

ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ФУНКЦИЙ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ $h_x(t)$ -ФУНКЦИЙ

А. В. Яковлев

Москва

Большой практический интерес представляет распространение частотного метода трапецидальных характеристик, разработанного в [1], [2], [3], на вычисление переходных процессов в импульсных системах автоматического управления.

Точность предлагаемого метода — метода дискретных $h_x(t)$ -функций как правило превышает точность обычного метода $h_x(t)$ -функций, используемого для вычисления переходных процессов в непрерывных системах управления.

1. Переходная функция импульсной системы с фиксацией

Пусть $G^*(z) - z$ — преобразование входного сигнала, действующего на входе импульсной системы с фиксацией; T — такт квантования сигналов; σ — локальное время; $\Phi^*(j\omega; t)$ — амплитудно-фазовая характеристика замкнутой импульсной САУ; $x(t)$ — непрерывный сигнал на выходе системы [3].

В основу метода дискретных $h_x(t)$ -функций положено следующее соотношение, справедливое для устойчивой дискретной САУ как системы с периодически изменяющимся на интервале $nT + (n+1)T$; $n = 0; 1; 2 \dots$ параметрами:

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{\substack{n=0 \div \infty \\ 0 < \sigma_n < 1}} x(nT + \sigma_n T) = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=e^{\sigma_n T}=1} X^*(z; \sigma_n) z^{n-1} = \frac{T}{2\pi j} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} X^*(s) \left| e^{snT} ds, \right. \end{aligned} \quad (1)$$

где предельный переход $x(t) = \lim_{\substack{n=0 \div \infty \\ 0 < \sigma_n < 1}} x(nT + \sigma_n T)$ означает, что дискретная

функция $x(nT + \sigma_n T)$ определена при всех целочисленных значениях n и всех значениях σ_n , удовлетворяющих неравенству $0 \leq \sigma_n \leq 1$.

Как известно [3], [4], единичный радиус с центром в начале координат на z -плоскости имеет своим конформным отображением границы основной полосы $+\frac{\pi}{T} \div -\frac{\pi}{T}$ в s -плоскости. Абсцисса абсолютной

сходимости s , входящая в (1), равна нулю и совпадает с мнимой осью s -плоскости (рис. 1).

Определим переходную функцию замкнутой линейной ИСАУ с запо-

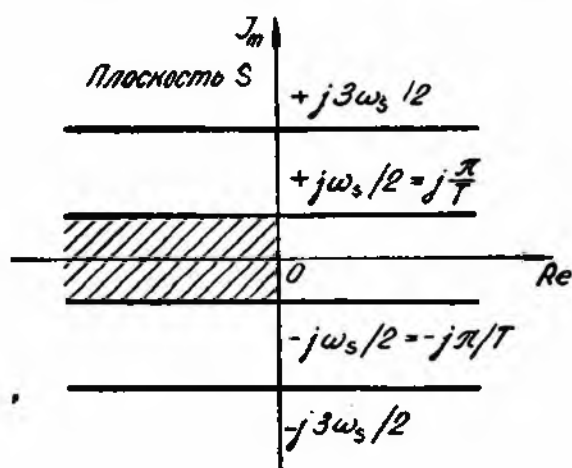


Рис. 1.

минающим элементом нулевого порядка, если входной сигнал представляет собой дискретную ступенчатую функцию

$$G^*(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-l} + \dots \quad (2)$$

Структурная расчетная схема системы при $\sigma = 0$ приведена на рис. 2, а. Ограничения на передаточную функцию непрерывной части $Y_{н.ч.}(s)$, накладываемые предлагаемым методом, аналогичны изложенным в [2].

Для вычисления входного сигнала $x(t)$ (или $x(nT + \sigma T)$ при всех значениях $\sigma = \sigma_n$) внутри интервала дискретности преобразуем схему к виду, изображенному на рис. 2, б.

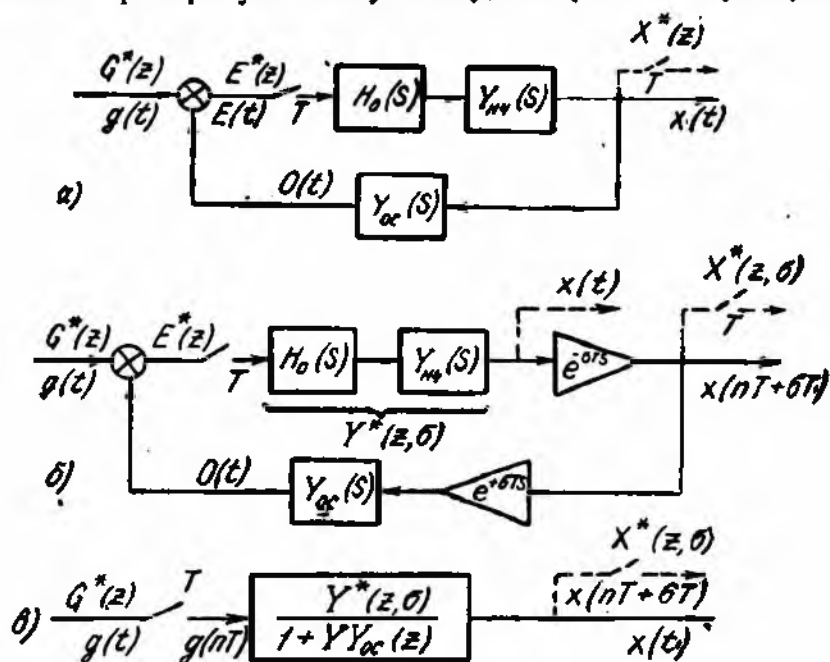


Рис. 2.

Запишем следующие очевидные соотношения:

$$X^*(z) = G^*(z) \Phi^*(z); \quad \sigma = \sigma_n = 0; \quad (3)$$

$$\Phi^*(z; \sigma) = \frac{X^*(z; \sigma)}{G^*(z)} = \frac{Y^*(z; \sigma)}{1 + Y Y_{oc}^*(z)}; \quad (4)$$

$$Y^*(z; \sigma) = T Z_s \{ H_0(s) Y_{н.ч.}(s) \} \quad (5)$$

при $H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$ и $n > 0$;

$$X^*(z; \sigma) = G^*(z) \Phi^*(z; \sigma); \quad (6)$$

$$Y^*(z; \sigma) = \frac{z-1}{z} Y_1^*(z; \sigma) = \frac{z-1}{z} Z_\sigma \left\{ \frac{Y_{н.ч}(s)}{s} \right\}. \quad (7)$$

Структурная схема, соответствующая (4), показана на рис. 2, а. Заметим, что выражение (4) справедливо только для класса систем, импульсная переходная функция которых в разомкнутом состоянии равна нулю при $t = 0$ [3].

2. Связь переходной функции импульсной системы с фиксацией с ω -частотными характеристиками системы

Установим связь между переходной дискретной функцией $x(nT + \sigma T)$ системы с фиксацией и ее амплитудно-частотной характеристикой как трансцендентной функцией от ω .

Будем искать функцию $x(nT + \sigma T)$ в классе непрерывных функций, удовлетворяющих при $\sigma = \sigma_v = 0$ интегральному соотношению (1) в дискретных точках $0; T; 2T; 3T$ и т. д.

Эту задачу нетрудно обобщить и на случай произвольного значения σ_v ($0 \leq \sigma_v \leq 1$). В результате построения фиктивных непрерывных переходных процессов, удовлетворяющих (1) в точках $nT + \sigma_v T$ при различных σ_v , по полученным значениям $x_{\sigma_v}(t)$ можно полностью восстановить информацию о переходной функции ИСАУ.

Подставим (7) в выражение $\Phi^*(z; \sigma)$. Учитывая соотношения (2) и (6), найдем z -преобразование с запаздыванием переходной функции импульсной системы с фиксацией (см. рис. 2, б):

$$X^*(z; \sigma) = \frac{z}{z-1} \frac{\frac{z-1}{z} Z_\sigma \left[\frac{Y_{н.ч}(s)}{s} \right]}{\left\{ 1 + \frac{z-1}{z} Z \left[\frac{Y_{н.ч}(s)}{s} \right] \right\}}. \quad (8)$$

Используя выражение типа (1), можно получить:

$$x(t) = \lim_{\substack{n=0 \div \infty \\ 0 \leq \sigma_v < 1}} x(nT + \sigma_v T) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z-1} \Phi_\Phi^*(z; \sigma_v) Z^{n-1} dz, \quad (9)$$

где

$$\Phi_\Phi^*(z; \sigma_v) = \frac{(z-1) Z_\sigma \left[\frac{Y_{н.ч}(s)}{s} \right]}{1 + \frac{z-1}{z} Z \left[\frac{Y_{н.ч}(s)}{s} \right]}$$

— передаточная функция фиктивного замкнутого дискретного фильтра, соответствующего заданной ИСАУ.

Применяя к $z \equiv e^{j\omega T}$ формулу Эйлера и используя (1), представим (9) в виде

$$x(nT + \sigma T) \Big|_{n=0 \div \infty} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} Y_*(j\omega) \frac{\Phi_\Phi(e^{j\omega T}; \sigma_v)}{j\omega} e^{j\omega n T} d j\omega; \quad (10)$$

$$Y_*(j\omega) = \frac{T j\omega}{\cos \omega T - 1 + j \sin \omega T}. \quad (11)$$

Трансцендентная функция $Y_*(j\omega)$ может быть задана своими ω -частотными характеристиками:

$$A_T(\omega) = \frac{\omega T}{2} \operatorname{cosec} \frac{\omega T}{2}, \quad \omega - \text{ЛАХ}$$

и

$$\varphi_T(\omega) = -\frac{\omega T}{2}, \quad \omega - \text{ЛФХ},$$

изображенными на рис. 3.

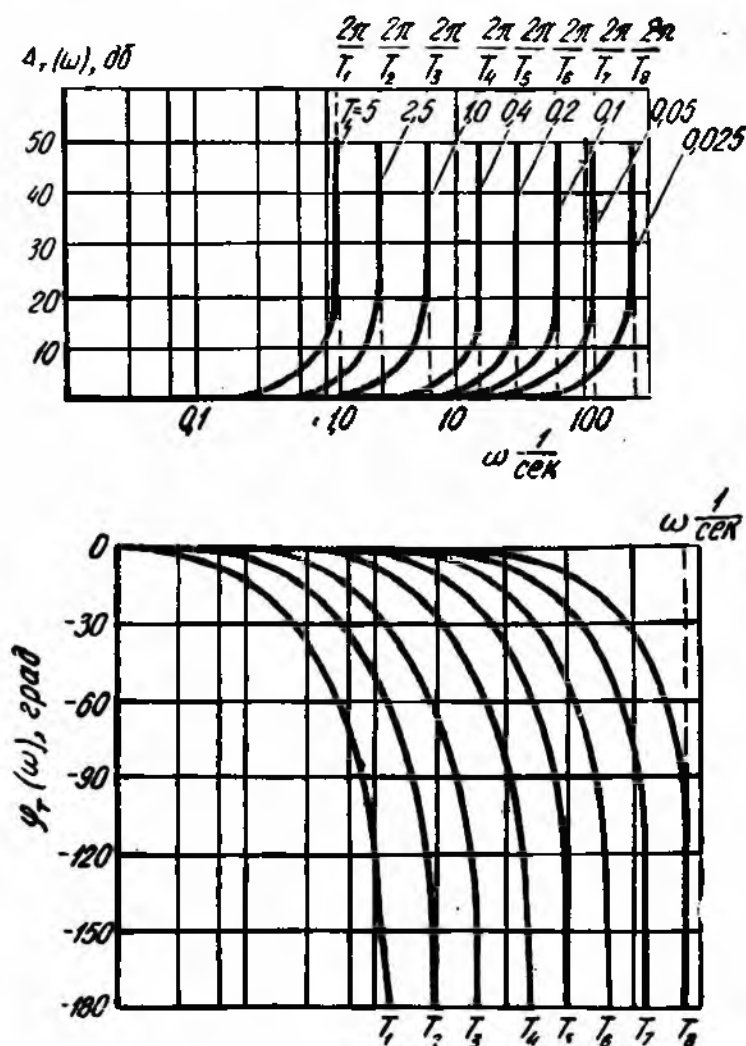


Рис. 3.

Приведем (10) к форме

$$x(nT + \sigma T) \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} \frac{\Phi_*(e^{j\omega T}; \sigma_v)}{j\omega} d\omega, \quad (12)$$

где $\Phi_*(e^{j\omega T}; \sigma_v) = Y_*(j\omega)\Phi_\Phi^*(e^{j\omega T}; \sigma_v)$ — трансцендентная функция расчетного фиктивного фильтра.

Формула (12), являющаяся аналогом соотношения вида

$$u(t) - P(0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\Phi(s) - \Phi(j0)}{s} e^{st} ds; \quad t > 0 \quad (13)$$

для непрерывной САУ [1; 2], положена в основу частотного метода определения переходной функции дискретной САУ.

Представим передаточную функцию расчетного фиктивного фильтра через действительную и мнимую частотные характеристики:

$$\Phi_*(e^{j\omega T}; \sigma_v) = C_*(\omega; \sigma_v) e^{j\Phi_*(\omega; \sigma_v)} = P_*(\omega; \sigma_v) + jQ_*(\omega; \sigma_v), \quad (14)$$

где при $\sigma = \sigma_v = \text{const}$:

$C_*(\omega; \sigma_v) = \sqrt{P_*^2(\omega; \sigma_v) + Q_*^2(\omega; \sigma_v)}$ — амплитудная ω -частотная характеристика фиктивного расчетного фильтра;

$\Psi_*(\omega; \sigma_v) = \text{arctg} \frac{P_*(\omega; \sigma_v)}{Q_*(\omega; \sigma_v)}$ — фазовая ω -частотная характеристика фильтра;

$P_*(\omega; \sigma_v) = \text{Re} [\Phi_*(e^{j\omega T}; \sigma_v)]$ — вещественная ω -частотная характеристика $\Phi_*(e^{j\omega T}; \sigma_v)$;

$Q_*(\omega; \sigma_v) = \text{Im} [\Phi_*(e^{j\omega T}; \sigma_v)]$ — мнимая ω -частотная характеристика $\Phi_*(e^{j\omega T}; \sigma_v)$.

Частотные характеристики $\Phi_*(e^{j\omega T}; \sigma_v)$; $P_*(\omega; \sigma_v)$; $Q_*(\omega; \sigma_v)$ могут быть определены для любого σ_v в интервале от 0 до 1 по ω -передаточной функции непрерывной части импульсной САУ или одним из методов графического построения ЛЧХ дискретной САУ, например, методом, изложенным в [5].

3. Применение метода трапецидальных частотных характеристик к расчету переходной функции ИСАУ с фиксацией

Покажем применение к выражению (12) частотного метода вычисления переходной функции импульсной САУ с фиксацией с использованием трапецидальных характеристик и таблиц $h_x(t)$ -функций, разработанных в [1], [2].

Частотные характеристики $C_*(\omega; \sigma_v)$; $\Psi_*(\omega; \sigma_v)$; $P_*(\omega; \sigma_v)$; $Q_*(\omega; \sigma_v)$, параметром которых является локальное время σ , полностью определены в симметричном интервале от $-\frac{\pi}{T}$ до $+\frac{\pi}{T}$ [3], [5].

Применяя выражение (14) к (12), получим:

$$x(nT + \sigma T) \Big|_{\sigma=\sigma_v}^{n=0 \div \infty} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\frac{\pi}{T}} \frac{P_*(\omega; \sigma_v)}{\omega} \sin n\omega T d\omega; \quad (15)$$

$$x(nT + \sigma T) \Big|_{\sigma=\sigma_v}^{n=0 \div \infty} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\frac{\pi}{T}} \frac{Q_*(\omega; \sigma_v)}{\omega} \cos n\omega T d\omega. \quad (16)$$

Формула (15), аналогичная известному соотношению

$$x(t) = \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega$$

для непрерывных систем, позволяет использовать для определения переходной функции импульсной САУ с фиксацией по соответствующей вещественной характеристике методом трапецидальных частотных характеристик с применением таблиц $h_x(t)$ -функций [1], [2].

Исходным уравнением для вычисления $x(t)$ или $x(nT + \sigma T)$ является выражение (15), в котором σ придаются различные значения, лежащие в интервале $0 \div 1$.

Заметим, что вследствие принятых ограничений, аналогичных изложенным в [2], вещественные ω -частотные характеристики $P_*(\omega; \sigma_*)$ не имеют разрывов непрерывности в частотном диапазоне $0 \div \pm \frac{\pi}{T}$, причем значения $P_*(\omega; \sigma_*)$ на концах интервала определяются в общем случае структурой системы.

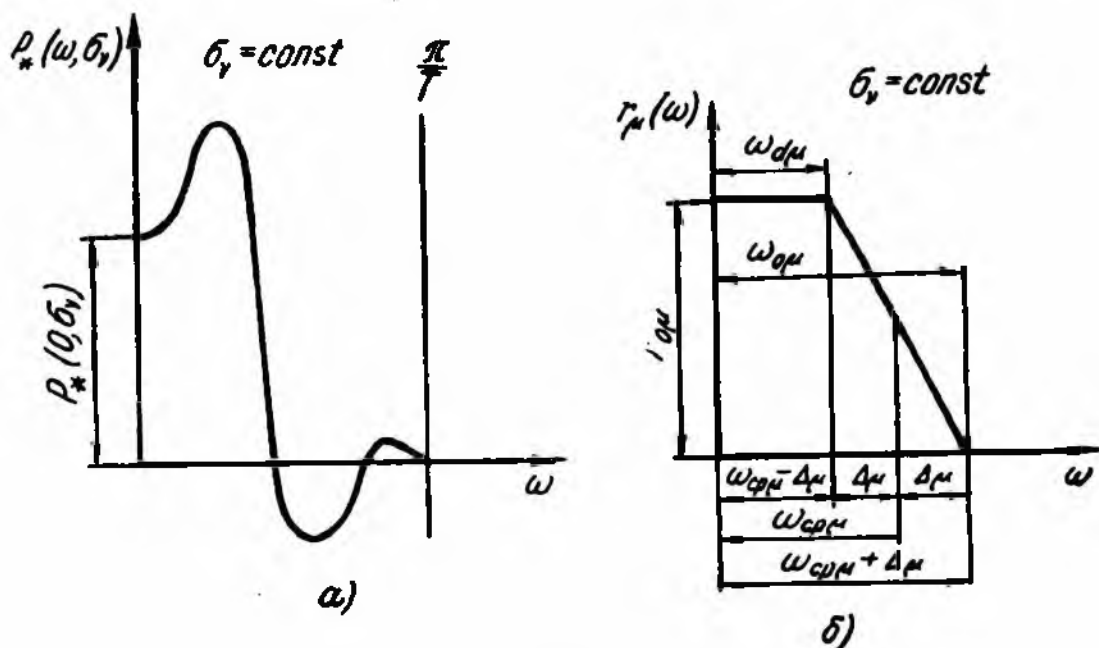


Рис. 4.

Типичная вещественная ω -характеристика расчетного фиктивного фильтра при некотором $\sigma = \sigma_*$ представлена на рис. 4.

Представим приближенно кривую $P_*(\omega; \sigma_*)$ при некотором σ_* в виде суммы N типовых кривых (трапеций, треугольников или прямоугольников), т. е.

$$P_*(\omega; \sigma_*) \approx \sum_{\mu=1}^N r_{\mu}(\omega; \sigma_*). \quad (17)$$

Такая аппроксимация $P_*(\omega; \sigma_*)$ не отличается от представления нешестественной (или мнимой) частотной характеристики замкнутой непрерывной системы типовыми трапециями [1], [2].

Общее уравнение μ -й трапеции, представленной на рис. 4, имеет такой вид:

$$r_{\mu}(\omega; \sigma_*) = \begin{cases} r_{0\mu} = \text{const} & \text{при } 0 < \omega < \omega_{\text{ср}\mu} - \Delta_{\mu}; \\ r_{0\mu} \frac{\omega_{\text{ср}\mu} + \Delta_{\mu} - \omega}{2\Delta_{\mu}} & \text{при } \omega_{\text{ср}\mu} - \Delta_{\mu} < \omega < \omega_{\text{ср}\mu} + \Delta_{\mu}; \\ 0 & \text{при } \omega_{\text{ср}\mu} + \Delta_{\mu} < \omega. \end{cases} \quad (18)$$

Фиктивная непрерывная переходная функция, а по ней дискретные значения реальной переходной функции в точках $nT + \sigma_* T$ (при $n = 0 \div \infty$), соответствующие μ -й типовой трапеции, заданной системой урав-

нений (18), подробно определяется в [1] и сводится к вычислению табличного интеграла вида

$$x_{\mu}(nT + \sigma T) \Big|_{\substack{n=0 \div \infty \\ \sigma=\sigma_v}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\frac{\pi}{T}} r_{\mu}(\omega; \sigma_v) \frac{\sin \omega T}{\omega} d\omega. \quad (19)$$

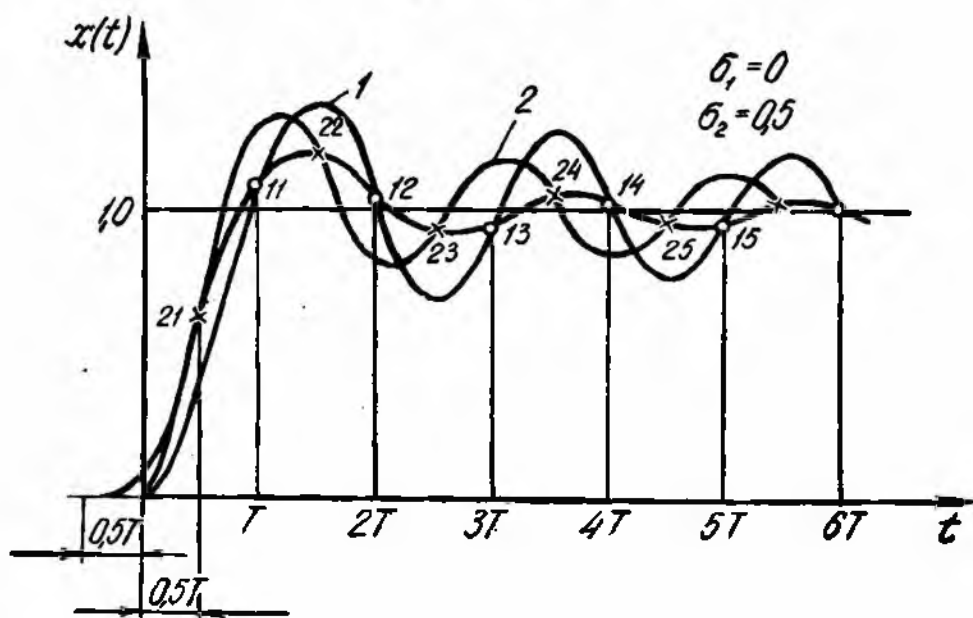


Рис. 5.

Дискретные значения при $\sigma = \sigma_v$ переходной функции $x(nT + \sigma T)$ импульсной системы с фиксацией можно получить, используя (19), (18), (17), т. е.

$$\begin{aligned} x(nT + \sigma_v T) \Big|_{\substack{n=0 \div \infty \\ \sigma=\sigma_v}} &\approx \frac{2}{\pi} \int_0^{+\frac{\pi}{T}} \sum_{\mu=1}^N r_{\mu}(\omega; \sigma_v) \frac{\sin \omega T}{\omega} d\omega = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^N \int_0^{+\frac{\pi}{T}} r_{\mu}(\omega; \sigma_v) \frac{\sin n\omega T}{\omega} d\omega. \end{aligned} \quad (20)$$

Практически при вычислении искомой переходной функции импульсной САУ методом трапецидальных частотных ω -характеристик относительному параметру σ придают значения 0; 0,5; 1,0; или 0; 0,25; 0,50; 0,75; 1,0 и т. д. в зависимости от вида импульсной переходной функции $k_3(t)$ системы и требуемой точности результата.

Каждому значению σ , соответствует вещественная характеристика $P_{\mu}(\omega; \sigma_v)$ и свой фиктивный непрерывный переходный процесс. Точки пересечения кривых фиктивных переходных функций с соответствующими значениями аргумента t , т. е. $0; T; 2T; \dots; 0 + 0,25T; T + 0,25T; \dots; 0 + 0,5T; T + 0,5T; 2T + 0,5T; \dots; 0 + 0,75T; T + 0,75T; \dots$ и т. д., для которых удовлетворяется интегральное соотношение вида (1), представляют собой дискретные значения искомой переходной функции импульсной системы. Эти точки на рис. 5 при $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = 0,5$ обозначены 11; 12; 13; 14; 15... — для кривой 1 ($\sigma_1 = 0$) и 21; 22; 23; 24; 25 — для кривой 2 ($\sigma_2 = 0,5$).

Пример. Для иллюстрации метода дискретных $h_i(t)$ -функций рассмотрим импульсную систему, представленную на рис. 6, а. Пусть $T = 0,5$ сек. Система относится к классу САУ, имеющих решение $x(t)$ в виде кусочно-линейной функции времени с разрывными производными.

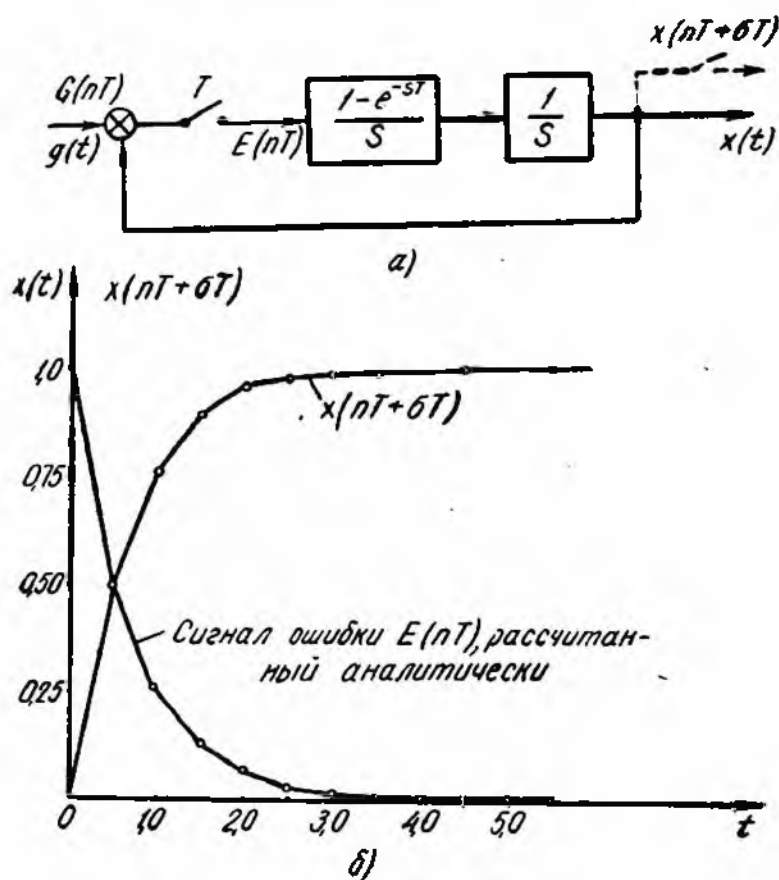


Рис. 6.

В соответствии с изложенной выше методикой получим:

$$W\{\Phi_\phi^*(z; \sigma)\} = \frac{[1 - (1 - 2\sigma)\omega](1 + \omega)}{\left[\frac{2 - T}{T}\omega + 1\right](1 - \omega)}, \quad (2)$$

где $W\{\Phi_\phi^*(z; \sigma)\}$ означает ω ; σ — преобразование от фиктивной функции $\Phi_\phi^*(z; \sigma)$.

При $\sigma_1 = 0$ из (21) получим:

$$\Phi_\phi^*(\omega; 0) = \frac{\omega + 1}{\frac{2 - T}{T}\omega + 1}. \quad (22)$$

Применяя к (22) переход от v -ЛЧХ к ω -ЛЧХ по формуле

$$\omega = \frac{2 \arctg v}{T},$$

приведенной в [3], и суммируя полученные ω -ЛЧХ с соответствующими характеристиками $Y_*(j\omega)$, определим вещественную характеристику $P_*(\omega; 0)$.

Аппроксимируем $P_*(\omega; 0)$ двумя трапециями, имеющими такие параметры:

$$\begin{aligned} \text{трапеция 1: } \omega_{d1} &= 0,2 \frac{1}{\text{сек}}; \quad \omega_{01} = 2,2 \frac{1}{\text{сек}}; \\ x_1 &= 0,091; \quad r_{01} = 0,8; \end{aligned}$$

трапеция II: $\omega_{d2} = 2,2 \frac{1}{\text{сек}}$; $\omega_{02} = 5,5 \frac{1}{\text{сек}}$;
 $\alpha_2 = 0,4$; $\gamma_{02} = 0,2$.

Здесь использованы обозначения, примененные в [2].

Дискретные значения $x(nT)$ при $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, вычисленные по таблицам $h_n(t)$ -функций, приведены в таблице (первая строка).

Таблица

$x(t)$ \ n	0	1	2	3	4	5	6	10
$x(nT)$	0	0,488	0,754	0,884	0,958	0,972	0,971	1,006
$x_{\text{анал.}}(nT)$	0	0,50	0,75	0,875	0,94	0,97	0,98	1,00

Во второй строке таблицы приведены значения $x_{\text{анал.}}(nT)$, вычисленные аналитически.

Аналогично изложенному можно рассчитывать дискретные значения $x(nT + \sigma T)$ при $\sigma_2 = 0,25$; $\sigma_3 = 0,5$; $\sigma_4 = 0,75$ и таким образом полностью определить переходную функцию $x(t) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ 0 < \sigma < 1}} x(nT + \sigma T)$ заданной

импульсной системы с фиксацией.

Переходная функция $x(t)$, представляющая собой кусочно-линейную функцию времени с разрывными производными первого и высших порядков, изображена на рис. 6, б.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Солодовников. О применении трапецидальных частотных характеристик к анализу качества САУ. «Автоматика и телемеханика», 1949, № 5.
2. В. В. Солодовников, Ю. И. Толчеев, Г. В. Крутикова. Частотный метод построения переходных процессов с приложением таблиц и номограмм. Гостехиздат, М., 1955.
3. Л. Т. Кузин. Расчет и проектирование дискретных систем управления. Машгиз, М., 1962.
4. Б. А. Фукс, Б. В. Шабат. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. Изд-во «Наука», М., 1964.
5. И. Н. Печорина. Методика построения ЛЧХ импульсных САУ. «Известия вузов. Электромеханика», 1960, № 3.