харків, 22 – 25 травня 2024 р.). Харків, НТУ “ХПІ” . – С. 1295.
  12. Ткачук О. Нові підходи до гідравлічних розрахунків трубопроводів водовідведення. *Водопостачання та водовідведення*. 2022. № 3. С. 25–31.
  13. Матвієнко О., Спичак П. Метод підвищення ефективності роботи водопровідної мережі способом її зонування. *Сучасний стан наукових досліджень та технологій в промисловості*. 2023. № 1 (23) С. 83-95.
  14. Сатунін О. М., Козиренко С. І. Гідравлічний розрахунок водопровідних мереж за оперативними даними. *Матеріали 29-го Міжнародного молодіжного форуму «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті»* (м. Харків, 16-19 квітня 2025 р.). Харків : ХНУРЕ, 2024. С. 316–318.
  15. Евдокимов А. Г. Оптимальные задачи на инженерных сетях. Харків: Вища школа, 1976. 153 с.
  16. Бондаренко М. Ф., Білоус Н. В., Руткас А. Г. Комп’ютерна дискретна математика: Підручник. Харків : «Компанія СМІТ», 2004. 480 с.
  17. Кузьменко І. М. Теорія графів : Навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 71 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/35854> (дата звернення: 27.11.2025).
  18. Grinberg D. An Introduction to Graph Theory. arXiv e-prints (Cornell University Library), 2023. 454 с. URL: <https://arxiv.org/abs/2308.04512> (дата звернення: 27.11.2025).
  19. Tuzhilin M., Zhang D. Introduction to Graph Theory and Basic Algorithms.

arXiv e-prints (Cornell University Library), 2023. 88 с. URL: <https://arxiv.org/abs/2312.11543> (дата звернення: 27.11.2025).

20. Евдокимов А. Г., Тевяшев А. Д. Оперативное управление потоко-распределением в инженерных сетях. Харьков : Вища школа, 1980. 144 с.

21. Евдокимов А. Г. Минимизация функций. Харьков : Вища школа, 1977. 159 с.

22. Тевяшев А. Д., Шаповалов А. Л. Наблюдаемость и идентифицируемость инженерных сетей. *Автоматизированные системы управления и приборы автоматики*. Харьков : Вища школа, 1982. Выпуск. 64. С. 31 – 37.

23. Гаврилюк І. Л., Макаров В. Л. Методи обчислень: Підручник. Ч.1. Київ : Вища школа., 1995. 367 с.

24. Костюшко І. А., Любашенко Н. Д., Третиник В. В. Методи обчислень : підручник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 243 с.

25. van Kan J., Segal G., Vermolen F. *Numerical Methods in Scientific Computing*. Delft : TU Delft Open, 2023. 289 с. URL: <https://books.open.tudelft.nl/home/catalog/book/169> (дата звернення: 27.11.2025).

26. Жалдак М. І., Триус Ю. В. *Основи теорії і методів оптимізації* : Навчальний посібник. Черкаси : Брама-Україна, 2005. 608 с.

27. Ладієва Л. Р. *Методи оптимізації та пошуку оптимальних рішень* : навч. посіб. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 144 с. URL: <https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/56540/1/Methody.pdf> (дата звернення: 26.11.2025).

28. Северин В. П., Нікуліна О. М. *Методи та алгоритми багатовимірної безумовної оптимізації* : навч. посіб. Харків : НТУ «ХПІ», 2023. 160 с. URL: <https://repository.kpi.kharkov.ua/items/02db1afd-7676-40d6-ad1c-ad033bf64941> (дата звернення: 26.11.2025).

29. Kochenderfer M. J., Wheeler T. A. *Algorithms for Optimization*. 2nd ed. Cambridge (Mass.) ; London : The MIT Press, 2019. 520 p.

30. Евдокимов А.Г., Дубровский В.В., Тевяшев А.Д. Потокораспределение в инженерных сетях. Харьков : Вища школа, 1979. 199 с.

31. Тевяшев А. Д., Козыренко С. И. Метод построения стохастической модели квазистационарного режима работы водопроводной сети. *Матеріали 7-ої Міжнародної науково-технічної конференції “Інформаційні системи та технології ICT – 2018”* (Коблеве – Харків, 10 – 15 вересня 2018 р.). 2018. С. 140–144.
32. Тевяшев А. Д., Фёдоров Н. В., Козыренко С. И. О линеаризации и решении уравнений модели установившегося потокораспределения в инженерных сетях. *Автоматизированные системы управления и приборы автоматики*. Харьков : Вища школа, 1985. Вып. 74. С.32 – 37.
33. Matviienko O., Manchynska N. Method for Calculation of Dispersions of Dependent Variables of a Stochastic Model of Quasi-Stationary Operating Modes of the Main Water Pipeline. *Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries /Mathematical Modeling & Computational Methods*. 2022. No. 4 (22). P. 58-69.
34. Медведєв М. Г., Пащенко І. О. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. пос. Київ : Ліра-К, 2008. 536 с.
35. Шкіль М. І. Математичний аналіз: Підручник. Ч. 1. Київ : Вища школа, 2002. 447 С. +
36. Van Rossum G., Drake F. L. *The Python Language Reference. Version 3.11*. Python Software Foundation, 2023. 412 p.
37. Martelli A., Ravenscroft A., Holden D., Fitzpatrick B. *Python in a Nutshell*. 4th ed. O'Reilly Media, 2023. 772 p.
38. Зеленьк О. Програмування мовою Python. Алгоритмічні структури і стратегії. Київ: Ліра-К, 2025. 338 с.
39. Shaw Z. A. *Learn Python 3 the Hard Way*. 4th ed. Addison-Wesley, 2021. 320 p.
40. Beazley D., Jones B. *Python Cookbook*. 3rd ed. O'Reilly Media, 2021. 706 p.