

## МЕТОДИКА ТЕНЗОРНОГО ОБОБЩЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Евсеева О.Ю.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники  
61166, Харьков, пр. Ленина, каф. телекоммуникационных систем, тел. (057) 702-13-20,

E-mail: [evseeva.o.yu@gmail.com](mailto:evseeva.o.yu@gmail.com)

In the paper by summarizing the known results technique of implementation of tensor approach for solving network problems is offered. The general methodology of synthesis of the tensor model of the telecommunications system is described.

На сегодняшний день в литературе представлен достаточно широкий спектр математических моделей телекоммуникационных систем (ТКС), обладающих разной степенью общности и нацеленных на решение различных телекоммуникационных задач. При этом используются результаты, полученные в рамках теории графов и комбинаторики, теории массового обслуживания, теории игр, нейронных сетей, сетей Петри, аппарата производящих функций, марковских управляемых случайных процессов, тензорного анализа сетей и ряда других. Среди наиболее результативных в плане решения задачи управления трафиком в мультисервисных ТКС с гарантированным качеством обслуживания следует отметить тензорные модели, полученные путем обобщения векторно-матричных представлений и перехода к тензорным операторам, что способствует выявлению скрытых ранее закономерностей, а в целом обеспечивает повышение системности и адекватности описания.

Тензорный подход к исследованию систем различной природы представляет собой конкретизацию более общего категориального подхода и основывается на идеях, заложенных американским ученым-электротехником Г. Кроном в рамках разработанного им аппарата тензорного анализа сетей (ТАС) [1]. Г. Крон, основываясь на понятиях и положениях тензорного исчисления и анализа, одновременно обобщает их и развивает для использования в анизотропном (дискретном) пространстве-структуре. В рамках ТАС сетевая структура выступает в качестве основы как при геометризации моделируемой системы, так и при дальнейшем тензорном обобщении ее функциональных уравнений поведения. В рамках теории телекоммуникационных систем тензорный подход, преломляющий и развивающий идеи тензорного анализа сетей Г.Крона к решению задач телекоммуникаций, получил развитие благодаря работам Пасечникова И.И. [2], Петрова М.Н., Веревкиной Е.В. [3], Поповского В.В., Лемешко А.В. [4], Стрелковской И.В., Григорьевой Т.И. [5].

Применительно к телекоммуникациям возможность совместного исследования структуры ТКС и процессов, которые протекают в ней, представляется главным преимуществом тензорной методологии исследований, основанной на объединении возможностей дифференциальной геометрии с возможностями комбинаторной топологии. То есть при анализе (синтезе) системы совместно с функциональными уравнениями поведения ТКС может использоваться также и ее топологическое описание, представленное одно- и многомерными симплицеальными моделями, которое представляет дополнительный источник информации для эффективного составления и решения этих уравнений [1].

В зависимости от того, какая скалярная или векторно-матричная модель элемента телекоммуникационной сети получила тензорное обобщение, в рамках тензорного моделирования ТКС можно выделить три направления. Первые два базируются на тензорном обобщении известных в теории массового обслуживания формул: формулы Литтла в рамках первого направления и формулы  $\lambda = \mu r$  в рамках второго. При этом обоим направлениям свойственны серьезные недостатки. В первую очередь, это узкая область их применения. В рамках этих подходов не учитывается разнородность сетевого трафика, особенности в обслуживании каждого отдельного типа трафика и тем более его многопродуктовость, что снижает ценность подобных описаний. Использование формулы Литтла позволяет работать только с одним показателем качества обслуживания – средней за-

держкой передачи, и не позволяет оперировать другими – вероятностью потерь пакетов (или своевременной их доставки) и джиттером. В то же время в рамках второго направления вообще отсутствуют в явном виде показатели QoS.

В таком свете наиболее перспективным видится третье направление, основы которого заложены в работах авторов [4]. В рамках этого направления тензорному обобщению может подлежать любая представленная в аналитическом виде модель элемента ТКС, которая связывает необходимые в ходе исследования ТКС показатели качества обслуживания с характеристиками сети и передаваемого трафика. В целом данный подход, во-первых, обеспечивает возможность непосредственного оперирования показателями сетевого QoS, причем могут быть охвачены все группы QoS-показателей: скоростные, временные и вероятностные; во-вторых, учитывает, в отличие от выше изложенных подходов, потоковый характер сетевого трафика; в-третьих, допускает моделирование ТКС не только однопродуктовыми двухполюсными сетями, но и многопродуктовыми многополюсными сетями; в-четвертых, допускает учет типа сетевого трафика и особенностей его обслуживания (через компоненты метрических тензоров); в-пятых, что свойственно всем тензорным моделям, обеспечивает единство структурного и функционального описания ТКС.

### **Основные положения тензорного подхода к моделированию ТКС**

В целом на основании обобщения и развития известных результатов можно предложить следующую, представленную в общем виде методику применения тензорного подхода при решении сетевых задач.

#### **I. Этап тензорного описания ТКС.**

1. Анализ поставленной прикладной задачи. Подбор математических моделей элементов системы, согласующихся с целью проводимых исследований и подлежащих дальнейшему тензорному обобщению.

2. Геометризация системы: введение понятий пространства, систем координат и обоснование их размерности; определение правил ко- и контравариантного координатного преобразования.

3. Тензорное обобщение математической модели системы. Обоснование тензорного характера основных сетевых параметров, определение инвариантов, ковариантных и контравариантных величин. Уточнение метрических свойств введенного пространства на основании принятой модели трафика и ее обслуживания.

#### **II. Этап тензорного расчета ТКС.**

Далее возможно два основных сценария, связанных с непосредственным решением поставленной задачи прикладного характера в рамках тензорного описания ТКС.

**Первый сценарий.** 1. Поиск системы координат (СК), в которой решение поставленной задачи возможно с наименьшими затратами описательного и вычислительного характера. Такая система координат, как правило, носит название «примитивной» [1].

2. Если такая «примитивная» СК существует, то необходимо осуществить прямое координатное преобразование сетевых параметров, имеющих тензорный характер, из СК исходных данных в «примитивную» СК. В результате модель ТКС уже будет представлена в матричной форме, основываясь на проекциях образующих ее тензоров в «примитивной» СК.

3. Непосредственное решение с использованием традиционных методов науки поставленной телекоммуникационной задачи в рамках математической модели ТКС, отнесенной к «примитивной» СК.

4. Интерпретация полученных результатов решения в исходной системе координат. В результате интерпретации осуществляется обратное координатное преобразование рассчитанных сетевых параметров из «примитивной» системы координат в систему координат исходных данных.

Подобный подход является «классическим» при использовании методологии Г. Крона к анализу и синтезу сложных систем различной физической природы. С усложнением самой постановки задачи, основанной, например, на учете большего числа условий и ограничений на параметры модели, более предпочтительным выглядит **второй сценарий** использования тензорного подхода в ТКС. Второй сценарий предполагает использование множества систем координат, в рамках которых возможно осуществить расчет искомым параметров ТКС. То есть в отличие от первого сценария не отдается предпочтение единственной, т.н. «примитивной» СК, а в процесс формализации вовлекается большее число СК, в каждой из которых проекции ранее введенных тензоров представляют собой либо исходные данные, либо прогнозируемые результаты расчетов. В этом случае тензорное описание ТКС, обладая максимальной целостностью, позволяет восстановить общую картину по частям, обобщая и взаимодополняя имеющуюся информацию об известных координатах искомым тензоров в различных координатных системах. В дальнейшем данный сценарий (как и выше описанный «классический») основывается на использовании правил координатного преобразования и получении инвариантных условий, связывающих известные и искомые сетевые параметры как проекции моделирующих тензоров в базовых системах координат.

### **Методика тензорного обобщения функциональной модели ТКС**

Основу построения тензорных моделей систем телекоммуникаций, а также систем другой физической природы составляют впервые сформулированные Г. Кроном [1] обобщающие постулаты. Фактически, эти постулаты отражают иерархию способов описания сложных систем и являются своеобразными ступенями, ведущими в конечном итоге к тензорным моделям. В соответствии с обобщающими постулатами можно предложить следующую методику синтеза тензорной модели ТКС (рис. 1).

**Этап 1.** Для элемента сети, будь-то отдельный тракт передачи или некоторая их совокупность (путь, контур, разрез), записывается алгебраическое уравнение, отражающее его функциональные свойства. Для одного и того же элемента в общем случае в зависимости от выбранного аспекта описания может быть записано несколько уравнений, каждое из которых может быть положено в основу тензорной модели. Количество таких уравнений и, как следствие, синтезированных на их основе тензорных моделей определяется лишь требованиями решаемой прикладной задачи. Согласно предварительному постулату обобщения Г. Крона, функциональное уравнение для элемента должно быть записано таким образом, чтобы сохраняло свою справедливость для большого их числа.

**Этап 2.** Объединение алгебраических уравнений, записанных для отдельных элементов сети, и представление их совокупности единым векторно-матричным уравнением. Возможно, потребуется предварительная перекомпоновка уравнений отдельных элементов с целью приведения их всех к единой форме.

**Этап 3.** Трактовка полученного векторно-матричного уравнения как проекции инвариантного тензорного уравнения в системе координат, где базисными являются элементы, для которых на первом этапе записывались уравнения поведения. Это позволяет записать и само тензорное уравнение моделируемой системы, переход к которому должен сопровождаться проверкой тензорной природы всех геометрических объектов, установлением характера (ко-, контра- или инвариантности) и валентности всех входящих в него тензоров – моделей системы.

**Этап 4.** Формализация правил координатного преобразования для проекций тензоров при переходах между различными системами координат, представляющими интерес с точки зрения прикладной задачи. Данный этап первоначально предполагает выбор таких систем координат, что должно быть основано на анализе исходных данных и искомым величин, и сопровождаться составлением для них матриц ко- и контравариантного координатного преобразования.



Рис. 1. Основные этапы синтеза тензорной модели ТКС

Теперь на основании тензорной модели, зная правила координатного преобразования и трактуя все известные и искомые величины как проекции (или отдельные координаты проекций) в некоторых, зачастую разных СК, существует возможность выявить их взаимосвязь между собой и тем самым решить поставленную прикладную телекоммуникационную задачу, например, оценки качества обслуживания, достигаемого при заданном распределении трафика по трактам передачи, или, наоборот, поиска порядка управления трафика, обеспечивающего заданные показатели его качества обслуживания.

**Литература:** 1. Крон Г. Тензорный анализ сетей. – М.: Сов. радио, 1978. – 720 с. 2. Пасечников И.И. Методология анализа и синтеза предельно нагруженных информационных сетей. – М.: Изд-во «Машиностроение-1», 2004. – 216 с. 3. Вережкина Е.В., Захарченко М.О., Петров М.Н. Тензорная методология в информационных сетях. – Красноярск: НИИ СУВТП, 2001. – 158 с. 4. Поповский В.В., Лемешко А.В. Тензорный анализ в задачах системного исследования телекоммуникационных систем // Радиотехника. Всеукр. межведомств. науч.-техн. сб. – 2002. – Вып. 125. – С. 156 – 164. 5. Стрелковская И.В., Григорьева Т.И. Применение теории моделей и тензорного анализа при моделировании телекоммуникационных систем // Радиотехника: Всеукр. межведомств. науч.-техн. сб. – 2007. – Вып. 148. – С. 102 – 106.