

УДК 514.18

В.Ф. Челомбітько<sup>1</sup><sup>1</sup>ХНУРЕ, м. Харків, Україна, viktor.chelombitko@nure.ua

## ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАННЯ СФЕРИЧНОГО МАЯТНИКА

Розглядається метод вибору значень параметрів для одержання нехаотичних траєкторій коливань вантажу просторових сферичних маятників. Пропонується спосіб графічного унаочнення траєкторій коливань вантажу як результату розв'язання диференціальних рівнянь для їх опису з метою виявлення серед них нехаотичних траєкторій.

ПРОСТОРОВИЙ СФЕРИЧНИЙ МАЯТНИК, РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА ДРУГОГО РОДУ, ТРАЄКТОРІЯ ПЕРЕМІЩЕННЯ ВАНТАЖУ

### Вступ

Сферичний, або вільний маятник, або також маятник на одній нитці являє собою точку, що рухається без тертя по поверхні сфери. Ми розглянемо цей рух як приклад руху точки по поверхні.

Маятник характеризується періодом коливань (часом, необхідним для здійснення одного повного коливального руху) і амплітудою – найбільшим кутом відхилення маятника від положення рівноваги.

Зараз уже неможливо перевірити легенду про те, як Галілей в соборі спостерігав за коливаннями бронзових люстр. Спостерігав і визначав період коливань. Годинника у Галілея не було, і, щоб порівняти період коливань люстр, підвішених на ланцюгах різної довжини, він використав частоту биття свого пульсу.

У фізиці розглядаються спрощені моделі реального маятника: математичний і фізичний маятники.

Математичний маятник – важка матеріальна точка (практично тіло малих розмірів), підвішена на невагомому нерозтяжному стрижні до нерухої точки, яка здійснює під впливом сили тяжіння коливання по дузі кола. У моделі математичного маятника коливання здійснюються в площині.

Фізичний маятник – абсолютно тверде тіло, закріплене в одній точці, яка не є його центром інерції, на нерухомій горизонтальній осі, навколо якої воно може під дією сили тяжіння здійснювати коливальні рухи.

На відміну від простих моделей рух реального маятника складний. Крім коливань в одній площині, підвішене на нитці тіло може здійснювати також колові рухи. Крім того воно може крутитися навколо власної осі (крутильний маятник). Математичний маятник має два положення рівноваги: стійке та нестійке.

В стійкому положенні рівноваги маятник висить непорушно строго вертикально, сила тяжіння врівноважується силою пружності стержня. Якщо відвести маятник від положення рівноваги, або надати йому початкової швидкості, виникають коливання. Сили тертя, що діють на реальний маятник але не враховані в даній моделі, приводять до загасання коливань та знов повертають маятник в початкове положення.

Інше положення рівноваги математичного маятника знаходиться в точці  $\theta = \pi$ , тобто коли стержень орієнтований вертикально вгору. В цьому положенні сили тяжіння та пружності стержня, як і в точці стійкої рівноваги, зрівноважені, проте дана рівновага є нестійкою. При найменшому відхиленні від вертикального положення рівнодійна сил, що діють на маятник, виводить його з рівноваги. Реальний маятник вже ніколи не повернеться в це положення. Підтримати маятник у вертикальному положенні можна за допомогою балансування, яке зводиться до особливих рухів точки опори.

Маятники широко використовуються в різних механізмах, зокрема годинниках, навігаційних приладах, гравітометрах, сейсмографіях. Крім того, траєкторія коливання маятника може викликати і естетичне враження.

### 1. Огляд відомих результатів

Існує значна кількість публікацій, присвячених математичним просторовим маятникам [1-3]. Для ілюстрації зазначених розв'язків цих рівнянь необхідно вміти будувати просторові форми траєкторій переміщення (центра) вантажу маятників [3]. Тоді за аналогією розв'язки можна використати і в подібних за змістом задачах. Тому ці дослідження доцільно було б доповнити розробкою способу графічного унаочнення траєкторій коливань вантажу як результату розв'язання диференціальних рівнянь для їх опису з метою виявлення серед них нехаотичних траєкторій.

### 2. Постановка задачі

Розробити графічний комп'ютерний метод вибору значень параметрів для одержання нехаотичних траєкторій коливань вантажу просторових сферичних маятників.

### 3. Теоретичні основи коливання маятника

Математичний маятник, у якого важка матеріальна точка рухається або по колу у вертикальній площині, або по поверхні сфери називається сферичним маятником.

Якщо відхилити маятник від положення рівноваги та штовхнути його вбік, рух маятника буде складатися з коливань в вертикальних площинах та руху в

горизонтальних. При малому відхиленні математичний маятник здійснює гармонічні коливання. Якщо початкове відхилення є великим, то коливання маятника періодичні, але не гармонічні.

Характерною особливістю маятника є ізохронність малих коливань. При малому відхиленні від положення рівноваги маятник здійснює коливання з періодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

де  $T$  – період коливання,  $l$  – довжина,  $g$  – прискорення вільного падіння.

Розглянемо випадок, коли коливання відбуваються на нижній півсфері. Точка М, відштовхуючись від свого верхнього рівня, опускається до нижнього рівня. У цей час горизонтальна проекція її радіусу-вектора повертається навколо вертикалі на невеликий кут (рис. 1).

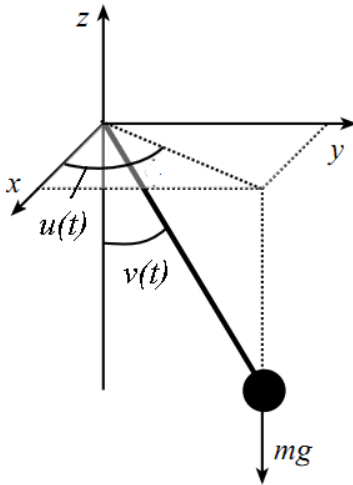


Рис. 1. Сферичний маятник

Далі точка знову піднімається до свого верхнього рівня, тим часом як її радіус-вектор продовжує повертатися на такий же кут. У цей момент точка М не може опинитися ні в своєму початковому положенні, ні в протилежному положенні на тому ж меридіані. Після другої фази, подібної щойно описаній, точка вдруге повертається до свого початкового рівня, причому проекція її радіусу-вектора також виявляється поверненою на малий кут. Таким чином, точка необхідно повинна пройти повз свого початкового положення, і рух, взагалі кажучи, не буде періодичним або може допускати в якості періоду лише проміжок, кратний тривалості щойно описаної фази.

Розглянемо тепер проекцію траєкторії на екваторіальну площину, це буде деяка плоска крива. Ця крива не може мати точок перегину, якщо точка, що рухається, залишається на нижній півсфері.

Може трапитися, що сферичний маятник описує на сфері окружність, паралельну екватору; він називається тоді конічним маятником.

Рух конічного маятника періодичний. У русі конічного маятника ордината, радіус, швидкість і реакція являються постійними величинами. Можна без по-

середньо отримати співвідношення, що їх зв'язують, якщо зауважити, що горизонтальна і вертикальна проекції реакції являють собою відповідно доцентрову силу і силу, рівну і протилежну вазі.

Тривалість обернення конічного маятника збігається з повним періодом нескінченно малого коливання простого маятника.

Для опису динаміки коливань сферичного маятника в декартових координатах  $Oxyz$  використаємо [4] вирази для його кінетичної і потенціальної енергії:

$$K := -\frac{1}{2} m r^2 \left( -\left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 \cos^2(v(t)) - \left(\frac{d}{dt} v(t)\right)^2 \right)$$

$$P := m g r \cos(v(t))$$

Використовуючи лагранжіан  $L = K - P$  було складено систему диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду:

$$m r^2 \left( \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t)\right) - \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t)\right) \cos^2(v(t)) + 2 \left(\frac{d}{dt} u(t)\right) \cos(v(t)) \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t)\right) \right) = 0 \quad (1)$$

$$-m r \left( -r \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t)\right) + r \left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 \cos(v(t)) \sin(v(t)) + g \sin(v(t)) \right) = 0$$

На рис. 1 розкрито позначення кутів  $u(t)$  і  $v(t)$  в момент часу  $t$ ;  $r$  – довжина маятника;  $m$  – маса вантажу;  $g = 9,81$ . Точка кріплення знаходиться на початку координат.

Розв'язувати систему рівнянь (1) будемо чисельним методом Рунге-Кутти. Для визначення початкових значень параметрів  $u_0, v_0, du_0, dv_0$ , які б забезпечили нехаотичну просторову траєкторію руху вантажу маятника, було складено програму у середовищі Maple.

Систему диференціальних рівнянь розв'язуємо за допомогою оператора **dsolve**, де рівняння позначено як **ODE1** і **ODE2**.

```
sol := dsolve({ODE1, ODE2} union
initial, numeric, method=rkf45,
output=listprocedure);
```

Наближений розв'язок одержано у вигляді послідовності процедур, визначити кожен з цієї послідовності можна так:

```
solu := subs(sol, u(t));
solv := subs(sol, v(t));
dsolu := subs(sol, diff(u(t), t));
dsolv := subs(sol, diff(v(t), t));
```

В результаті одержимо вирази **solu** і **solv**, з якими можна оперувати як зі звичайними функціями. Їх можна використовувати для побудови просторових траєкторій переміщення вантажу маятника:

```
sled := spacecurve(
[cos('solu(t)')(t))*sin('solv(t)')(t),
sin('solu(t)')(t))*sin('solv(t)')(t),
cos('solv(t)')(t)]),
t=0..30, numpoints=2000,
labels=[x,y,z],
```

`labelfont=[TIMES,ITALIC,12],  
scaling=constrained);`

При необхідності траєкторію переміщення вантажу сферичного маятника можна будувати на поверхні сфери:

`display(sled, sphere([0,0,0], r,  
style=wireframe)):`

Складена програма дозволяє провадити комп'ютерні експерименти по знаходженню у тому числі і нехаотичних коливань просторового маятника. На рис. 2–3 наведено приклади нехаотичних коливань сферичного маятника залежно від початкових значень параметрів  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $du_0$  і  $dv_0$ . При цьому обрано постійні значення  $r = 1$ ,  $m = 1$ ,  $u_0 = 0$ ,  $Dv_0 := 0$ . Змінні значення наведені у підписах під рисунками. Для наочності просторові траєкторії побудовано сумісно з їх проєкціями на координатну площину.

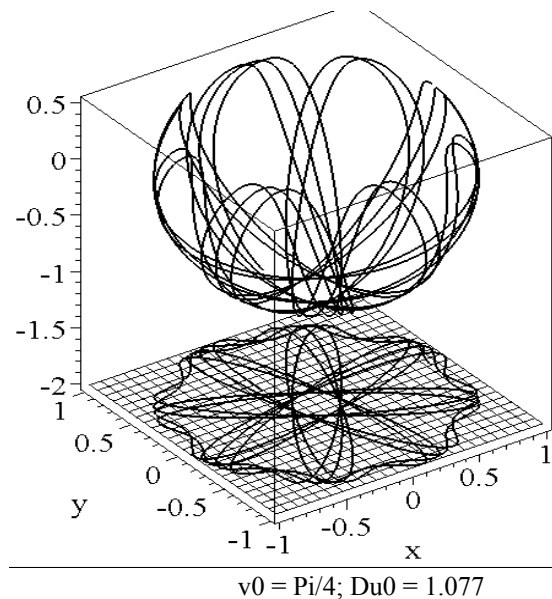
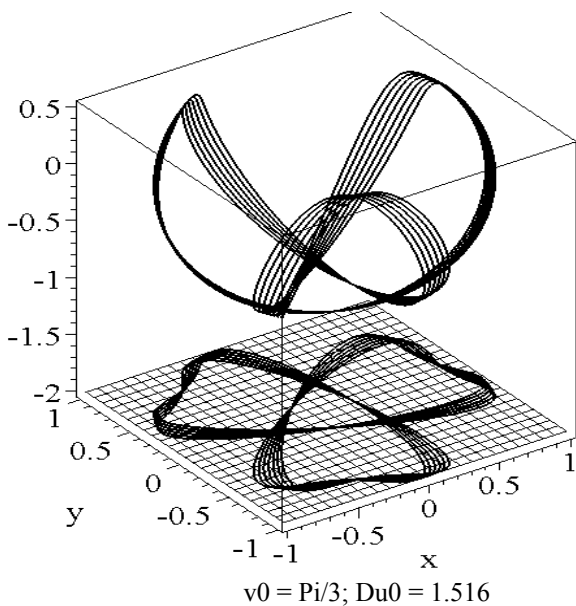
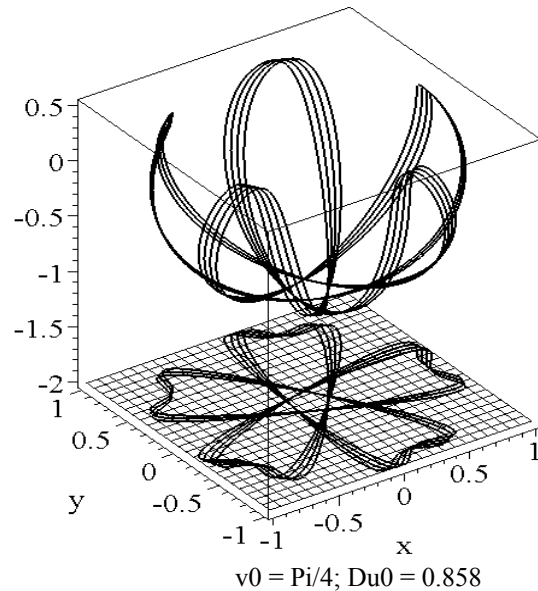
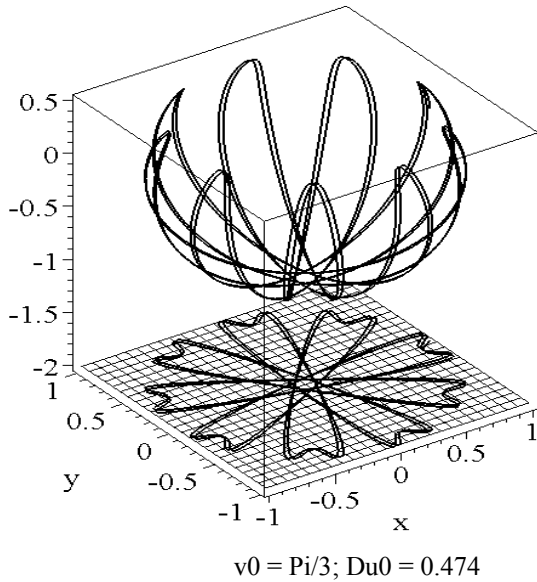
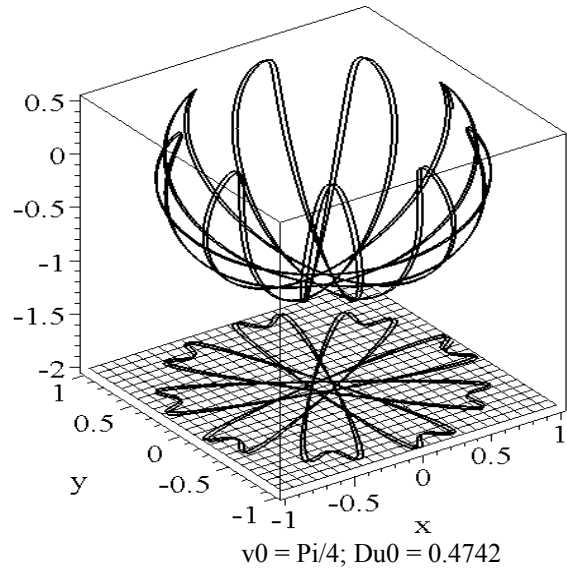


Рис.2. Траєкторії для початкового значення кута  $v_0 = \text{Pi}/3$

Рис.3. Траєкторії для початкового значення кута  $v_0 = \text{Pi}/4$

Отримані зображення можливо використовувати для захисту коштовних паперів. Графічні елементи – окремі складові частини поліграфічного оформлення коштовних паперів, що володіють певними індивідуальними властивостями щодо графічного виконання. Такими елементами в коштовних паперах є гільоширні набірні рамки, орнаменти, розетки, асюре, коро, віньетки та інші засоби декору. Гільоші - графічні малюнки, утворені періодичними лініями, форма яких визначається математичними закономірностями. Вони можуть виконуватися у вигляді позитивних (темні лінії на світлому), негативних (світлі лінії на темному фоні) зображень, а також комбінацією таких малюнків.

У деяких цінних паперах, особливо одного виробника, використовуються однакові елементи графіки, проте вони застосовуються фрагментарно, видозмінюються в дзеркальному зображенні шляхом перемонтажу або з додаванням інших елементів графіки, внаслідок чого кожен конкретний цінний папір містить унікальну сукупність диференціюючих графічних особливостей.

Слід зауважити, що цінний папір має не лише безпосереднє практичне значення, а й художню цінність як твір прикладної графіки малих форм. Художня цінність – одна із специфічних властивостей цінного паперу. Вона оцінюється поряд із вартістю виготовлення виробу та його власною матеріальною цінністю, оскільки категорія якості виступає і як міра споживчої вартості товару. Цінні папери, емоційно впливаючи на людину через зорове сприйняття, здатні викликати широкий спектр вражень, які переростають у ставлення – від захоплення до його цілковитого неприйняття.

Найпоширеніші візерункові криві переважно у вигляді графічних розет (розеток). Розета в мистецтві та архітектурі - це мотив орнаменту у вигляді пелюстків квітки, розташованих обертово-симетрично й радіально розбіжних із серцевини. Опис візерункових розеток можна покласти в основу програмного забезпечення технічних пристроїв для різноманітних впроваджень, наприклад, блоку керування ілюмінацією колеса огляду, скрипт-файлів 3d-принтерів для виготовлення виробів, при розробці проєкційних лазерних спірографів, забезпечення спірального сканування для локаторів або томографів, розробки інтелектуальних систем для розшифровки таємничих «кіл на полях», тощо.

## Висновки

Розроблений метод дозволяє вибрати значення параметрів  $u0$ ,  $v0$ ,  $du0$  і  $dv0$  для одержання у тому числі і нехаотичних траєкторій коливань вантажу сферичного маятника. Подальші дослідження будуть пов'язані з вибором параметрів для забезпечення необхідної форми траєкторії.

**Список літератури:** 1. Булдакова Д.А., Кирюшин А.В. Модель качающегося пружинного маятника в истории физики и техники. / Ученые заметки Тихоокеанского государственного университета, Хабаровск: 2015, Том 6, № 2, С. 238 – 243. 2. Бубнович Э.В., Молдаганова А.Г. К вопросу об исследовании резонансов при вынужденных взаимосвязанных колебаниях гибкой нити. Электронный ресурс. Режим доступа: [http://portal.kazntu.kz/files/publicate/%20Молдагана пова%20.pdf](http://portal.kazntu.kz/files/publicate/%20Молдагана%20пова%20.pdf) 3. Xiao O., Xia S. Dynamics of the Elastic Pendulum. Электронный ресурс. Режим доступа: [http://math.arizona.edu/~gabitov/teaching/141/math\\_485/Midterm\\_Presentations/Elastic\\_Pedulum.pdf](http://math.arizona.edu/~gabitov/teaching/141/math_485/Midterm_Presentations/Elastic_Pedulum.pdf) 4. Семкив О.М. Особенности геометрической формы колебаний груза 2d-пружинного маятника. – Международная конференция по научному развитию в Евразии. – Австрия, г.Вена – VII, 2015, С.217–214.

*Поступила до редколегії 22.04.2016*

УДК 514.18

**Геометрическое моделирование колебаний сферического маятника** / В.Ф. Челомбитко // Бионика интеллекта: науч.-техн. журнал. – 2016. – № 1(86). – С. 43-46.

Рассматривается метод выбора значений параметров для получения нехаотических траекторий колебаний груза пространственных сферических маятников. Предлагается способ графической визуализации траекторий колебаний груза как результат решения дифференциальных уравнений для их описания с целью выявления среди них нехаотических траекторий.

Ил. 3. Библиогр.: 4 назв.

UDK 514.18

**Geometric Modeling spherical pendulum oscillation** / V.F. Chelombitko // Bionica Intellecta: Sci. Mag. – 2016. – № 1(86). – P. 43-46.

The method of selection parameters to produce nonchaotic trajectories fluctuations cargo spherical pendulums. The method of graphic visual aids trajectories load fluctuations as a result of solving differential equations to describe them to identify among them nonchaotic trajectories.

Fig. 3. Ref.: 4 items.