Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

# КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
# Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Математична модель та метод розв'язання задачі
про «зустріч» повітряного об'єкта
(тема)

Виконав:
студент _2_ курсу, групи _ПМм-20-1
Резніченко А.С.
(прізвище, ініціали)
Спеціальність
113 Прикладна математика
(код і повна назва спеціальності)
Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма
Прикладна математика
(повна назва освітньої програми)
Керівник проф. Тевяшев А.Д.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ _____ Тевяшев А.Д.
(підпис) (прізвище, ініціали)

2021 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет _інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
Кафедра _прикладної математики
Рівень вищої освіти _другий (магістерський)
Спеціальність _113 Прикладна математика
(код і повна назва)
Тип програми ____освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма _Прикладна математика
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____
(підпис)
"_____" _____ 2021 р.

# ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові _Резніченко Анні Сергіївні
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи _Математична модель та метод розв'язання задачі про «зустріч» повітряного об'єкта

затверджена наказом по університету від 05 листопада 2021 р. № 1641 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 грудня 2021 р.

3. Вихідні дані до роботи _місцезнаходження оптично-електронних станцій та засобів ураження повітряних об'єктів на поверхні землі в геодезичній $\left\|L_{0i}, B_{0i}, H_{0i}\right\|^T, i = 1,2,...,N$ і $\left\|L_{0j}, B_{0j}, H_{0j}\right\|^T, j = 1,2,...,n$, де $N$ – кількість оптично-електронних станцій, $n$ – кількість засобів ураження повітряних об'єктів, кут огляду по азимуту $\alpha = n \cdot 360^\circ$, кут місця $\beta = 0^\circ - 90^\circ$, засоби ураження повітряних об'єктів – «Шилка», дальність виявлення – 5 км

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі
1. Аналіз предметної області
2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання
3. Програмна реалізація
4. Результати обчислювального експерименту
5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій

1. Актуальність теми роботи
2. Постановка задачі
3. Аналіз предметної області
4. Метод чисельного аналізу
5. Результати обчислювального експерименту

## КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

| № | Назва етапів роботи | Термін виконання етапів роботи | Примітка |
|---|---|---|---|
| 1 | Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи | 8 – 14 листопада 2021 р. | виконано |
| 2 | Вибір та обґрунтування методу | 15 – 21 листопада 2021 р. | виконано |
| 3 | Розробка алгоритму і програми | 22 – 28 листопада 2021 р. | виконано |
| 4 | Проведення аналітичних досліджень та розрахунків | 29 листопада – 5 грудня 2021 р. | виконано |
| 5 | Робота над текстом пояснювальної записки | 6 – 9 грудня 2021 р. | виконано |
| 6 | Представлення роботи на рецензію в ЕК | 10 грудня 2021 р. | виконано |

Дата видачі завдання _8_ листопада 2021 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Тевяшев А.Д.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

# РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 89 с., 10 табл., 25 рис., 1 дод., 23 джерела.

ТРАЄКТОРІЯ, СИСТЕМА КООРДИНАТ, КУТ, ШВИДКІСТЬ, ЗОНА УРАЖЕННЯ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЄЛІПСОЇД РОЗСІЮВАННЯ, МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ.

Об’єкт дослідження – процес зустрічі снаряда ствольної зенітної артилерії з повітряним об’єктом (ПО).

Предмет дослідження – математичні моделі та методи аналізу траєкторії руху зенітних некерованих снарядів.

Мета роботи – розробити математичну модель та метод розв’язання задачі про «зустріч» повітряного об’єкта.

Методи дослідження – аналітичні та чисельні методи розв’язання систем диференційних рівнянь, математичне комп’ютерне моделювання.

В кваліфікаційній роботі розглянута задача про «зустріч» повітряного об’єкта у повітряному просторі. Проведено аналіз предметної області проблеми ураження повітряних цілей. Розглянуто математичні методи. Обрано метод, який необхідний для розв’язання даної задачі.

Реалізовано комп'ютерну програму в середовищі Matlab і отримано розв’язки розглядуваної задачі. Був виконаний аналіз результатів роботи програми.

# ABSTRACT

Introductory note: 89 pages, 10 tables, 25 figures, 1 appendix, 23 sources.

TRAJECTORY, COORDINATE SYSTEM, ANGLE, SPEED, IMPACT ZONE, DIFFERENTIAL EQUATIONS, ELLIPSOID SCATTERING, MATHEMATICAL MODEL.

The object of research is the process of meeting the projectile of anti-aircraft artillery with the air object (AP).

Subject of analysis - mathematical models and methods of analysis of the trajectory of anti-aircraft unguided projectiles.

The purpose of the work is to develop a mathematical model and a method for solving the problem of "meeting" an air object.

Research methods - analytical and numerical methods for solving systems of differential equations, mathematical computer modeling.

The qualification work considers the problem of "meeting" an air object in the airspace. The analysis of the subject area of the problem of hitting air targets is carried out. Mathematical methods are considered. The method necessary for solving this problem is chosen.

Implemented a computer program in the Matlab environment and obtained solutions to this problem. An analysis of the results of the program was performed.

# ЗМІСТ

С.

Вступ ..... 8

1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження ..... 10

1.1 Аналіз предметної області ..... 10

1.2 Змістовна та формальна постановка задачі ..... 14

1.2.1 Змістовна постановка задачі ..... 14

1.2.2 Формальна постановка задачі ..... 15

1.3 Постановка задач дослідження ..... 16

2 Математичні моделі та методи розв'язання задачі про «зустріч» ..... 18

2.1 Вибір і обґрунтування систем координат ..... 18

2.1.1 Математична модель залежності між місцем розташування ПО в місцевій системі координат і вимірюваними значеннями кута місця, азимута і похилої дальності ..... 21

2.1.2 Математична модель перерахунку вектора параметрів руху ПО з місцевої системи координат в Грінвічську систему координат ..... 23

2.1.3 Математична модель перерахунку вектора параметрів руху ПО з Грінвічської системи координат в місцеву систему координат ..... 24

2.1.4 Математична модель моніторингу повітряного простору ..... 26

2.2 Вибір і обґрунтування математичної моделі просторового руху артилерійського снаряда ..... 34

2.2.1 Математична модель просторового руху снаряда без урахування опору повітря ..... 34

2.2.2 Побудова меж зони безпеки та зони ураження ..... 37

2.2.3 Математична модель просторового руху снаряда при лінійній залежності сили опору від швидкості руху ..... 39

2.2.4 Математична модель просторового руху снаряда при квадратичній залежності сили опору від швидкості руху ..... 41

2.2.5 Уточнена математична модель просторового руху снаряда ..... 44

2.2.6 Метод Рунге-Кутта четвертого порядку для розв’язання систем диференціальних рівнянь ..... 46
2.2.7 Математична постановка та метод розв’язання задачі про «зустріч» ..... 50
2.2.7.1 Попередня обробка оперативної інформації про ПО ..... 51
2.2.7.2 Структуризація та розв’язання задачі про «зустріч» ..... 53
2.3 Побудова еліпсоїду розсіювання артилерійського снаряда ствольної зенітної артилерії ..... 54
2.3.1 Побудова еліпсоїда розсіювання для моделі траєкторії руху снаряда без урахування опору повітря ..... 55
2.3.2 Побудова еліпсоїда розсіювання для моделі з лінійною залежністю сили опору повітря від швидкості польоту снаряда ..... 59
2.3.3 Побудова еліпсоїда розсіювання для моделі з квадратичною залежністю сили опору повітря від швидкості польоту снаряда ..... 61
3 Програмна реалізація ..... 63
3.1 Пакет прикладних програм Matlab ..... 63
3.2 Опис програми ..... 66
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз ..... 67
4.1 Побудова зон ураження та безпеки ..... 67
4.2 Моделювання траєкторії польоту артилерійського снаряда в атмосфері .. 72
4.3 Результати розв’язання задачі про «зустріч» ..... 75
Висновки ..... 78
Перелік джерел посилання ..... 79
Додаток А Лістинг програми ..... 81

# ВСТУП

**Актуальність теми.** Незважаючи на те, що артилерійська зброя поступово поступається своїм місцем більш далекосяжним ракетам, як і раніше в плані фінансових витрат і виправданості в локальних бойових діях, артилерія утримує свою нішу. А оскільки глобальні конфлікти зараз практично неможливі – внаслідок існування стратегічної ядерної зброї, що діє як фактор стримування, артилерія майже й не втрачає своєї актуальності. Її переваги в дуже тривалому досвіді використання.

Створення нових способів ураження повітряних об’єктів вимагає проведення значного обсягу дорогих експериментальних досліджень. Щоб зменшити витрати на реалізацію даних досліджень використовують фізико-математичні моделі процесу зустрічі снаряду з повітряним об’єктом, що враховує природу та послідовність явищ. Розробка нового підходу до проектування процесів при зустрічі снаряду з повітряним об’єктом і ефективних обчислювальних алгоритмів в поєднанні з можливостями новітніх електронно обчислювальних машин дозволяє ставити методи чисельного дослідження в один ряд з натуральними експериментами. До переваг таких досліджень можна віднести:

– помітне підвищення інформативності при моделюванні;

– можливість оптимізації параметрів;

– швидке налаштування моделі на новий об’єкт.

Актуальність виконуваної роботи обумовлена ще наступним факторам: відсутністю в літературі стрункої і цілісної теорії руху тіл в однорідному полі тяжіння Землі з урахуванням розмірів тіл і опором середовища.

У зв'язку з цим, розробка моделі зустрічі засобів ураження повітряних об’єктів (ЗУПО) з повітряним об’єктом стає актуальною [1].

**Мета і завдання кваліфікаційної роботи.** Метою кваліфікаційної роботи є розробка математичної моделі та методу розв’язання задачі про «зустріч» повітряного об’єкта. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі про «зустріч» повітряного об’єкта»;

– розглянути стартові системи координат, які необхідні для побудови математичної моделі;

– розглянути математичні моделі просторового руху снаряда;

– побудувати межі зони ураження та межі зони безпеки;

– здійснити програмну реалізацію математичної моделі задачі про «зустріч»;

– оцінити ефективність математичної моделі та метода її розв’язання.

*Об’єктом дослідження є* процес зустрічі снаряда ствольної зенітної артилерії з повітряним об’єктом.

*Предметом дослідження є* математичні моделі та методи аналізу траєкторії руху зенітних некерованих снарядів.

**Методи дослідження.** Аналітичні та чисельні методи розв’язання систем диференційних рівнянь, математичне комп’ютерне моделювання.

# 1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

## 1.1 Аналіз предметної області

Зовнішня балістика належить до найважливіших і найдавніших наук прикладної спрямованості, поява якої було зумовлено створенням та бойовим застосуванням вогнепальної зброї, датованими серединою XIV ст.

Щоб отримати можливість змінювати дальність польоту снаряда зі зміною кута його кидання, знадобилися розробка способів вимірювання цього кута та визначення залежності між кутом піднесення та дальністю метання тіл з різною масою, а також введення поправки на вітер при навісній стрільбі. Так народилася зовнішня балістика ствольних систем.

Зі збільшенням дальностей стрілянини та початкових швидкостей польоту снарядів визначення їх траєкторій без урахування опору середовища на основі параболічної теорії стало призводити до неприпустимо великих помилок. Колишня теорія не дозволяла вирішувати завдання, висунуті практикою. У зв'язку з цим виникла потреба у розробці теоретичних основ та практичних методів обліку опору повітря під час проведення балістичних розрахунків. Наукові основи розв’язання цього завдання було закладено видатним англійським ученим І. Ньютоном.

Зовнішня балістика визначає форму траєкторії, найбільші та найменші кути кидання, вимоги до значень перевантажень. Визначення стійкості руху снарядів різної конструкції є одним із найважливіших завдань зовнішньої балістики. Теорія поправок, що базується на обліку відхилень дійсних «обурених» умов стрілянини від номінальних, дозволяє уточнити установки, що визначають початкові умови стрілянини за нерухомими та рухомими цілями. Розрахунок розсіювання снарядів та очікуваної точності стрільби дозволяє оцінити передбачувану витрату снарядів при вирішенні того чи іншого тактичного завдання. При стрільбі по рухомим цілям методами зовнішньої балістики визначають ку-

ти попередження та їх зміну у процесі руху цілі.

Незважаючи на особливості балістичних завдань для різних класів снарядів, постановка цих завдань та подальші їх розв’язання багато в чому залишаються загальними. Рух снарядів підпорядковується тим самим законам механіки і описується однотипними диференціальними рівняннями. Найчастіше розрізняються лише праві частини рівнянь, що містять конкретний комплекс чинних сил та моментів [3].

Завдання зовнішньої балістики прийнято поділяти п'ять груп (чи, інакше, п'ять основних завдань).

Перше завдання полягає у розрахунку траєкторії ПО за наперед відомими даними. Для розв’язання цього завдання необхідно насамперед правильно визначити, які сили діють на ПО в польоті, дізнатися, які їх значення кожен момент часу. Потім слід скласти систему диференціальних рівнянь (СДВ) руху ПО з урахуванням усіх чинних сил. В результаті розв’язання СДУ за заданих початкових умов знаходяться основні параметри руху та координати центру мас (ЦМ) ПО у функції часу, за якими може бути побудована траєкторія. Перше завдання іноді називають основним (або прямим) завданням зовнішньої балістики. Число сил, що діють на ПО в процесі руху, характер їх зміни в польоті, а також кількість рівнянь, що описують рух та їх вид, залежать від призначення ПО, його конструкції, способу стабілізації та передбачуваної траєкторії, а також етапу життєвого циклу виробу, для якого проводяться відповідні балістичні дослідження.

Друге, або так зване зворотне, завдання полягає у визначенні проектних балістичних параметрів руху за заданими тактико-технічними характеристиками та вимогами бойового застосування, що пред'являються до ракетної чи артилерійської системи. Важливим етапом розв’язання цього завдання є відшукання оптимальних режимів руху, що доставляють екстремум заданому критерію.

Визначення умов стабілізації та стійкості руху ПО різного призначення становить зміст третього завдання зовнішньої балістики. Якщо ракета чи снаряд

нестійкі у польоті, то не можна очікувати, що вони полетять у заданому напрямку.

Проектні розрахунки, зазвичай, ведуться для ідеально виконаного снаряда за середніх метеорологічних умов, прийнятих за номінальні (нормальні). Однак насправді існує низка факторів, що викликають відхилення снаряда від розрахункової траєкторії. Розсіювання траєкторій окремих пострілів або пусків ракет може залежати як від конструктивних і технологічних факторів (наприклад, від ексцентриситету сили тяги), що викликається ними, так і від відхилень умов польоту від розрахункових (наприклад, від зміни метеофакторів, нерівномірного розпалу критичного перерізу сопла та ін.). Вивчення факторів, що впливають на розсіювання траєкторій ПО, визначення ступеня їх впливу та розгляд способів зменшення розсіювання та підвищення точності стрілянини – четверте завдання зовнішньої балістики.

П'яте завдання формулюється як завдання розробки методичного забезпечення складання таблиць стрільби та оперативних алгоритмів підготовки вихідних даних для проведення артилерійської стрільби або пусків ракет

При розв'язанні задач зовнішньої балістики снарядів більша кількість діючих факторів з меншою кількістю припущень може бути врахована під час проведення розрахунків чисельним інтегруванням диференціальних рівнянь руху літальних апаратів з використанням електронних цифрових обчислювальних машин (ЕЦВМ). Тільки дуже невеликий клас порівняно простих завдань можна вирішити табличними чи аналітичними методами.

Значний внесок у вивчення теоретичних та практичних питань зовнішньої балістики зробили такі вчені, як Л. Ейлер, Н. В. Маєвський, Н. Є. Жуковський, С. А. Чаплігін, А. Н. Крилов, Я. М. Шапіро, Д А. Вентцель, Б. Н. Окуньов, В. С. Пугачов та ін Завдання забезпечення стійкості снарядів набуло особливої актуальності у другій половині XIX століття у зв'язку з появою нарізної зброї та стабілізацією снарядів за рахунок швидкого обертання. Перші результати в теорії стійкості руху снарядів, що обертаються, були отримані Н. В. Маєвським. Подальший розвиток теорія руху снаряда щодо центру мас отримала у працях

А. Н. Крилова, Д. А. Вентцеля, Б. Н. Окуньова, Я. М. Шапіро та інші. Вперше шість диференціальних рівнянь, що описують рух снаряда як рух твердого тіла в просторі, були складені та спільно вирішені академіком В. С. Пугачовим у 1933 [5]. Також їм було розроблено досконаліші методи чисельного інтегрування диференціальних рівнянь руху, поліпшено методику складання таблиць стрільби артилерійського і стрілецького озброєння. Професором Д. А. Вентцелем [2] була розроблена сучасна теорія поправок з урахуванням безлічі факторів, що впливають на рух снаряда по траєкторії. Також він описав рух біля центру мас оперених снарядів з урахуванням усіх складових аеродинамічних сил та моментів. Академіками Н. Є. Жуковським і С. А. Чаплыгіним досліджувалося питання про найвигіднішу форму снаряда, що виникло після Першої світової війни у зв'язку з необхідністю збільшення дальності стрілянини. Сучасним питанням розробки математичних моделей та чисельних методів для розв’язання завдань зовнішньої балістики присвячені дослідження вчених Іжевського державного технічного університету імені М. Т. Калашникова (А. А. Коновалов, Ю. В. Миколаїв, С. А. Писарєв та ін.), Московського державного технічного університету імені М.Е. Керт, А. С. Шалигін, Є. А. Знаменський та ін., Томського державного університету (В. Д. Мерзляков, І. Б. Богоряд, В. І. Біматов) [9].

До нашого часу у балістичних розрахунках застосовуються закони опору, отримані з урахуванням обробки результатів великої кількості досвідів. Це відомі еталонні залежності коефіцієнта лобового опору за формулою Сіаччі, «закон 1930 року», «закон 1943 року» для снарядів, що обертаються, «закон 1958 року» для оперених снарядів. Для визначення індивідуальних коефіцієнтів опору використовуються поправочні коефіцієнти форми, що визначаються переважно експериментально на основі розв’язання не завжди коректних обернених завдань [10]. Більшість досліджень зовнішньобалістичних процесів досі використовуються спрощені математичні моделі руху, у яких снаряд представлений як матеріальної точки. Перехід до більш складних моделей, що описують просторовий рух твердого тіла з урахуванням аеродинаміки обтікання зовнішнім се-

редовищем, досі повною мірою не проводився.

1.2 Змістовна та формальна постановка задачі

1.2.1 Змістовна постановка задачі

Задача про «зустріч» снаряда з ПО полягає в розрахунку траєкторії його руху таким чином, що з точки з координатами розташування ЗУПО $[0,0,0]$ (рисунок 1.1) в момент пострілу $t$ за час $l$ снаряд досяг точки розташування ПО з прогнозованими координатами $\left[\bar{X}_{t+l}, \bar{Y}_{t+l}, \bar{Z}_{t+l}\right]^{\mathrm{T}}$.

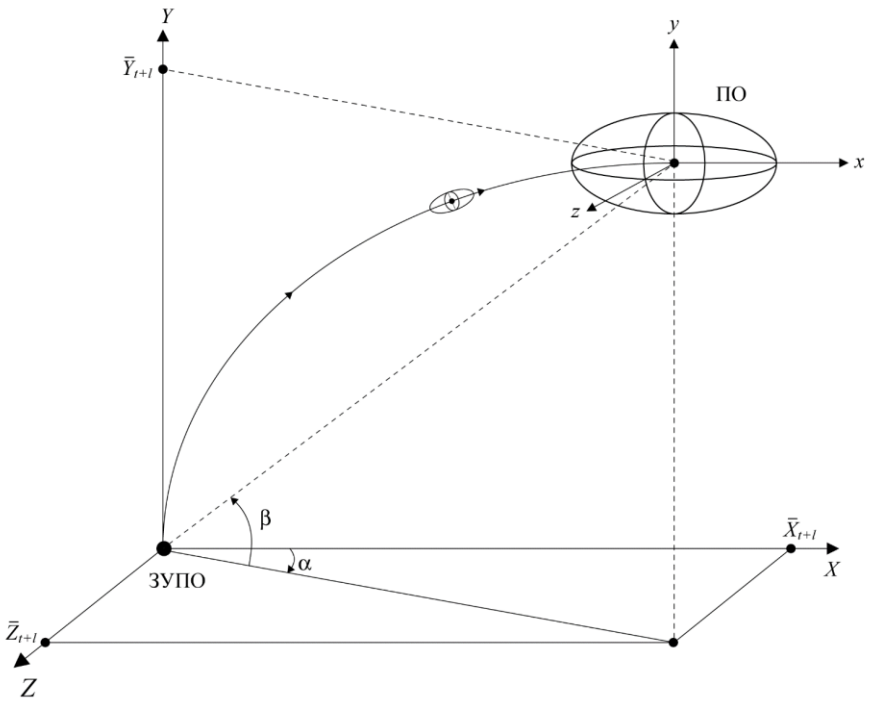


Рисунок 1.1 – До задачі про «зустріч» снаряда з ПО

Траєкторія руху ПО – це лінія в просторі, по якій рухається центр маси об'єкта, який являє собою впорядковану послідовність точок простору, в яких знаходилась, знаходиться або буде знаходитися центр маси ПО. $|| X_{0t}, Y_{0t}, Z_{0t} ||^{T}, t = 1,2,\ldots,$ – координати місце розташування ПО в фіксований момент часу в ГСК. Траєкторія руху снаряда ствольної зенітної артилерії –

$|| X_{ct}, Y_{ct}, Z_{ct} ||^T, t = 1,2,\ldots$, в місцевій системі координат.

Форма траєкторії залежить від конкретної системи координат, в якій описується траєкторія ПО. Проблема, яку необхідно вирішити – це вибір і обґрунтування вибору системи координат.

### 1.2.2 Формальна постановка задачі

Початковими даними для формальної постановки задачі про «зустріч» є:

а) місцева декартова система координат – МДСК $(X, Y, Z)$. У точці з координатами $\|0,0,0\|^{\mathrm{T}}$ знаходяться ЗУПО (ствольна зенітна установка);

б) зона ураження ЗУПО - $\Omega$ у вигляді півсфери радіуса $R$ з центром у точці $\|0,0,0\|^{\mathrm{T}}$;

в) для кожного моменту часу відомі прогнозовані оцінки місця розташування ПО МДСК в, які обчислюються у вигляді умовних математичних очікувань майбутніх координат місця розташування ПО у момент часу $t$ з упередженням $l$, тобто $\|\bar{X}_{t+l}, \bar{Y}_{t+l}, \bar{Z}_{t+l}\|^{\mathrm{T}}$;

г) модель просторового руху артилерійського снаряда виду:

$$m \cdot \frac{dV_x}{dt} = -F_x, \tag{1.1}$$

$$m \cdot \frac{dV_y}{dt} = -F_y, \tag{1.2}$$

$$m \cdot \frac{dV_z}{dt} = -F_z, \tag{1.3}$$

з відомими початковими умовами при $t = 0$:

$$X(0)=0,\ Y(0)=0,\ Z(0)=0,$$
$$V_x=V_0\cos\beta\cos\alpha,\ V_y=V_0\sin\beta,\ V_z=V_0\cos\beta\sin\alpha, \tag{1.4}$$

та граничними умовами:

$$||\ \bar{X}_{t+l},\bar{Y}_{t+l},\bar{Z}_{t+l}\ ||,$$

де $V_0$ – початкова швидкість снаряда;

$\beta$ – кут піднесення (прицілювання, пострілу);

$F_x$, $F_y$, $F_z$ – проекція сил, що діють на артилерійський снаряд по осі *X*, *Y*, *Z*, відповідно.

При входженні ПО у зону ураження, тобто при

$$\rho=\sqrt{\bar{X}^2_{t+l}+\bar{Y}^2_{t+l}+\bar{Z}^2_{t+l}}<R, \tag{1.5}$$

необхідно визначити: момент часу $t$, в який буде зроблено постріл із ЗУПО; $l$ – час польоту снаряда до цілі; кут прицілювання (пострілу) – $\beta^*_{t+l}$; момент «зустрічі» снаряда і цілі $t^*=t+l$, при якому:

$$\rho^*=\min_{\beta^*_{t+l}\in\Omega\cap\Omega_\beta}\sqrt{(X(l)-\bar{X}_{t+l})^2+(Y(l)-\bar{Y}_{t+l})^2+(Z(l)-\bar{Z}_{t+l})^2}, \tag{1.6}$$

при умові $\Omega_\beta=\left(5^\circ\le\beta^*_{t+l}\le 85^\circ\right)$.

Задача (1.6) при умовах (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) належить до класу зворотних задач динаміки.

## 1.3 Постановка задач дослідження

Для структуризації та розв’язання задачі про «зустріч» артилерійського снаряда з повітряним об’єктом необхідно виконати:

– вибрати і обґрунтувати стартові системи координат для побудови математичної моделі;

– розглянути математичну модель просторового руху снаряда без урахування опору повітря;

– розглянути математична модель просторового руху снаряда при лінійній залежності сили опору від швидкості руху;

– розглянути математичну модель просторового руху снаряда при квадратичній залежності сили опору від швидкості руху;

– побудувати межі зони ураження та зони безпеки для конкретного типа ЗУПО;

– побудувати еліпсоїд розсіювання артилерійського снаряда ствольної зенітної артилерії;

– здійснити структуризацію метода розв’язання задачі про «зустріч»;

– здійснити програмну реалізацію математичної моделі задачі про «зустріч»;

– оцінити ефективність математичної моделі та метода її розв’язання.

# 2 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО «ЗУСТРІЧ»

## 2.1 Вибір і обґрунтування систем координат

Для побудови моделі моніторингу повітряного простору сенсорною мережею просторово розподілених ОЕС, розміщених на поверхні землі, будемо використовувати геоцентричні (з початком відліку в центрі маси Землі $A$) і топоцентричні (з початком відліку в деякій точці $O$ на поверхні Землі) системи координат.

Грінвічська система координат (ГСК) є геоцентричною відносною системою координат і визначається наступним чином [2]:

– вісь $AZ_{\text{г}}$ спрямована по осі обертання Землі до Північного полюсу;

– вісь $AX_{\text{г}}$ проходить через точку перетину Гринвічського меридіана з площиною екватора;

– вісь $AY_{\text{г}}$ доповнює прямокутну систему до правої.

В ГСК місце розміщення ОЕС, ЗУПО і ЦВ на поверхні землі може бути задане вектором просторових прямокутних координат $\left\|X_{0\text{г}}, Y_{0\text{г}}, Z_{0\text{г}}\right\|^{\text{T}}$ і вектором геодезичних координат $\left(L, B, H\right)$.

Геодезична широта $B$ – це кут між нормаллю і площиною екватора. Геодезична довгота $L$ – це кут між площиною меридіана даної точки і площиною початкового меридіана. Геодезичною висотою $H$ є відрізок нормалі від точки розміщення ОЕС, ЗУПО і ЦВ до поверхні еліпсоїда.

Місцева система координат (МСК) є топоцентричною системою координат і визначається наступним чином:

– вісь $OY_{\text{м}}$ спрямована по прямовисній лінії до земної поверхні;

– вісь $OX_{\text{м}}$ розташована в площині, перпендикулярній прямовисній лінії в точці $O$, і становить з площиною меридіана початку системи координат кут

$A_m$ – геодезичний азимут, відлічуваний по напрямку руху годинникової стрілки від напрямку на північ;

– вісь $OZ_м$ проведена так, щоб утворилася права прямокутна система координат.

Координати місця розташування ОЕС і ЗУПО вимірюються високоточними засобами супутникової GPS навігації і представляються у вигляді вектора початку місцевої системи координат в Грінвічській системі координат $\|X_{0г}, Y_{0г}, Z_{0г}\|^{T}$ або у вигляді вектора $(L, B, H)$. Елементи вектора початку місцевої системи координат в Грінвічській системі координат $\|X_{0г}, Y_{0г}, Z_{0г}\|^{T}$ обчислюються за формулами:

$$X_{0г} = (N + H) \cdot \cos L \cdot \cos B, \tag{2.1}$$

$$Y_{0г} = (N + H) \cdot \sin L \cdot \cos B, \tag{2.2}$$

$$Z_{0г} = \left(N \cdot (1 - e^2) + H\right) \cdot \sin B, \tag{2.3}$$

$$N = \frac{a_3}{\sqrt{1 - e_3^2 \cdot \sin^2 B}}, \tag{2.4}$$

де $a_3$, $e_3$ – параметри загальноземного еліпсоїда;

$a_3 = 6378{,}137$ км – велика піввісь;

$e_3^2 = 0{,}0066943800667647$ – квадрат першого ексцентриситету;

$B$ – геодезична широта початку місцевої системи координат;

$L$ – геодезична довгота початку місцевої системи координат;

$H$ – геодезична висота початку місцевої системи координат;

$A_m$ – геодезичний азимут місцевої системи координат.

Обчислення геодезичних координат $(L, B, H)$ по відомим просторовим прямокутним $\|X, Y, Z\|^{T}$ вимагає ітераційного процесу.

Геодезична довгота $L$ обчислюється за формулою:

$$\operatorname{tg} L = \frac{Y}{X}. \tag{2.5}$$

Оскільки $L = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)$ обчислює головне значення кута $L$ (тобто $-\frac{\pi}{2} \le L \le +\frac{\pi}{2}$), а довгота може мати позитивні значення в межах від 0 до $\pi$ (східна довгота) і негативні значення в межах від 0 до $-\pi$, то треба дещо уточнити:

– якщо $X < 0$ і $Y > 0$, то $L = L + \pi$;

– якщо $X < 0$ і $Y < 0$, то $L = L - \pi$;

– якщо $X < 0$ і $Y = 0$, то $L = \pi$.

Геодезичну широту $B$ обчислюють ітераційним методом:

а) наближене значення $B_0$ обчислюють за формулою:

$$\operatorname{tg} B_0 = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2} \cdot (1 - e_3^2)}; \tag{2.6}$$

б) наближене значення $N_0$ обчислюють за формулою:

$$N_0 = \frac{a_3}{\sqrt{1 - e_3^2 \cdot \sin B_0}}; \tag{2.7}$$

в) висоту над еліпсоїдом за формулою:

$$H = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos B_0} - N_0; \tag{2.8}$$

г) уточнене значення широти за формулою:

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2} \cdot \left(1 - e_3^2 \cdot \frac{N_0}{N_0 + H}\right)}. \tag{2.9}$$

Тепер слідує перевірка: якщо $B - B_0 < \varepsilon$, процес ітерації припиняється, інакше $B_0$ привласнюємо значення $B$ і розпочинаємо з пункту 2). Після набуття точного значення геодезичної широти $B$ обчислюємо геодезичну висоту $H$ за формулою:

$$H = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos B} - N, \tag{2.10}$$

де

$$N = \frac{a_3}{\sqrt{1 - e_3^2 \cdot \sin^2 B}}, \tag{2.11}$$

де $a_3$, $e_3$ – параметри загальноземного еліпсоїда;

$a_3 = 6378{,}137$ км – велика піввісь;

$e_3^2 = 0{,}0066943800667647$ – квадрат першого ексцентриситету.

### 2.1.1 Математична модель залежності між місцем розташування ПО в місцевій системі координат і вимірюваними значеннями кута місця, азимута і похилої дальності

Кут місця $\beta$ і азимут $\alpha$ напрямку на ПО визначаються в системі координат по вектору положення ПО в МСК ОЕС $\vec{X}_{\text{м}} = \left\| X_{\text{м}}, Y_{\text{м}}, Z_{\text{м}} \right\|^{\text{T}}$ за такими формулами:

$$\beta = \arctan \frac{Y_{\text{м}}}{\sqrt{X_{\text{м}}^2 + Z_{\text{м}}^2}}, \tag{2.12}$$

$$\alpha = \arctan \frac{Z_{\text{м}}}{X_{\text{м}}}. \tag{2.13}$$

Оскільки при обчисленні $\beta$ із (2.12) обчислюється головне значення кута $\beta$ (тобто $-\frac{\pi}{2} \le \beta \le +\frac{\pi}{2}$), а азимут $\alpha$ обчислюється із (2.13) і може змінюватися від 0 до $2\pi$, то уточнюємо:

– якщо $X_{\text{м}} < 0$, то $\alpha = \alpha + \frac{\pi}{2}$

– якщо $\alpha < 0$ і $X_{\text{м}} \ge 0$, то $\alpha = \alpha + 2\pi$.

Похила дальність (відстань) між ОЕС і ПО з координатами $\left\| X_{\text{м}}, Y_{\text{м}}, Z_{\text{м}} \right\|^{\text{T}}$ визначається виразом:

$$D = \sqrt{X_{\text{м}}^2 + Y_{\text{м}}^2 + Z_{\text{м}}^2}. \tag{2.14}$$

ОЕС може працювати в двох режимах:

Режим 1. Відкрите спостереження за місцем розташування ПО. Для кожного моменту часу $t$ здійснюється вимір трьох параметрів – кута місця $\beta$, азимута $\alpha$ і похилої дальності $D$ від ОЕС до ПО. В цьому випадку компоненти вектора координат ПО $\vec{X}_{\text{м}} = \left\| X_{\text{м}}, Y_{\text{м}}, Z_{\text{м}} \right\|^{\text{T}}$ в МДСК ОЕС визначаються за такими формулами:

$$Y_{\text{м}} = D \sin\beta, \tag{2.15}$$

$$X_{\text{м}} = D \cos\beta \cos\alpha, \tag{2.16}$$

$$Z_{\text{м}} = D \cos\beta \sin\alpha, \tag{2.17}$$

Режим 2. Приховане спостереження за місцем розташування ПО. Для кожного моменту часу $t$ $i$-ої ОЕС здійснюється вимір двох параметрів: кута місця – $\beta_i$ та азимута – $\alpha_i$. При цьому лазерний далекомір $i$-ої ОЕС не використовується, ПО лазерним променем не опромінюється і, отже, встановити факт спостереження за ПО практично неможливо. В цьому випадку, для визначення координат місця розташування ПО, необхідна додаткова інформація про результати вимірювання кута місця – $\beta_j$ та азимута – $\alpha_j$ на цей же ПО, від інших $j$-их ОЕС кластера [4].

### 2.1.2 Математична модель перерахунку вектора параметрів руху ПО з місцевої системи координат в Грінвічську систему координат

Модель перерахунку вектора параметрів руху ПО $\vec{X}_{\text{м}} = \left\| X_{\text{м}}, Y_{\text{м}}, Z_{\text{м}}, V_{x\text{м}}, V_{y\text{м}}, V_{z\text{м}} \right\|^{\text{T}}$ з місцевої системи координат в вектор параметрів руху $\vec{X}_{\text{г}} = \left\| X_{\text{г}}, Y_{\text{г}}, Z_{\text{г}}, V_{x\text{г}}, V_{y\text{г}}, V_{z\text{г}} \right\|^{\text{T}}$ в Грінвічській системі координат має вигляд:

$$\vec{X}_{\text{г}} = \left\| \begin{matrix} A_{\text{гм}} & 0 \\ 0 & A_{\text{гм}} \end{matrix} \right\| \cdot \vec{X}_{\text{м}} + \vec{X}_{0\text{г}}. \qquad (2.18)$$

Елементи матриці $A_{\text{гм}}$ обчислюються за формулою:

$$A_{\text{гм}} = \left\| \begin{matrix} -\sin L \cdot \sin A_m - \cos L \cdot \sin B \cdot \cos A_m & \cos L \cdot \cos B & -\sin L \cdot \cos A_m + \cos L \cdot \sin B \cdot \sin A_m \\ \cos L \cdot \sin A_m - \sin L \cdot \sin B \cdot \cos A_m & \sin L \cdot \cos B & \cos L \cdot \cos A_m + \sin L \cdot \sin B \cdot \sin A_m \\ \cos B \cdot \cos A_m & \sin B & -\cos B \cdot \sin A_m \end{matrix} \right\|.$$

Вектор $\vec{X}_{0\text{г}}$ задається у вигляді $\vec{X}_{0\text{г}} = \left\| X_{0\text{г}}, Y_{0\text{г}}, Z_{0\text{г}}, 0, 0, 0 \right\|^{\text{T}}$.

Елементи вектора початку місцевої системи координат в Грінвічській

системі координат $\left\| X_{0г}, Y_{0г}, Z_{0г} \right\|^{\mathrm{T}}$ обчислюються за формулами:

$$X_{0г} = \left(N + H\right) \cdot \cos L \cdot \cos B, \tag{2.19}$$

$$Y_{0г} = \left(N + H\right) \cdot \sin L \cdot \cos B, \tag{2.20}$$

$$Z_{0г} = \left(N \cdot \left(1 - e^2\right) + H\right) \cdot \sin B, \tag{2.21}$$

$$N = \frac{a_3}{\sqrt{1 - e_3^2 \cdot \sin^2 B}}, \tag{2.22}$$

де $a_3$, $e_3$ – параметри загальноземного еліпсоїда;

$a_3 = 6378{,}137$ км – велика піввісь;

$e_3^2 = 0{,}0066943800667647$ – квадрат першого ексцентриситету;

$B$ – геодезична широта початку місцевої системи координат;

$L$ – геодезична довгота початку місцевої системи координат;

$H$ – геодезична висота початку місцевої системи координат;

$A_m$ – геодезичний азимут місцевої системи координат [5].

### 2.1.3 Математична модель перерахунку вектора параметрів руху ПО з Грінвічської системи координат в місцеву систему координат

Формули перерахунку вектора параметрів руху ПО $\vec{X}_{г} = \left\| X_{г}, Y_{г}, Z_{г}, V_{xг}, V_{yг}, V_{zг} \right\|^{\mathrm{T}}$ з Грінвічській системи координат в вектор параметрів руху $\vec{X}_{м} = \left\| X_{м}, Y_{м}, Z_{м}, V_{xм}, V_{yм}, V_{zм} \right\|^{\mathrm{T}}$ в місцевій системі координат мають вигляд:

$$\vec{X}_{м} = \left\| \begin{matrix} A_{гм} & 0 \\ 0 & A_{гм} \end{matrix} \right\|^{\mathrm{T}} \cdot \left( \vec{X}_{г} - \vec{X}_{0г} \right). \tag{2.23}$$

Елементи матриці $A_{\text{гм}}$ обчислюються за формулою:

$$A_{\text{гм}} = \begin{Vmatrix} -\sin L \cdot \sin A_m - \cos L \cdot \sin B \cdot \cos A_m & \cos L \cdot \cos B & -\sin L \cdot \cos A_m + \cos L \cdot \sin B \cdot \sin A_m \\ \cos L \cdot \sin A_m - \sin L \cdot \sin B \cdot \cos A_m & \sin L \cdot \cos B & \cos L \cdot \cos A_m + \sin L \cdot \sin B \cdot \sin A_m \\ \cos B \cdot \cos A_m & \sin B & -\cos B \cdot \sin A_m \end{Vmatrix}.$$

Вектор $\vec{X}_{0\text{г}}$ задається у вигляді $\vec{X}_{0\text{г}} = \left\| X_{0\text{г}}, Y_{0\text{г}}, Z_{0\text{г}}, 0, 0, 0 \right\|^{\text{T}}$.

Координати початку місцевої системи координат в Грінвічській системі координат $\left\| X_{0\text{г}}, Y_{0\text{г}}, Z_{0\text{г}} \right\|^{\text{T}}$ обчислюються за формулами:

$$X_{0\text{г}} = \left(N + H\right) \cdot \cos L \cdot \cos B, \tag{2.19}$$

$$Y_{0\text{г}} = \left(N + H\right) \cdot \sin L \cdot \cos B, \tag{2.20}$$

$$Z_{0\text{г}} = \left(N \cdot \left(1 - e_3^2\right) + H\right) \cdot \sin B, \tag{2.21}$$

$$N = \frac{a_3}{\sqrt{1 - e_3^2 \cdot \sin^2 B}}, \tag{2.22}$$

де $a_3$, $e_3$ – параметри загальноземного еліпсоїда;

$a_3 = 6378{,}137$ км – велика піввісь;

$e_3^2 = 0{,}0066943800667647$ – квадрат першого ексцентриситету;

$B$ – геодезична широта початку місцевої системи координат;

$L$ – геодезична довгота початку місцевої системи координат;

$H$ – геодезична висота початку місцевої системи координат;

$A_m$ – геодезичний азимут місцевої системи координат [5].

2.1.4 Математична модель моніторингу повітряного простору

Не порушуючи спільності, розглянемо випадок, при якому множина ОЕС $i=\{1,2,...,n\}$, множина ЗУПО $j=\{1,2,...,m\}$, множина ЦВ $p=\{1,2,...,k\}$, $n=3, m=3, k=1$ (рисунок 1.2). Топооснова, на якій відмічені місця розташування ОЕС $i=\{1,2,...,3\}$, ЗУПО $j=\{1,2,...,3\}$, ЦВ $p=1$ і проекція місця розташування ПО на топооснову (рисунок 1.2).

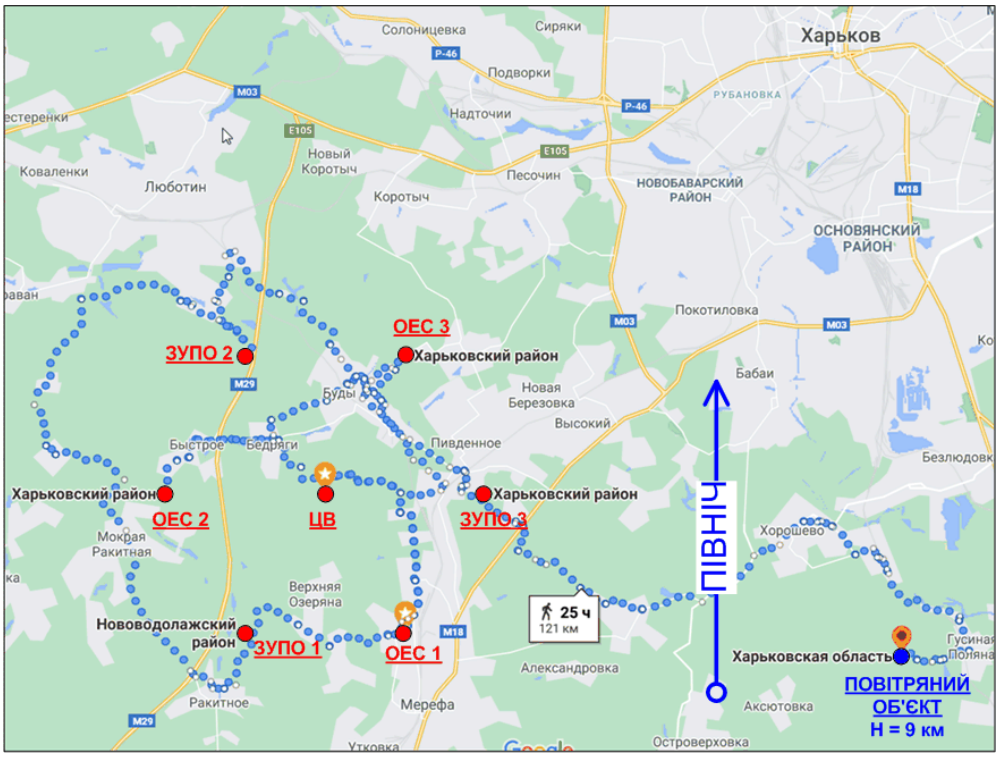


Рисунок 2.1 – Схема структури кластера

Початковими даними для побудови моделі є:

а) топооснова, на якій відмічені розташування ОЕС $i=\{1,2,...,3\}$, ЗУПО $j=\{1,2,...,3\}$, ЦВ $p=1$ і проекція місця розташування ПО на топооснову (рисунок 1.2);

б) геодезичні координати розміщення ОЕС, ЗУПО, ЦВ та положення ПО в момент часу $t$ (таблиця 2.1);

в) орієнтація МСК елементів кластера (рисунок 2.2).

Таблиця 2.1 – Геодезичні координати ЦВ, ОЕС, ЗУПО і ПО

| | Геодезичні координати | | |
|---|---|---|---|
| | Широта *B*, ° | Довгота *L*, ° | Висота *H*, км |
| ЦВ | 49,865086998432581 | 36,005725000000005 | 9,094947017729282e-13 |
| ОЕС 1 | 49,826150938808098 | 36,040469432392641 | 0,001960063724255 |
| ОЕС 2 | 49,865066140478760 | 35,936180316241547 | 0,001955951405762 |
| ОЕС 3 | 49,904012365894978 | 36,040525321895856 | 0,001960054763003 |
| ЗУПО 1 | 49,826150938808098 | 35,970980567607370 | 0,001960063724255 |
| ЗУПО 2 | 49,904012365894971 | 35,970924678104154 | 0,001960054764822 |
| ЗУПО 3 | 49,865066140478760 | 36,075269683758457 | 0,001955951405762 |
| ПО | 49,819471 | 36,257118 | 9,0 |

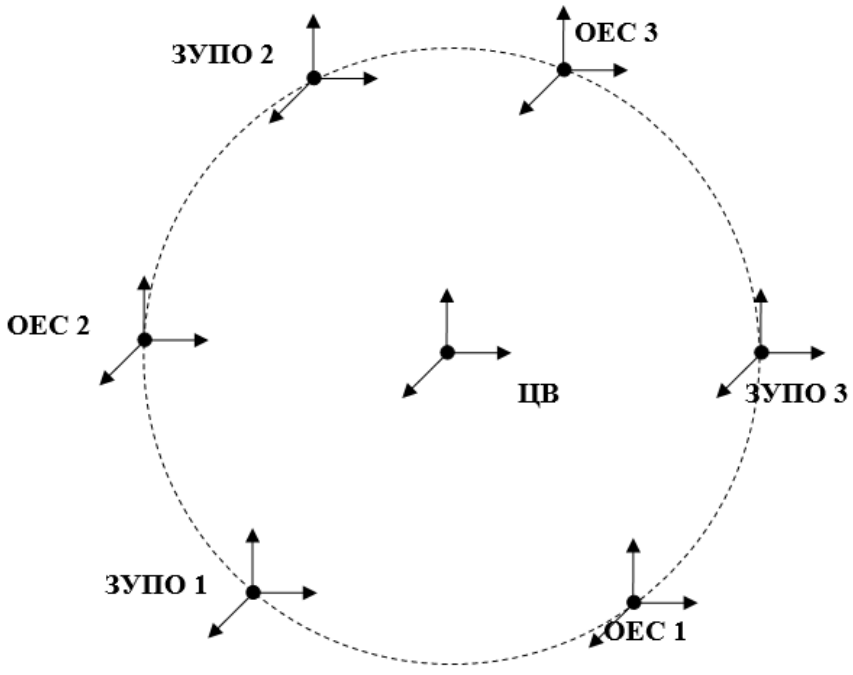


Рисунок 2.2 – Орієнтація МСК елементів кластера

Азимути $A_m^i$ всіх топоцентричних МСК, прив’язаних до ЦВ, ОЕС, ЗУПО, дорівнюють 0. ПО: 49.819471N, 36.257118E, *H*=9.0 км.

За відомими геодезичними координатами розташування ОЕП, ЗУПО, ЦВ і ПО у відповідності з (1.1)–(1.4), обчислюємо їх координати в ГСК (таблиця 2.2).

Таблиця 2.2 – Координати, переведені з геодезичної системи координат в ГСК

| | Координати станцій, ПО і напрямні коефіцієнти ліній візування в ГСК | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *X*, км | *l* | *Y*, км | *m* | *Z*, км | *n* |
| ЦВ | 3332,381 | –2,848 | 2421,625 | 20,325 | 4853,130 | 3,604 |
| ОЕС 1 | 3333,589 | –4,056 | 2425,593 | 16,357 | 4850,339 | 6,395 |
| ОЕС 2 | 3335,320 | –5,787 | 2417,580 | 24,370 | 4853,129 | 3,605 |
| ОЕС 3 | 3328,233 | 1,3 | 2421,701 | 20,249 | 4855,921 | 0,813 |
| ЗУПО 1 | 3336,528 | –6,995 | 2421,548 | 20,402 | 4850,338 | 6,396 |
| ЗУПО 2 | 3331,172 | –1,639 | 2417,656 | 24,294 | 4855,921 | 0,813 |
| ЗУПО 3 | 3329,441 | 0,092 | 2425,670 | 16,280 | 4853,130 | 3,604 |
| ПО | 3329,533 | 0 | 2441,950 | 0 | 4856,734 | |

На рисунку 2.3 представлена топоцентрична МСК ОЕС.

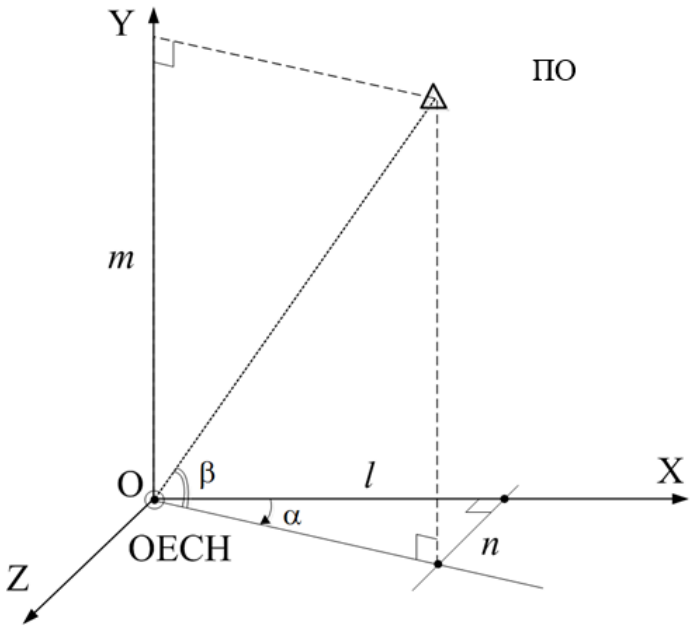


Рисунок 2.3 – Топоцентрична МСК ОЕС

Азимут ПО, при спостереженні за ним з точки розташування ОЕС, відраховується як кут $\alpha$, який приймає значення в діапазоні від 0° до 360° при обході за годинниковою стрілкою. Кут місця ПО $\beta$ приймає значення в діапазоні від –90° до 90° (позитивні значення $\beta$ відповідають значенням $y > 0$). Як випливає з рисунку 1.4, значення $\alpha$ і $\beta$ пов'язані з напрямними коефіцієнтами $l, m, n$ лінії візування від ОЕС на ПО, наступним чином:

$$\sin\alpha = \frac{n}{\sqrt{l^2 + n^2}},\ \sin\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (2.28)$$

Головне значення функції $y = \arcsin(\varphi)$ належить відрізку $y \in [-90°; 90°]$. Зазначимо, що формули перерахунку значення $\alpha$ і $\beta$ для різних комбінацій між знаками напрямних коефіцієнтів, мають вигляд, представлений в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3 – Формули перерахунку значення $\alpha$ і $\beta$ для різних комбінацій між знаками напрямних коефіцієнтів

| | | | |
|---|---|---|---|
| $n \geq 0$ | $l > 0$ | $0° \leq \alpha < 90°$ | $\alpha = \arcsin\frac{n}{\sqrt{l^2 + n^2}}$ |
| $n > 0$ | $l \leq 0$ | $90° \leq \alpha < 180°$ | $\alpha = 90° - \arcsin\frac{l}{\sqrt{l^2 + n^2}}$ |
| $n \leq 0$ | $l < 0$ | $180° \leq \alpha < 270°$ | $\alpha = 180° - \arcsin\frac{n}{\sqrt{l^2 + n^2}}$ |
| $n < 0$ | $l \geq 0$ | $270° \leq \alpha < 360°$ | $\alpha = 270° + \arcsin\frac{l}{\sqrt{l^2 + n^2}}$ |
| | | $-90° \leq \beta \leq 90°$ | $\beta = \arcsin\frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$ |

Таким чином, після проведення вимірювань координат об'єкту, обчислюються напрямні коефіцієнти лінії візування по відомим координатам точки розташування засобу ураження, яке потрібно навести на об'єкт, і по координа-

там об’єкта. Після цього за формулами, наведеними в таблиці 1.3, розраховуються кути повороту ОПП засобу ураження для наведення на об’єкт [7].

Розрахунок напрямних коефіцієнтів прямої по відомим азимуту і куту місця. З рисунку 2.3 випливає, що:

$$l = S\cos\alpha\cos\beta,\ m = S\sin\beta,\ n = S\sin\alpha\cos\beta, \qquad (2.29)$$

де $S = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$ – дальність від ОЕС до ПО. Оскільки дальність до об’єкта перед початком роботи системи невідома, то при обчисленнях приймається $S = 1$. При цьому орієнтація направляючого вектора щодо осей координат не зміниться. Таким чином, після наведення ОЕС на ПО проводиться зчитування показань датчиків, що вимірюють положення ПО щодо ОЕС по азимуту і куту місця. Розрахунок напрямних коефіцієнтів лінії візування проводиться за формулами (2.29).

За відомими координатами ПО в ГСК і місцеположенню початку всіх МСК, визначаємо координати ПО в кожній з МСК, пов’язаній з місцем розташування ЦВ, ОЕС, ЗУПО (таблиця 2.4).

Таблиця 2.4 – Напрямні коефіцієнти ліній візування ЦВ, ОЕС і ЗУПО на ПО

| МСК | Координати ПО в МСК (напрямні коефіцієнти в МСК) | | | Кути повороту ОПП | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *X*, км | *Y*, км | *Z*, км | Азимут , α ° | Кут місця β, ° |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| ЦВ | –5,050 | 8,972 | 18,117 | 105,575478 | 25,502990 |
| ОЕС 1 | –0,721 | 8,979 | 15,613 | 92,644010 | 29,876740 |
| ОЕС 2 | –5,029 | 8,954 | 23,128 | 102,267551 | 20,722113 |
| ОЕС 3 | –9,394 | 8,972 | 15,609 | 121,040886 | 26,219576 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| ЗУПО 1 | –0,705 | 8,965 | 20,620 | 91,958186 | 23,485822 |
| ЗУПО 2 | –9,377 | 8,958 | 20,624 | 114,449606 | 21,573765 |
| ЗУПО 3 | –5,063 | 8,983 | 13,105 | 111,123595 | 32,595010 |

У відповідності з (2.18) – (2.22) здійснюємо розрахунок координат ПО з МСК в ГСК. Оскільки центр ГСК приймається за 0, то компоненти ПО збігаються з координатами напрямних вектора ліній візування з центру ГСК на ПО (таблиця 2.5).

Таблиця 2.5 – Напрямні коефіцієнти ліній візування на ПО з центру ГСК

| | Координати ПО в ГСК (напрямні коефіцієнти в ГСК) | | |
|---|---|---|---|
| | *X*, км | *Y*, км | *Z*, км |
| ЦВ | 3329,531 | 2441,950 | 4856,733 |
| ОЕС 1 | 3329,532 | 2441,950 | 4856,734 |
| ОЕС 2 | 3329,533 | 2441,950 | 4856,734 |
| ОЕС 3 | 3329,532 | 2441,951 | 4856,734 |
| ЗУПО 1 | 3329,533 | 2441,950 | 4856,734 |
| ЗУПО 2 | 3329,533 | 2441,950 | 4856,734 |
| ЗУПО 3 | 3329,533 | 2441,951 | 4856,734 |

Аналіз таблиці 2.5 показує, що напрямні вектора лінії візування, розраховані по напрямних розташування ОЕС і напрямних лінії візування від кожної ОЕС на ПО, збігаються з досить високою точністю, що дозволяє зробити висновок про адекватність детермінованої моделі перетворення координат.

Використання детермінованої моделі для прихованого моніторингу повітряного простору. Суть метода прихованого моніторингу повітряного простору полягає у формуванні та розв’язанні системи рівнянь для трьох прямих ліній візування ОЕС ПО в ГСК і визначення точки їх перетину, якій відповідають ко-

ординати ПО. Детермінована модель вважається адекватною, якщо координати отриманої точки збігаються з координатами ПО, з точністю не нижче заданої $e<1.0\cdot10^{11}$ [8].

На рисунку 2.4 приведена схема розташування трьох ОЕС і ПО.

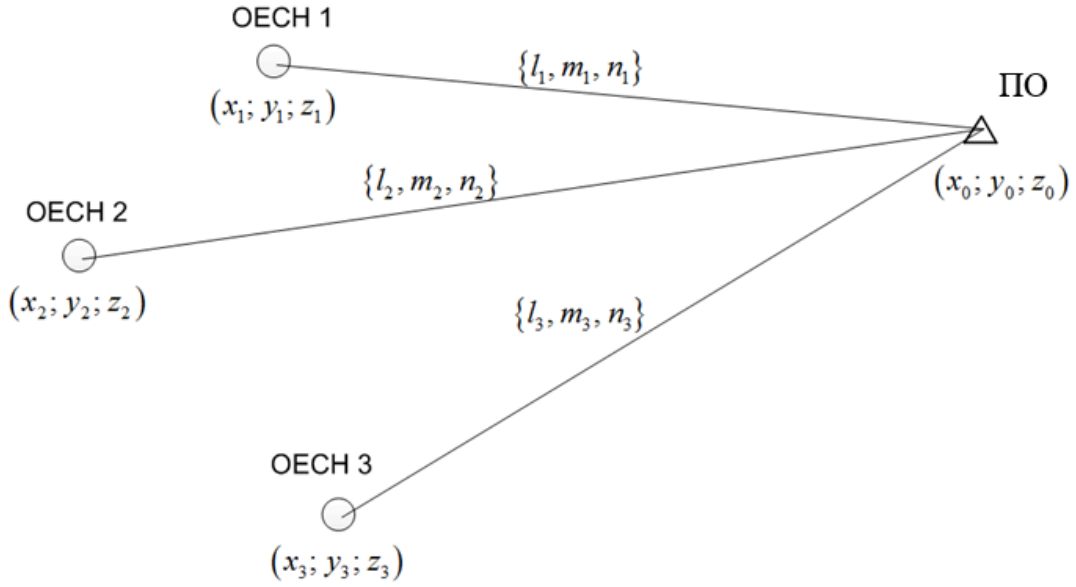


Рисунок 2.4 – Схема розташування трьох ОЕС і ПО

Канонічні рівняння ліній візування від ОЕС на ПО:

$$\frac{x-x_i}{l_i}=\frac{y-y_i}{m_i}=\frac{z-z_i}{n_i}, i=1,2,3, \tag{2.30}$$

де $\left[l_i, m_i, n_i\right]^{\mathrm{T}}$ – напрямний вектор прямої (таблиця 2.4).

Із (2.30), для кожного $i$ маємо систему двох лінійних рівнянь, яка задає положення прямої в тривимірному просторі. Для $i=1$ маємо:

$$\begin{cases} m_1(x-x_1)=l_1(y-y_1) \\ n_1(y-y_1)=m_1(z-z_1) \end{cases}, \tag{2.31}$$

Для того, щоб знайти точку перетину трьох прямих в просторі, необхідно розв'язати систему з шести лінійних рівнянь для трьох невідомих $\left[x, y, z\right]^{\mathrm{T}}$ (координати точки перетину).

$$\begin{cases} m_1 x - l_1 y + l_1 y_1 - m_1 x_1 = 0; \\ n_1 y - m_1 z + m_1 z_1 - n_1 y_1 = 0; \\ m_2 x - l_2 y + l_2 y_2 - m_2 x_2 = 0; \\ n_2 y - m_2 z + m_2 z_2 - n_2 y_2 = 0; \\ m_3 x - l_3 y + l_3 y_3 - m_3 x_3 = 0; \\ n_3 y - m_3 z + m_3 z_3 - n_3 y_3 = 0. \end{cases} \tag{2.32}$$

У загальному випадку, всі рівняння є лінійно незалежними, така система є перевизначеною, і замість точного розв'язання слід шукати вектор, що мінімізує норму нев'язки системи рівнянь.

Після перетворення системи (.32) до стандартного вигляду отримаємо:

$$Ax = B, \tag{2.33}$$

де $A = \begin{bmatrix} m_1 & -l_1 & 0 \\ 0 & n_1 & -m_1 \\ m_2 & -l_2 & 0 \\ 0 & n_2 & -m_2 \\ m_3 & -l_3 & 0 \\ 0 & n_3 & -m_3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} m_1 x_1 - l_1 y_1 \\ n_1 y_1 - m_1 z_1 \\ m_2 x_2 - l_2 y_2 \\ n_2 y_2 - m_2 z_2 \\ m_3 x_3 - l_3 y_3 \\ n_3 y_3 - m_3 z_3 \end{bmatrix}$ – матриця та вектор вільних коефіцієнтів.

Вектор розв'язання $U = \left[x^*, y^*, z^*\right]^{\mathrm{T}}$ знайдемо чисельними методами, які дозволяють обчислити глобальний мінімум норми нев'язки $f\left(U\right) = \left|A \cdot U - B\right|$. Результати розв'язання системи рівнянь (2.33) наведені в таблиці 2.6.

Точні значення координат ПО в ГСК (таблиця 2.2) дорівнюють – $x$ = 3329,533; $y$ = 2441,950; $z$ = 4856,734.

Таким чином, результати чисельного розв'язання системи рівнянь, яка задає розташування ліній візування на ПО від трьох ОЕС, дозволяють зробити висновок, що детермінована модель забезпечує повний збіг заздалегідь заданих тестових координат, і, може послужити основою при побудові системи прихованого моніторингу повітряного простору сенсорною мережею ОЕС [23].

Таблиця 2.6 – Результати розв'язання перевизначеної системи рівнянь (1.33)

| Метод розв'язання | $x^*$ | $y^*$ | $z^*$ | Норма нев'язки |
|---|---|---|---|---|
| Метод оберненої матриці | 3329,533000 | 2441,949999 | 4856,733999 | 5,444828·10□11 |
| Метод лінійної регресії | 3329,533000 | 2441,950000 | 4856,733999 | 4,425792·10□11 |
| Розкладання Холесського | 3329,532999 | 2441,950000 | 4856,733999 | 7,312246·10?11 |

## 2.2 Вибір і обґрунтування математичної моделі просторового руху артилерійського снаряда

### 2.2.1 Математична модель просторового руху снаряда без урахування опору повітря

Побудова простої моделі руху артилерійського снаряда будемо реалізовувати в місцевій інструментальній декартовій системі координат, центр якої знаходиться в точці розташування ЗУПО з координатами $(L_i, B_i, H_i), i = 1$ при цьо-

му вісь *OX* направлена вздовж поверхні землі у напрямку вистрілу (по азимуту λ відносно МДСК), вісь *OZ* доповнює систему до правої (рис.2.5). На рис. 2.5 приведена система координат траєкторії руху снаряда в площині пострілу OXY.

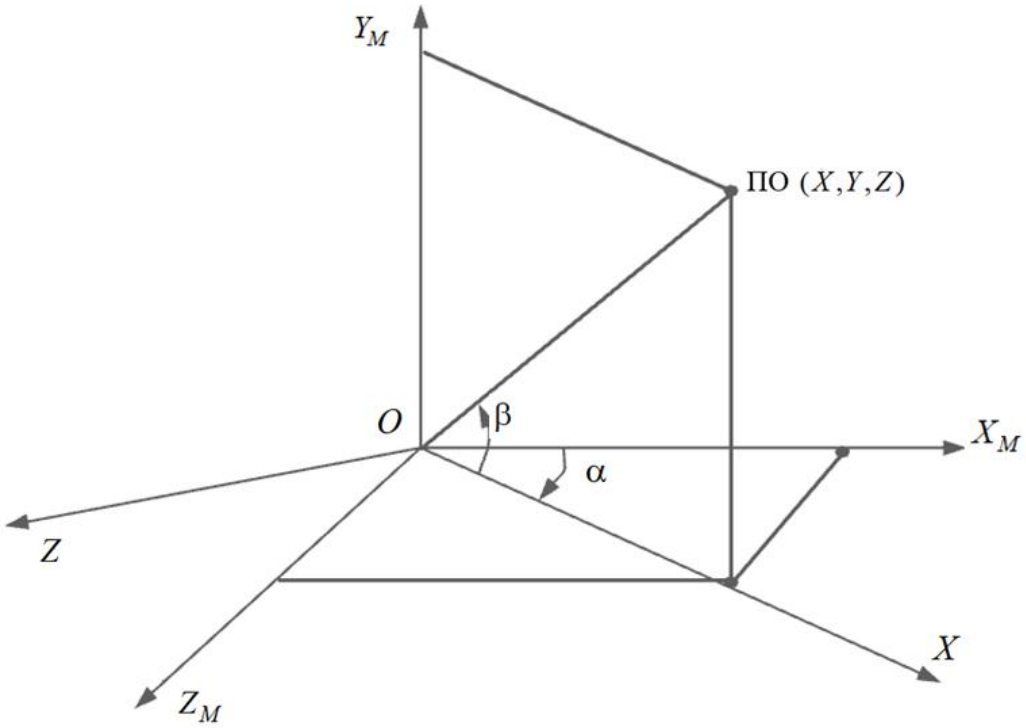


Рисунок 2. 5 – Система координат МДСК ( $X_M, Y_M, Z_M$ ) та МІДСК( $X, Y, Z$ )

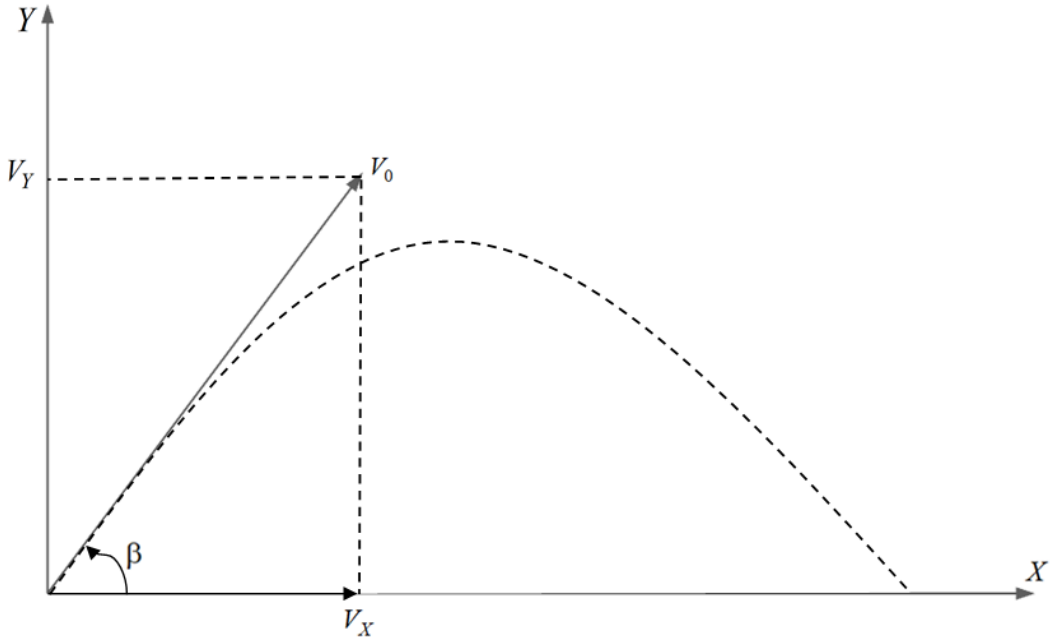


Рисунок 2.6 – Траєкторія руху снаряда в площині пострілу

Вважатимемо, що на артилерійський снаряд масою $m$ діє одна сила земного тяжіння $P = mg$, силами опору повітря та іншими силами природі знехтуємо. Для побудови математичної моделі руху снаряда використовуємо другий закон Ньютона $F = m \cdot a$, де $F$ – сила, яка діє на снаряд, $m$ – маса снаряда, $a$ – прискорення руху снаряда. Рівняння проекцій другого закону Ньютона на осі $X$ та $Y$ напишемо у вигляді:

$$ma_x = 0,\ m\frac{d^2x}{dt^2} = 0,\ \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \tag{2.34}$$

$$ma_y = -mg,\ m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg,\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g, \tag{2.35}$$

$$ma_z = 0,\ m\frac{d^2z}{dt^2} = 0, \tag{2.36}$$

де $a_x$, $a_y$ – проекція прискорення руху снаряда відповідно на осі $X$ та $Y$.

Для замкнення моделі задаємо початкові умови при $t = 0$:

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ \frac{dx}{dt} = V_0\cos\beta,\ \frac{dy}{dt} = V_0\sin\beta - gt,\ \frac{dz}{dt} = 0. \tag{2.37}$$

Інтеграція (2.34), (2.35) з урахуванням початкових умов отримаємо:

$$x = (V_0\cos\beta)t, \tag{2.38}$$

$$y = (V_0\sin\beta)t - \frac{gt^2}{2}, \tag{2.39}$$

$$z = 0. \tag{2.40}$$

Виражаємо з (2.38) час $t$, $t = \dfrac{x}{V_0\cos\beta}$ та підставимо його:

$$y = xtg\beta - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \beta}. \qquad (2.41)$$

Рівняння (2.41) представляє собою найпростішу модель траєкторії руху снаряда, яку можна уже використовувати для наближеного оцінювання меж зон ураження та зон безпеки, а також для наближеного розв'язання задачі про «зустріч» [9].

### 2.2.2 Побудова меж зони безпеки та зони ураження

Задача про «зустріч» може бути сформульована та розв'язана в том чи іншому випадку, якщо ПО знаходиться у зоні ураження, якщо ПО знаходиться поза зоною ураження, то задача про «зустріч» не має розв'язання.

Не порушуючи спільності побудуємо межу зони ураження в площині $OXY$ використовуючи модель (2.41), рівняння якої представимо у вигляді рівняння параболи:

$$y = ax^2 + bx, \qquad (2.42)$$

де $a = -\frac{g}{2V_0 \cos^2 \beta}$, $b = tg\beta$.

Максимальну висоту підйому снаряда отримаємо з умови знаходження максимуму функції (2.42) по $x$.

Необхідна умова максимуму функції (2.42) $\frac{dy}{dx} = 0$ або $2ax + b = 0$, звідки:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{V_0^2}{2g} \sin 2\beta = x^*, \qquad (2.43)$$

де $x^*$ – значення $x$, при якому висота підйому снаряда досягає максимуму, тобто:

$$y^* = y(x^*) = \frac{V_0^2}{2g}\sin^2\beta. \tag{2.44}$$

Час польоту снаряда для досягнення максимальної висоти дорівнює:

$$t^* = \frac{x^*}{V_0\cos\beta} = \frac{V_0}{g}\sin\beta. \tag{2.45}$$

Час польоту снаряда знаходимо з умови $y = 0$ , тобто

$$t_{\max} = \frac{2V_0}{g}\sin\beta, \tag{2.46}$$

а максимальна дальність польоту $x_{\max} = \frac{V_0^2}{g}\sin 2\beta$.

Алгоритм побудови межі зони ураження та знаходження часу для досягнення її снарядом.

1. Задаємо числове значення початкової швидкості снаряда $V_0$.

2. Задаємо числове значення $V_0$ нижньої межі кута місця $\beta_i = 5^\circ$, $i = 0$.

3. Знаходимо числове значення координат $x^*, y^*, t^*$.

4. Наносимо координати снаряда на площину $OXY$.

5. Перевіряємо умову $\beta_i \le 80^\circ$, якщо «так» переходимо до пункту 8, а якщо «ні» то до пункту 6.

6. Збільшуємо $\beta_i = \beta_0 + \delta\beta$, де $\delta\beta = 5^\circ$.

7. З'єднуємо всі координати $(x_i^*, y_i^*)$ та отримаємо ліву криву , яка і відділяє межу зони ураження.

### 2.2.3 Математична модель просторового руху снаряда при лінійній залежності сили опору від швидкості руху

Відомо, що сила опору, яка діє на снаряд, що летить в повітряному потоці, залежить тільки від відносної швидкості руху снаряда і повітря. Експериментально встановлено, що при малих швидкостях лінійно залежить від швидкості руху снаряда сила опору:

$$F_c = k_1 V_1,$$

де $k_1$ – коефіцієнт опору, числове значення якого визначається властивостями середовища та формою снаряда. При більш високих швидкостях сила опору лінійно залежить від квадрата швидкості руху снаряда

$$F_c = k_2 V^2.$$

Розглянемо математичну модель руху снаряда у випадку дії сили опору повітря, яка лінійно залежить від швидкості руху снаряда [10].

В цьому випадку система диференційних рівнянь руху снаряда має вигляд:

$$m\frac{dV_x}{dt} = -kV_x, \tag{2.47}$$

$$m\frac{dV_y}{dt} = -mg - kV_y, \tag{2.48}$$

$$m\frac{dV_z}{dt} = 0, \tag{2.49}$$

при початкових умовах (2.37).

Рівняння (2.47), (2.48) є диференціальними рівняннями другого порядку з

відокремлюваними змінними, які допускають аналітичне розв'язання.

$$\int m\frac{dV_x}{dt} = \int -kV_x \Rightarrow \int \frac{dV_x}{V_x} = -\int \frac{k}{m}dt \Rightarrow \ln V_x = -\frac{k}{m}t + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_x = C_1 e^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow \int \frac{dx}{dt} = \int C_1 e^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow X(t) = -\frac{m}{k}\cdot C_1 \cdot e^{-\frac{kt}{m}} + C_2, \qquad (2.50)$$

де $C_1, C_2$ – постійні інтегрування.

Враховуючи початкові умови (2.37) знаходимо числові значення постійних інтегрування:

$$x = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{m}{k}C_1 + C_2,$$

$$V_x = V_0 \cos\beta = C_1,$$

$$C_2 = \frac{m}{k}C_1 = \frac{mV_0}{k}\cos\beta.$$

В результаті отримаємо модель руху снаряда по осі X та горизонтальної складової швидкості:

$$x(t) = \frac{m}{k}V_0\left(-e^{-\frac{kt}{m}}\right)\cos\beta, \qquad (2.51)$$

$$V_x(t) = V_0 e^{-\frac{kt}{m}}\cos\beta. \qquad (2.52)$$

Розв'язуючи аналітичним способом рівняння (2.48) отримаємо модель руху снаряда по Y та вертикальній складової швидкості:

$$y(t) = \frac{m}{k}\left(V_0 \sin\beta + \frac{m}{k} g\right)\left(-e^{-\frac{kt}{m}}\right) - \frac{m}{k} gt\,, \tag{2.53}$$

$$V_y(t) = \left(V_0 \sin\beta + \frac{m}{k} g\right) \cdot e^{-\frac{kt}{m}} \frac{m}{k} g\,. \tag{2.54}$$

Для отримання рівняння траєкторії руху снаряда необхідно вирішити рівняння (2.51) щодо часу t та підставити в (2.53).

$$1 - e^{-\frac{kt}{m}} = \frac{k \cdot x}{mV_0 \cos\beta} \Rightarrow -\frac{kt}{m} = \ln\left(1 - \frac{kx}{mV_0 \cos\beta}\right) \Rightarrow t = \frac{m}{k} \cdot \ln\frac{mV_0 \cos\beta}{mV_0 \cos\beta - kx}\,. \tag{2.55}$$

Підставимо (2.55) в (2.53) і отримаємо:

$$y = (tg\beta + \frac{mg}{kV_0 \cos\beta})x + \frac{m^2}{k^2} \ln(1 - \frac{kx}{mV_0 \cos\beta})\ . \tag{2.56}$$

### 2.2.4 Математична модель просторового руху снаряда при квадратичній залежності сили опору від швидкості руху

Розглянемо математичну модель руху снаряда у випадку дії на нього сили опору повітря, яка квадратично залежить від швидкості руху снаряда.

В такому випадку:

$$m \cdot \frac{dV_x}{dt} = -kV_x^2\,, \tag{2.57}$$

$$m \cdot \frac{dV_y}{dt} = -mg - kV_y^2\,. \tag{2.58}$$

Система диференціальних рівнянь (2.57), (2.58) з початковими умовами (2.37) є математичною моделлю руху снаряда в повітряному просторі при квадратній залежності сили опору середовища від швидкості руху снаряда.

Диференціальне рівняння (2.57) є рівнянням з відокремлюваними змінними. Двічі диференціюючи рівняння (2.57) отримаємо:

$$\int \frac{dV_x}{V_x^2} = \int -\frac{k}{m}dt \Rightarrow -\frac{1}{V_x} = -\frac{kt}{m} - C \Rightarrow V_x = \frac{1}{C + \frac{kt}{m}} \Rightarrow dx = \frac{1}{c + \frac{kt}{m}}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{m}{k}\ln(C_1 + C_2 t), \tag{2.59}$$

$$V_x(t) = \frac{m}{k} \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2 t}, \tag{2.60}$$

де постійні інтегрування $C_1$, $C_2$ визначаються з початкових умов (2.37).

$$C_1 = 1,\ C_2 = \frac{k}{m}V_0 \cos\beta. \tag{2.61}$$

Підставляючи (2.61) в (2.59), (2.60) остаточно отримаємо рівняння руху снаряда вздовж осі OX:

$$x(t) = \frac{m}{k} \cdot \ln(1 + \frac{k}{m}V_0 \cos\beta \cdot t), \tag{2.62}$$

$$V_x(t) = \frac{mV_0 \cos\beta}{m + kV_0 \cos\beta \cdot t}. \tag{2.63}$$

Інтегруючи диференціальне рівняння (2.58) з відокремлюваними змінними отримаємо:

$$\frac{dV_y}{g+\frac{kV_y^2}{m}} = dt \Rightarrow \sqrt{\frac{m}{kg}} arctg\left(\sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot V_y\right) = -t + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_y = \sqrt{\frac{mg}{k}} tg\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}(C_1 - t)\right), \qquad (2.64)$$

$$y(t) = \int V_y dt = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \int tg\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}(C_1 - t)\right) dt = \frac{m}{k} \cdot \ln\left|\frac{C_2}{\cos\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot (C_1 - t)}\right|, \qquad (2.65)$$

де постійні інтегрування $C_1$, $C_2$ визначаються з початкових умов (2.37) [11].

$$V_0 \sin\beta = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot tg\left(\frac{kg}{m} \cdot C_1\right) \Rightarrow C_1 = \sqrt{\frac{m}{kg}} arctg\left(\sqrt{\frac{k}{mg}} V_0 \sin\beta\right), \qquad (2.66)$$

$$C_2 = \cos\left(\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot C_1\right). \qquad (2.67)$$

Підставляючи (2.66) в (2.67) і далі в (2.65), (2.66) та виконавши перетворення отримаємо рівняння руху снаряда вздовж осі OY:

$$y(t) = \frac{m}{k} \cdot \ln\left(\cos(\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t) + \sqrt{\frac{k}{mg}} V_0 \cos\beta \cdot \sin(\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t)\right), \qquad (2.68)$$

$$V_y = \frac{\sqrt{mgk} \cdot V_0 \sin\beta - mg \cdot tg\left(\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t\right)}{\sqrt{mgk} + kV_0 \sin\beta \cdot tg\left(\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t\right)}. \qquad (2.69)$$

Виразимо час t з (2.62):

$$t = \frac{m}{kV_0 \cos\beta} \cdot \left( e^{\frac{kx}{m}} - 1 \right), \qquad (2.70)$$

та підставляючи його в (2.68) отримаємо математичну модель траєкторії руху снаряда в повітрі при квадратичній залежності сили опору від швидкості руху:

$$y = \frac{m}{k} \cdot \ln\left( \cos\left(\sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \frac{e^{\frac{kx}{m}} - 1}{V_0 \cos\beta}\right) + \sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot V_0 \sin\beta \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \frac{e^{\frac{kx}{m}} - 1}{V_0 \cos\beta}\right) \right). \qquad (2.71)$$

### 2.2.5 Уточнена математична модель просторового руху снаряда

При розглядувані систем диференційних рівнянь просторового руху снаряда з урахуванням сил опору повітря використовувались проекції швидкості $V_0$ на осі координат $V_x$ та $V_y$. В реальних умовах напрям та швидкість польоту снаряда безперервно змінюється, і для адекватного урахування цього факту на силу опору необхідно ввести в модель проекції модуля швидкості в кожній точці траєкторії польоту снаряда [12].

На рисунку 2.7 приведено розкладання модуля швидкості в точці $P$ з координатами $\|x, y\|^T$ для урахування сили опору повітря польоту снаряда.

В цьому випадку:

$$F_c = -k\vec{V} = F_{cx} = -kV\cos\varphi,\ F_{cy} = -kV\sin\varphi,$$

де $\varphi$ – кут, який складає вектор швидкості $V$ з позитивним напрямом осі $OX$ (рис. 2.7).

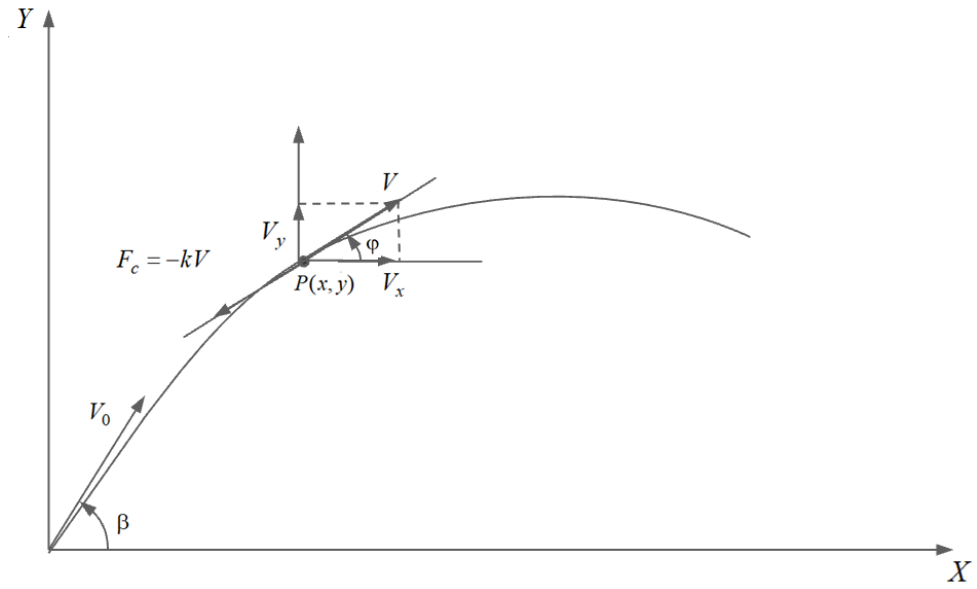


Рисунок 2.7 – Розкладання модуля швидкості руху снаряда в точці $P(x, y)$

Модуль швидкості польоту снаряда в точці $P$ дорівнює:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}\,, \tag{2.72}$$

причому $tg\varphi = \dfrac{V_y}{V_x}$,

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{V_y^2}{V_x^2}}} = \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2+V_y^2}} = \frac{V_x}{V}, \tag{2.73}$$

$$\sin\varphi = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \frac{\dfrac{V_y}{V_x}}{\sqrt{1+\dfrac{V_y^2}{V_x^2}}} = \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2+V_y^2}} = \frac{V_y}{V}. \tag{2.74}$$

В цьому випадку математична модель руху снаряда в повітрі, в тому випадку, коли сила опору залежить лінійно від швидкості, приймає вигляд:

$$m\frac{dV_x}{dt} = -kV\cos\varphi = \frac{-kV_x}{V}, \tag{2.75}$$

$$m\frac{dV_y}{dt} = -mg - kV\sin\varphi = -mg - \frac{kV_y}{V}, \tag{2.76}$$

Систему рівнянь (2.75), (2.76) при початкових умовах (2.37) будемо розв'язувати методом Рунге-Кутта четвертого порядку.

### 2.2.6 Метод Рунге-Кутта четвертого порядку для розв'язання систем диференціальних рівнянь

Метод Рунге-Кутта дозволяє розв'язувати систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку виду:

$$X' = f(t, X, Y), \tag{2.77}$$

$$Y' = g(t, X, Y), \tag{2.78}$$

які мають розв'язання $X = X(t)$, $Y = Y(t)$, де $t$ – незалежна змінна (час), $X = X(t)$, $Y = Y(t)$ – шукані функції, які залежать від $t$. Функції $f(\cdot)$ та $g(\cdot)$ відомі. Передбачаються заданими початкові умови, тобто значення шуканих функцій в момент часу $t = 0$: $X(0) = x_0$, $Y(0) = y_0$.

Розглянемо рівняння першого порядку:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{2.79}$$

на відрізку $[x_0, b]$, що задовольняє початковій умові $x = x_0$, $y = y_0$. Розкладаючи рівняння (2.79) в ряд Тейлора в околицях точки $x = x_0$ маємо:

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1} \cdot y_0^{'} + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} y_0^{''} + \frac{(x - x_0)^m}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m} y_0^{(m)} + \frac{R}{m}. \qquad (2.80)$$

В (2.80) $y_0$ відомо, а значення похідних $y_0^{'}$, $y_0^{''}$, …, $y_0^{(m)}$ знаходяться з рівняння (2.79) наступним чином. Підставляючи в праву частину рівняння (2.79) початкові значення $x_0$, $y_0$, знайдемо $y_0^{'}$:

$$y_0^{'} = f(x_0, y_0). \qquad (2.81)$$

Диференціюючи члени рівняння по $X$, отримаємо:

$$y_0^{''} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y^{'}. \qquad (2.82)$$

Підставляючи в праву частину значення початкових умов $x = x_0$, $y = y_0$ та знайдене значення $y_0^{'}$, отримаємо:

$$y^{''} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y^{'} \right)_{x=x_0, y=y_0, y^{'}=y_0^{'}}. \qquad (2.83)$$

Диференціюючи рівняння (2.79) ще раз по $X$ та підставляючи значення $x_0, y_0, y_0^{'}, y_0^{''}$, знайдемо $y_0^{'''}$. Продовжуючи так можна знайти значення похідних любого порядку при $x = x_0$. Всі члени, крім остаточного члена $R_m$ в правій частині виразу (2.80) відомі. Таким чином, знехтуючи остаточним членом $R_m$, можна отримати наближені значення $y$ при будь-якому значенні $x$. Точність отриманого розв'язання $y(x)$ буде залежати від величини $|x - x_0|$ та числа членів в розкладанні (2.80).

Метод Рунге-Кутта використовується для розв'язання диференціальних

рівнянь вищого (другого і т. д.) порядку, так як вони можуть бути представлені системою диференціальних рівнянь першого порядку [13].

Метод Рунге-Кутта четвертого порядку полягає у рекурентному застосуванні наступних формул:

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

де $k_1 = f(t_k, X_k, Y_k)\Delta t$, $m_1 = g(t_k, X_k, Y_k)\Delta t$.

$$k_2 = f(t_k + \frac{\Delta t}{2}, X_k + \frac{k_1}{2}, Y_k + \frac{m_1}{2})\Delta t,$$

$$m_2 = g(t_k + \frac{\Delta t}{2}, X_k + \frac{k_1}{2}, Y_k + \frac{m_1}{2})\Delta t,$$

$$k_3 = f(t_k + \frac{\Delta t}{2}, X_k + \frac{k_2}{2}, Y_k + \frac{m_2}{2})\Delta t,$$

$$m_3 = g(t_k + \frac{\Delta t}{2}, X_k + \frac{k_2}{2}, Y_k + \frac{m_2}{2})\Delta t,$$

$$k_4 = f(t_k + \Delta t, X_k + k_3, Y_k + m_3)\Delta t,$$

$$m_4 = g(t_k + \Delta t, X_k + k_3, Y_k + m_3)\Delta t.$$

Застосуємо метод Рунге-Кутта для розв'язання систем диференціальних рівнянь математичної моделі польоту снаряда (2.75), (2.76) з початковими умовами (2.37):

$$m\frac{dV_x}{dt} = -k\frac{V_x}{V}, \tag{2.75}$$

$$m\frac{dVv}{dt} = -k\frac{V_y}{V}. \tag{2.76}$$

З початковими умовами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ \frac{dx}{dt}=V_0\cos\beta,\ \frac{dy}{dt}=V_0\sin\beta-gt,$

$\frac{dz}{dt}=0$ . Введемо наступні позначення: $V_x=x$ , $V_y=y$ , $t=t$ , $z=\frac{k}{m}$ ,

$f(x,y)=-\frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ g(x,y)=-(g+\frac{zx}{\sqrt{x^2+y^2}})$.

В цьому випадку систему (2.75), (2.76) представимо у стандартному вигляді:

$$\frac{dx}{dt}=f(x,y), \tag{2.84}$$

$$\frac{dy}{dt}=g(x,y), \tag{2.85}$$

Розкладаючи функції $f(x,y)$ та $g(x,y)$ в ряд Тейлора в околицях точок $x_0,\ y_0$ отримаємо:

$$f'(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot f(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot g(x,y)=$$

$$=\frac{zx}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cdot\left(gx+z\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \tag{2.86}$$

$$g'(x,y)=\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{\partial g}{\partial x}\cdot f(x,y)+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot g(x,y)=$$

$$=-\frac{zy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cdot\left(gx+z\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right). \tag{2.87}$$

Рекурентні формули для обчислення $x_1,x_2,...,y_1,y_2$ приймають вид:

$$x_1=x_0+f(x_0,y_0)\cdot h+f'(x_0,y_0)\cdot h^2, \tag{2.88}$$

$$y_1 = x_0 + g(x_0, y_0) \cdot h + g^{'}(x_0, y_0) \cdot h^2, \qquad (2.89)$$

де $h$ – крок збільшення по змінній $x$. Використовуючи (2.88), (2.89) отримаємо всю послідовність зміни координат руху снаряда $\|x_0, y_0\|^T, \|x_1, y_1\|^T, ..., \|x_n, y_n\|^T$. В такому випадку траєкторія польоту снаряда можна представити у вигляді:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot h \text{ та } y(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot h. \qquad (2.90)$$

2.2.7 Математична постановка та метод розв'язання задачі про «зустріч»

Початковими даними для математичної постановки задачі про «зустріч» є:

– місцезнаходження ОЕС та ЗУПО на поверхні землі в геодезичній $\|L_{0i}, B_{0i}, H_{0i}\|^T, i = 1,2,...,N$ і $\|L_{0j}, B_{0j}, H_{0j}\|^T, j = 1,2,...,n$ та Грінвічській системах координат $\|X_{0i}, Y_{0i}, Z_{0i}\|^T, i = 1,2,...,N$ і $\|X_{0j}, Y_{0j}, Z_{0j}\|^T, j = 1,2,...,n$, де $N$ – кількість ОЕС в мережі, $n$ – кількість ЗУПО.

– оцінка математичного очікування прогнозованих координат $k$-го ПО в момент часу $t$ з попередженням $l$ $\|\overline{X}_{k,t+l}, \overline{Y}_{k,t+l}, \overline{Z}_{k,t+l}\|^T, k = 1,2...,k$, де $k$ – кількість ПО, що одночасно спостерігаються в момент часу $t$.

– межі зони ураження кожним $j$-м ЗУПО: $\|\beta_j, D_j, \Delta t_j\|^T, j = 1,2,...,n$, де $\beta_j$ – значення кута місця, $D_j$ – похила дальність до межі зони ураження, $\Delta t_j$ – час досягнення снаряду межі зони ураження [22].

2.2.7.1 Попередня обробка оперативної інформації про ПО

1. При виявленні ПО у контрольованій зоні повітряного простору в момент часу $t = t_{об}$, де $t_{об}$ – час виявлення $k$-го ПО , вимірюються його координати в місцевій сферичній системі координат $i$-ї ОЕС, яка його виявила:

$$\left\| \alpha_{k,i,t}, \beta_{k,i,t}, D_{k,i,t} \right\|^T .$$

2. Відповідно до $Y_{\text{м}} = D\sin\beta$, $\vec{X}_{\text{г}} = \left\| \begin{matrix} A_{\text{гм}} & 0 \\ 0 & A_{\text{гм}} \end{matrix} \right\| \cdot \vec{X}_{\text{м}} + \vec{X}_{0\text{г}}$ координати $k$-го ПО переводяться в місцеву декартову систему координат $\left\| X_{k,i,t}, Y_{k,i,t}, Z_{k,i,t} \right\|^T$.

3. Відповідно до $\vec{X}_{\text{г}} = \left\| \begin{matrix} A_{\text{гм}} & 0 \\ 0 & A_{\text{гм}} \end{matrix} \right\| \cdot \vec{X}_{\text{м}} + \vec{X}_{0\text{г}}$ з урахуванням координат місцезнаходження $i$-ї ОЕС $\left\| L_i, B_i, H_i \right\|^T$ обчислюються координати $k$-го ПО в Грінвіческій системі координат: $\left\| X_{\Gamma,k,t}, Y_{\Gamma,k,t}, Z_{\Gamma,k,t} \right\|^T$.

4. На основі результатів спостереження за траєкторією руху $k$-го ПО в момент часу $t_0 = t_{об}, t_1 = t_{об} + \Delta t, t_2 = t_{об} + 2\Delta t, ..., t_n = t_{об} + n \cdot \Delta t$, де $n$ – кількість спостережень за $k$-м ПО, $\Delta t$ – крок спостереження, тобто $\left\| X_{\Gamma,k,t}, Y_{\Gamma,k,t}, Z_{\Gamma,k,t} \right\|^T, t = 1,2,...,n$ обчислюються прогнозовані значення місцезнаходження $k$-го ПО в майбутні моменти часу $t + l$, де $l$ – величина попередження, $l = 1,2,..., L$. Прогноз координат місцеположення $k$-го ПО в момент часу $t + l$:

$$\left\| \overline{X}_{\Gamma,k,t+l}, \overline{Y}_{\Gamma,k,t+l}, \overline{Z}_{\Gamma,k,t+l} \right\|^T , \qquad (2.91)$$

обчислюються у вигляді умовного математичного очікування випадкових про-

цесів $\left\|\overline{X}_{\Gamma,k,t+l}, \overline{Y}_{\Gamma,k,t+l}, \overline{Z}_{\Gamma,k,t+l}\right\|^T$ у припущенні, що всі значення $\left\|\overline{X}_{\Gamma,k,t}, \overline{Y}_{\Gamma,k,t}, \overline{Z}_{\Gamma,k,t}\right\|^T$ у попередні моменти часу $t = 1,2,...,n$ відомі [14].

5. Обчислюються відстані між місцеположенням $k$-го ПО в момент часу $t$ та місцеположенням кожного ЗУПО. В такому випадку місцеположення $k$-го ПО та кожного $j$-го ЗУПО знаходяться в Грінвічській системі координат, тому індекс $\Gamma$ опускаємо.

$$\rho_{kjt} = \sqrt{(X_j - X_{kt})^2 + (Y_j - Y_{kt})^2 + (Z_j - Z_{kt})^2}, \tag{2.92}$$

де $\rho_{kjt}$ – відстань між $k$-м ПО і $j$-м ЗУПО,

$$\rho_{kjt} - D_j^* < \varepsilon, \tag{2.93}$$

де $\varepsilon > 0$ – критичне значення допустимої відстані від місцеположення $k$-го ПО в момент часу $t$ до межі зони ураження $j$-го ЗУПО; $D_j^*$ – максимальне значення похилої дальності в зоні ураження $j$-го ЗУПО:

$$D_j^* = \max_{\beta_j} D_j. \tag{2.94}$$

Якщо умова (2.93) не виконається, то переходимо до пункту 1 для наступного моменту часу $t+1$. Якщо умова (2.93) виконується необхідно при наближенні $k$-го ПО до зони ураження $j$-го ЗУПО перевести координати прогнозованого місцеположення ПО з Грінвічської в місцеву декартову систему та сферичну системи координат $j$-го ЗУПО. Для переводу координат використовуємо:

$$\vec{X}_{\text{м}} = \begin{Vmatrix} A_{\text{гм}} & 0 \\ 0 & A_{\text{гм}} \end{Vmatrix}^{\text{T}} \cdot \left( \vec{X}_{\text{г}} - \vec{X}_{0\text{г}} \right), \tag{2.95}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{Y_{\text{м}}}{\sqrt{X_{\text{м}}^2 + Z_{\text{м}}^2}}, \tag{2.96}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Z_{\text{м}}}{X_{\text{м}}}. \tag{2.97}$$

В результаті цих перетворень отримаємо значення кутів лінії візування $j$-го ЗУПО та $k$-го ПО в момент часу $t$: $\beta_{k,t}, \alpha_{k,t}$ для спрощення запису моделей індекси $k, i, j$ надалі опускаємо. Повертаючи інструментальну систему координат на кут $\alpha$, отримаємо $Z_t = 0, X_{t+1} = X^*, Y_{t+l} = Y^*$ та переходимо до структуризації та розв'язання задачі про «зустріч».

2.2.7.2 Структуризація та розв'язання задачі про «зустріч»

Після проведених перетворень математична постановка задачі про «зустріч» має вигляд.

Необхідно знайти мінімум функціонала:

$$\rho^* = \min_{\beta^*_{t+l} \in \Omega \cap \Omega_\beta} \sqrt{(X(l) - \bar{X}_{t+l})^2 + (Y(l) - \bar{Y}_{t+l})^2 + (Z(l) - \bar{Z}_{t+l})^2}, \tag{2.98}$$

$\Omega$:

$$m \cdot \frac{dV_x}{dt} = -kV_x^2, \tag{2.99}$$

$$m \cdot \frac{dV_y}{dt} = -mg - kV_y^2, \tag{2.100}$$

$$\rho = \sqrt{\bar{X}_{t+l}^2 + \bar{Y}_{t+l}^2} < R,$$

$$\Omega_\beta = (5^\circ \le \beta_{t+l}^* \le 85^\circ),$$

початкові умови при $t = 0$:

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ \frac{dx}{dt} = V_0 \cos\beta,\ \frac{dy}{dt} = V_0 \sin\beta - gt,\ \frac{dz}{dt} = 0. \qquad (2.101)$$

граничні умови при t=t+l: $X_{t+1} = X^*, Y_{t+l} = Y^*$.

Для розв'язання задачі в системі реального часу будемо використовувати аналітичний розв'язання СДР (2.99), (2.100) при початкових умовах (2.101):

$$y = \frac{m}{k} \cdot \ln\left( \cos\left(\sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \frac{e^{\frac{kx}{m}} - 1}{V_0 \cos\beta}\right) + \sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot V_0 \sin\beta \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \frac{e^{\frac{kx}{m}} - 1}{V_0 \cos\beta}\right) \right), \qquad (2.102)$$

Використовуючи аналітичні вирази траєкторії руху снаряда (2.102) розв'язок задачі про «зустріч» зводиться до постановки координат ПО $x^*, y^*$ в рівняння (2.102) і його розв'язання відносно $\beta$. Значення $\beta_i^*$, яке забезпечує мінімум (2.98) ($\rho^* = 0$) і є розв'язанням задачі про «зустріч».

## 2.3 Побудова еліпсоїду розсіювання артилерійського снаряда ствольної зенітної артилерії

Побудову еліпсоїда розсіювання наведемо для трьох моделей траєкторій руху артилерійського снаряда: без урахування опору повітря; з лінійною та квадратичною залежністю сили опору від швидкості польоту снаряда.

### 2.3.1 Побудова еліпсоїда розсіювання для моделі траєкторії руху снаряда без урахування опору повітря

Модель траєкторії руху снаряда, в якій силами опору повітря та іншими силами природи знехтуємо, має вигляд:

$$x = V_0 \cdot \cos\beta \cdot t\,, \tag{2.38}$$

$$y = V_0 \cdot \sin\beta \cdot t - \frac{gt^2}{2}\,, \tag{2.39}$$

$$z = V_0 \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha \cdot t = 0\,. \tag{2.40}$$

або виражаємо з (2.38) час $t$, $t = \dfrac{x}{V_0 \cos\beta}$ та підставимо його (2.39):

$$y = x\mathrm{tg}\beta - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2\beta}\,. \tag{2.41}$$

Моделі (2.38) – (2.40), (2.41) є детермінованими, в яких передбачається, що вимірювані параметри $V_0$ і $\beta$ відомі точно. У реальних умовах параметри снаряда: $m$ – маса; $V_0$ – початкова швидкість; $\beta$ – кут місця і $\alpha$ – азимут, є випадковими величинами, відомими приблизно, з точністю до значення параметрів їх законів розподілу [19].

Введемо наступні позначення: $(\Omega, B, P)$ – декартовий добуток імовірнісних просторів $(\Omega_i, B_i, P_i)$, $i = 1,2,...,n$ ($\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n$, $B = B_1 \times B_2 \times ... \times B_n$, $P = P_1 \times P_2 \times ... \times P_n$, де $\Omega_i$ – простір елементарних подій; $B_i$ – σ-алгебри подій із $\Omega_i$; $P_i$ – імовірнісні міри на $B_i$); $c$ – детермінована величина; $c(\omega)$ – випадкова величина, $\omega \in \Omega$; $\overline{c} = \underset{\omega}{\mathrm{M}}\{c(\omega)\}$ – математичне очікування випадкової величини.

В цьому випадку стохастична модель траєкторії руху снаряда приймає

вигляд:

$$x(t,\omega)=V_0(\omega)\cdot\cos\beta(\omega)\cdot t\,, \tag{2.103}$$

$$y(t,\omega)=V_0(\omega)\cdot\sin\beta(\omega)\cdot t-\frac{gt^2}{2}\,, \tag{2.104}$$

$$z(t,\omega)=V_0(\omega)\cdot\cos\beta(\omega)\cdot\sin\alpha(\omega)\cdot t\,, \tag{2.105}$$

або

$$y(\omega)=x(\omega)\mathrm{tg}\beta(\omega)-\frac{gx^2(\omega)}{2V_0^2(\omega)\cos^2\beta(\omega)}\,. \tag{2.106}$$

Будемо припускати, що в момент часу $t$ (пострілу) відомі азимут $\alpha(\omega)$, кут місця $\beta(\omega)$, початкова швидкість снаряда $V_0(\omega)$, маса снаряда $m(\omega)$. Усі перелічені випадкові значення відомі з точністю до параметрів їхнього розподілу:

$$\alpha(\omega)\cong N\left(\bar{\alpha},\sigma_\alpha^2\right), \tag{2.107}$$

$$\beta(\omega)\cong N\left(\bar{\beta},\sigma_\beta^2\right), \tag{2.108}$$

$$V_0(\omega)\cong N\left(\bar{V}_0,\sigma_{V_0}^2\right), \tag{2.109}$$

$$m(\omega)\cong N\left(\bar{m},\sigma_m^2\right), \tag{2.110}$$

де $\bar{\alpha}=\underset{\omega}{\mathrm{M}}\{\alpha(\omega)\}$, $\bar{\beta}=\underset{\omega}{\mathrm{M}}\{\beta(\omega)\}$, $\bar{V}_0=\underset{\omega}{\mathrm{M}}\{V_0(\omega)\}$, $\bar{m}=\underset{\omega}{\mathrm{M}}\{m(\omega)\}$ – математичні очікування; $\sigma_\alpha^2$, $\sigma_\beta^2$, $\sigma_{V_0}^2$, $\sigma_m^2$ – дисперсії помилок вимірювання азимута і кута місця.

Передбачається, що всі випадкові величини $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$, $V_0(\omega)$, $m(\omega)$ не корельовані між собою, тобто незалежні.

В цьому випадку математичні очікування координат розташування сна-

ряда в момент часу $t = t_0 + t$ ($t_0$ – час пострілу) дорівнюють:

$$\bar{x}(t) = \bar{V}_0 \cdot \cos\bar{\beta} \cdot t, \tag{2.111}$$

$$\bar{y}(t) = \bar{V}_0 \cdot \sin\bar{\beta} \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \tag{2.112}$$

$$\bar{z}(t) = \bar{V}_0 \cdot \cos\bar{\beta} \cdot \sin\bar{\alpha} = 0, \text{ тому що } \sin\bar{\alpha} = 0. \tag{2.113}$$

Дисперсії координат снаряда в момент часу $t$ дорівнюють:

$$\sigma_x^2(t) = \left(\frac{\partial x(t)}{\partial V_0}\right)_t^2 \cdot \sigma_{V_0}^2 + \left(\frac{\partial x(t)}{\partial \beta}\right)_t^2 \cdot \sigma_\beta^2, \tag{2.114}$$

$$\sigma_y^2(t) = \left(\frac{\partial y(t)}{\partial V_0}\right)_t^2 \cdot \sigma_{V_0}^2 + \left(\frac{\partial y(t)}{\partial \beta}\right)_t^2 \cdot \sigma_\beta^2, \tag{2.115}$$

$$\sigma_z^2(t) = \left(\frac{\partial z(t)}{\partial V_0}\right)_t^2 \cdot \sigma_{V_0}^2 + \left(\frac{\partial z(t)}{\partial \beta}\right)_t^2 \cdot \sigma_\beta^2 + \left(\frac{\partial z(t)}{\partial \alpha}\right)_t^2 \cdot \sigma_\alpha^2, \tag{2.116}$$

де $\frac{\partial x(t)}{\partial V_0} = \cos\bar{\beta}t$; $\frac{\partial x(t)}{\partial \beta} = -\bar{V}_0 \sin\bar{\beta}t$; $\frac{\partial y(t)}{\partial V_0} = \sin\bar{\beta}t$; $\frac{\partial y(t)}{\partial \beta} = \bar{V}_0 \cos\bar{\beta}t$.

Рівняння меж еліпсоїда з центром на початку МІСК ЗУПО має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{2.117}$$

де $a$, $b$, $c$ – півосі еліпсоїда.

Центром еліпсоїда в МІСК ЗУПО є вектор оцінок математичного очікування координат місця розташування снаряда в момент часу $t$ – $\left\|\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t)\right\|^{\mathrm{T}}$.

Розміри півосей еліпсоїда визначаються ймовірністю, з якою фактичні координати снаряда будуть знаходитися в розглянутому інтервалі щодо математичного очікування по кожній з осей, при відомій дисперсії помилок відхилення фактичного положення снаряда від свого математичного очікування, тобто при відомих дисперсіях $\left\|\sigma_x^2(t),\sigma_y^2(t),\sigma_z^2(t)\right\|^{\mathrm{T}}$ [20].

Розміри довірчих меж еліпсоїда наведені у таблиці 2.7.

Таблиця 2.7 – Розміри довірчих меж еліпсоїда

| Вірогідність $P$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| 0,8664 | $1{,}5\sigma_x$ | $1{,}5\sigma_y$ | $1{,}5\sigma_z$ |
| 0,9544 | $2\sigma_x$ | $2\sigma_y$ | $2\sigma_z$ |
| 0,0876 | $2{,}5\sigma_x$ | $2{,}5\sigma_y$ | $2{,}5\sigma_z$ |
| 0,9974 | $3\sigma_x$ | $3\sigma_y$ | $3\sigma_z$ |

На рисунку 2.8 наведено еліпсоїд розсіювання місця розташування снаряда у МІСК ЗУПО при $P=0{,}9974$ та розмірах півосей $a=3\sigma_x$, $b=3\sigma_y$, $c=3\sigma_z$.

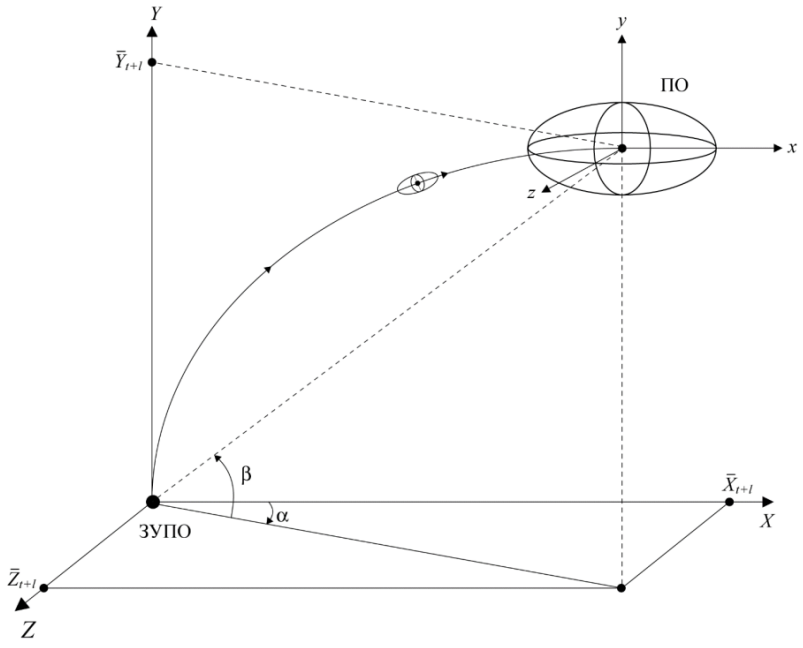


Рисунок 2.8 – Еліпсоїди розсіювання місця розташування снаряда та ПО у топоцентричній МІСК ЗУПО

### 2.3.2 Побудова еліпсоїда розсіювання для моделі з лінійною залежністю сили опору повітря від швидкості польоту снаряда

В цьому випадку стохастична модель траєкторії руху снаряда приймає вигляд:

$$x(t,\omega)=\frac{m(\omega)}{k}V_0(\omega)\left(-e^{-\frac{kt}{m(\omega)}}\right)\cos\beta(\omega), \tag{2.118}$$

$$y(t,\omega)=\frac{m(\omega)}{k}\left(V_0(\omega)\sin\beta(\omega)+\frac{m(\omega)}{k}g\right)\left(-e^{-\frac{kt}{m(\omega)}}\right)-\frac{m(\omega)}{k}gt, \tag{2.119}$$

$$y(\omega)=\left(\operatorname{tg}\beta(\omega)+\frac{m(\omega)g}{kV_0(\omega)\cos\beta(\omega)}\right)x(\omega)+,$$

$$+\frac{m^2(\omega)}{k^2}\ln\left(1-\frac{kx(\omega)}{m(\omega)V_0(\omega)\cos\beta(\omega)}\right), \tag{2.120}$$

$$z(t,\omega)=\frac{m(\omega)}{k}V_0(\omega)\left(-e^{-\frac{kt}{m(\omega)}}\right)\cos\beta(\omega)\cdot\sin\alpha(\omega). \tag{2.121}$$

В цьому випадку дисперсії координат місця розташування снаряда в момент часу $t$ дорівнюють:

$$\sigma_x^2(t)=\left(\frac{\partial x(t)}{\partial V_0}\right)_t^2\cdot\sigma_{V_0}^2+\left(\frac{\partial x(t)}{\partial m}\right)_t^2\cdot\sigma_m^2+\left(\frac{\partial x(t)}{\partial\beta}\right)_t^2\cdot\sigma_\beta^2, \tag{2.122}$$

$$\sigma_y^2(t)=\left(\frac{\partial y(t)}{\partial V_0}\right)_t^2\cdot\sigma_{V_0}^2+\left(\frac{\partial y(t)}{\partial m}\right)_t^2\cdot\sigma_m^2+\left(\frac{\partial y(t)}{\partial\beta}\right)_t^2\cdot\sigma_\beta^2, \tag{2.123}$$

$$\sigma_z^2(t)=\left(\frac{\partial z(t)}{\partial V_0}\right)_t^2\cdot\sigma_{V_0}^2+\left(\frac{\partial z(t)}{\partial m}\right)_t^2\cdot\sigma_m^2+\left(\frac{\partial z(t)}{\partial\beta}\right)_t^2\cdot\sigma_\beta^2+\left(\frac{\partial z(t)}{\partial\alpha}\right)_t^2\cdot\sigma_\alpha^2, \tag{2.124}$$

де

$$\frac{\partial x(t)}{\partial V_0} = \frac{\bar{m}}{k}\left(-e^{-\frac{kt}{\bar{m}}}\right)\cos\bar{\beta},$$

$$\frac{\partial x(t)}{\partial m} = -\frac{\bar{V}_0\cos\bar{\beta}e^{-\frac{kt}{\bar{m}}}}{k} - \frac{\bar{V}_0\cos\bar{\beta}e^{-\frac{kt}{\bar{m}}}kt\log e}{k\bar{m}},$$

$$\frac{\partial x(t)}{\partial \beta} = \sin\bar{\beta}\frac{\bar{m}}{k}\bar{V}_0\left(e^{-\frac{kt}{\bar{m}}}\right),$$

$$\frac{\partial y(t)}{\partial V_0} = -\frac{\bar{m}}{k}\left(\sin\bar{\beta}\right)\left(e^{-\frac{kt}{\bar{m}}}\right),$$

$$\frac{\partial y(t)}{\partial m} = -\frac{e^{-\frac{kt}{\bar{m}}}g\bar{m}}{k^2} - \frac{e^{-\frac{kt}{\bar{m}}}(\frac{g\bar{m}}{k}+\bar{V}_0\sin\bar{\beta})}{k} - \frac{e^{-\frac{kt}{\bar{m}}}kt\log e(\frac{g\bar{m}}{k}+\bar{V}_0\sin\bar{\beta})}{k\bar{m}} - \frac{gt}{k},$$

$$\frac{\partial y(t)}{\partial \beta} = \frac{\bar{m}}{k}\bar{V}_0\cos\bar{\beta}\cdot(-e^{-\frac{kt}{\bar{m}}}),$$

$$\frac{\partial z(t)}{\partial V_0} = \frac{\bar{m}}{k}\left(-e^{-\frac{kt}{\bar{m}}}\right)\cos\bar{\beta}\sin\bar{\alpha},$$

$$\frac{\partial z(t)}{\partial m} = -\frac{e^{-\frac{kt}{\bar{m}}}\bar{V}_0\cos\bar{\beta}\sin\bar{\alpha}}{k} - \frac{e^{-\frac{kt}{\bar{m}}}t\bar{V}_0\log e\cos\bar{\beta}\sin\bar{\alpha}}{\bar{m}},$$

$$\frac{\partial z(t)}{\partial \beta} = \sin\bar{\beta}\sin\bar{\alpha}\frac{\bar{m}}{k}\bar{V}_0\left(e^{-\frac{kt}{\bar{m}}}\right).$$

### 2.3.3 Побудова еліпсоїда розсіювання для моделі з квадратичною залежністю сили опору повітря від швидкості польоту снаряда

Стохастичну модель траєкторії руху снаряда в цьому випадку можна представити у вигляді [21]:

$$x(t,\omega)=\frac{m(\omega)}{k}\cdot\ln\left(1+\frac{k}{m(\omega)}V_0(\omega)\cos\beta(\omega)\cdot t\right), \tag{2.125}$$

$$y(t,\omega)=\frac{m(\omega)}{k}\cdot\ln\left(\begin{array}{l}\cos\left(\sqrt{\frac{kg}{m(\omega)}}\cdot t\right)+\\ +\sqrt{\frac{k}{m(\omega)g}}V_0(\omega)\cos\beta(\omega)\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{kg}{m(\omega)}}\cdot t\right)\end{array}\right), \tag{2.126}$$

$$y(\omega)=\frac{m(\omega)}{k}\cdot\ln\left(\begin{array}{l}\cos\left(\sqrt{\frac{m(\omega)g}{k}}\cdot\frac{e^{\frac{kx(\omega)}{m(\omega)}}-1}{V_0(\omega)\cos\beta(\omega)}\right)+\\ +\sqrt{\frac{k}{m(\omega)g}}\cdot V_0(\omega)\sin\beta(\omega)\cdot\\ \cdot\sin\left(\sqrt{\frac{m(\omega)g}{k}}\cdot\frac{e^{\frac{kx(\omega)}{m(\omega)}}-1}{V_0(\omega)\cos\beta(\omega)}\right)\end{array}\right). \tag{2.127}$$

В цьому випадку дисперсії координат місця розташування снаряда в момент часу $t$ дорівнюють:

$$\sigma_x^2(t)=\left(\frac{\partial x(t)}{\partial V_0}\right)_t^2\cdot\sigma_{V_0}^2+\left(\frac{\partial x(t)}{\partial m}\right)_t^2\cdot\sigma_m^2+\left(\frac{\partial x(t)}{\partial\beta}\right)_t^2\cdot\sigma_\beta^2, \tag{2.128}$$

$$\sigma_y^2(t)=\left(\frac{\partial y(t)}{\partial V_0}\right)_t^2\cdot\sigma_{V_0}^2+\left(\frac{\partial y(t)}{\partial m}\right)_t^2\cdot\sigma_m^2+\left(\frac{\partial y(t)}{\partial\beta}\right)_t^2\cdot\sigma_\beta^2, \tag{2.129}$$

$$\sigma_z^2(t)=\left(\frac{\partial z(t)}{\partial V_0}\right)_t^2\cdot\sigma_{V_0}^2+\left(\frac{\partial z(t)}{\partial m}\right)_t^2\cdot\sigma_m^2+\left(\frac{\partial z(t)}{\partial\beta}\right)_t^2\cdot\sigma_\beta^2+\left(\frac{\partial z(t)}{\partial\alpha}\right)_t^2\cdot\sigma_\alpha^2,\ (2.130)$$

де

$$\frac{\partial x(t)}{\partial V_0}=\frac{\cos\bar{\beta}t}{\left(1+\frac{k}{\bar{m}}\bar{V}_0\cos\bar{\beta}\cdot t\right)},$$

$$\frac{\partial x(t)}{\partial m}=\frac{\ln(1+\frac{kt\bar{V}_0\cos\bar{\beta}}{\bar{m}})}{k}-\frac{\bar{V}_0\cos\bar{\beta}\cdot t}{\bar{m}(1+\frac{k}{\bar{m}}\bar{V}_0\cos\bar{\beta}\cdot t)},$$

$$\frac{\partial x(t)}{\partial\beta}=-\frac{V_0\sin\bar{\beta}t}{1+\frac{k}{\bar{m}}\bar{V}_0\cos\bar{\beta}\cdot t},$$

$$\frac{\partial y(t)}{\partial V_0}=\frac{\bar{m}}{k}\cdot\frac{\sqrt{\frac{k}{\bar{m}g}}\cos\bar{\beta}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{kg}{\bar{m}}}\cdot t\right)}{\cos\left(\sqrt{\frac{kg}{\bar{m}}}\cdot t\right)+\sqrt{\frac{k}{\bar{m}g}}\bar{V}_0\cos\bar{\beta}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{kg}{\bar{m}}}\cdot t\right)},$$

$$\frac{\partial y(t)}{\partial m}=\frac{1}{k}\cdot\ln\left(\cos\left(\sqrt{\frac{kg}{\bar{m}}}\cdot t\right)+\sqrt{\frac{k}{\bar{m}g}}\bar{V}_0\cos\bar{\beta}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{kg}{\bar{m}}}\cdot t\right)\right)+$$

$$+\frac{\bar{m}}{k}\cdot\frac{\frac{kgt\sin\left(\sqrt{\frac{kg}{\bar{m}}}\cdot t\right)}{2\sqrt{\frac{kg}{\bar{m}}}\bar{m}^2}-\frac{kg\sqrt{\frac{k}{\bar{m}g}}t\bar{V}_0\cos\bar{\beta}\cos\left(\sqrt{\frac{kg}{\bar{m}}}\cdot t\right)}{2\sqrt{\frac{kg}{\bar{m}}}\bar{m}^2}}{\cos\left(\sqrt{\frac{kg}{\bar{m}}}\cdot t\right)+\sqrt{\frac{k}{\bar{m}g}}\bar{V}_0\cos\bar{\beta}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{kg}{\bar{m}}}\cdot t\right)},$$

$$\frac{\partial x(t)}{\partial\beta}=\frac{m'}{k}\cdot\frac{-\sin\beta' t\sqrt{\frac{k}{m'g}}V_0'\sin\left(\sqrt{\frac{kg}{m(\omega)}}\cdot t\right)}{\cos\left(\sqrt{\frac{kg}{m(\omega)}}\cdot t\right)+\sqrt{\frac{k}{m(\omega)g}}V_0(\omega)\cos\beta(\omega)\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{kg}{m(\omega)}}\cdot t\right)}.$$

# 3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

## 3.1 Пакет прикладних програм Matlab

Серед безлічі існуючих математичних пакетів, таких як Mathematica, MathCad та ін., система MatLab займає лідируюче місце завдяки зручній вбудованій мові програмування для реалізації найрізноманітніших математичних алгоритмів та задач математичного моделювання. Крім того, цей пакет має додатково інструмент візуального моделювання Simulink, що дозволяє будувати та досліджувати математичні моделі, не вдаючись до їх програмування.

MATLAB – це високорівнева мова технічних розрахунків, інтерактивне середовище розробки алгоритмів та сучасний інструмент аналізу даних. MATLAB у порівнянні з традиційними мовами програмування (C/C++, Java, Pascal, FORTRAN) дозволяє скоротити час розв’язання типових завдань і значно спрощує розробку нових алгоритмів. MATLAB є основою всього сімейства продуктів MathWorks і є головним інструментом для розв’язання широкого спектру наукових та прикладних завдань, в таких галузях як: моделювання об'єктів та розробка систем управління, проектування комунікаційних систем, обробка сигналів та зображень, вимірювання сигналів та тестування, фінансове моделювання, обчислювальна біологія та ін. Ядро MATLAB дозволяє максимально просто працювати з матрицями реальних, комплексних та аналітичних типів даних та зі структурами даних та таблицями пошуку. MATLAB містить вбудовані функції лінійної алгебри (LAPACK, BLAS), швидкого перетворення Фур'є (FFTW), функції для роботи з поліномами, функції базової статистики та чисельного розв'язання диференціальних рівнянь; розширені математичні бібліотеки для Intel MKL Всі вбудовані функції ядра MATLAB розроблені та оптимізовані фахівцями та працюють швидше або так само, як їх еквівалент на C/C++.

Мова MATLAB є високорівневою мовою програмування, що включає базовані на матрицях структури даних, широкий спектр функцій, інтегроване се-

редовище розробки, об'єктно-орієнтовані можливості та інтерфейси до програм, написаних іншими мовами програмування. Програми, написані на MATLAB, бувають двох типів – функції та скрипти. Функції мають вхідні та вихідні аргументи, а також власний робочий простір для зберігання проміжних результатів обчислень та змінних. Скрипти використовують загальний робочий простір. Як скрипти, і функції не інтерпретуються в машинний код і зберігаються як текстових файлів. Існує також можливість зберігати так звані pre-parsed програми - функції та скрипти, оброблені у вигляд, зручний для машинного виконання. У випадку такі програми виконуються швидше звичайних. Основною особливістю мови MATLAB є його широкі можливості по роботі з матрицями, які творці мови висловили у гасла.

MATLAB надає користувачеві велику кількість (кілька сотень) функцій для аналізу даних, що покривають практично всі галузі математики, зокрема: Матриці та лінійна алгебра - алгебра матриць, лінійні рівняння, власні значення та вектори, сингулярності, факторизація матриць та інші. Багаточлени та інтерполяція - коріння багаточленів, операції над багаточленами та їх диференціювання, інтерполяція та екстраполяція кривих та інші. Математична статистика та аналіз даних - статистичні функції, статистична регресія, цифрова фільтрація, швидке перетворення Фур'є та інші. Обробка даних - набір спеціальних функцій, включаючи побудову графіків, оптимізацію, пошук нулів, чисельне інтегрування (у квадратурах) та інші. Диференціальні рівняння - розв'язання диференціальних та диференціально-алгебраїчних рівнянь, диференціальних рівнянь із запізненням, рівнянь з обмеженнями, рівнянь у приватних похідних та інші. Розріджені матриці – спеціальний клас даних пакету MATLAB, що використовується у спеціалізованих додатках. Цілочисельна арифметика — виконання операцій цілочисленної арифметики серед MATLAB. Розробка алгоритмів MATLAB надає зручні засоби розробки алгоритмів, включаючи високорівневі з використанням концепцій об'єктно-орієнтованого програмування. У ньому є всі необхідні засоби інтегрованого середовища розробки, включаючи налагоджувач та профайлер. Функції до роботи з цілими типами даних полегшують ство-

рення алгоритмів для мікроконтролерів та інших додатків, де це необхідно.

Для MATLAB є можливість створювати спеціальні набори інструментів (toolbox), що розширюють його функціональність. Набори інструментів є колекцією функцій, написаних мовою MATLAB для розв'язання певного класу завдань. Компанія Mathworks постачає набори інструментів, які використовуються в багатьох областях, включаючи наступні: Цифрова обробка сигналів, зображень та даних: , зображень, проектування цифрових фільтрів та систем зв'язку. Системи управління: Control Systems Toolbox, μ-Analysis and Synthesis Toolbox, Robust Control Toolbox, System Identification Toolbox, LMI Control Toolbox, Model Predictive Control Toolbox, Model-Based Calibration Toolbox - набори функцій, що полегшують аналіз та синтез динамічних систем, проектування, моделювання та ідентифікацію систем управління, включаючи сучасні алгоритми управління, такі як робастне управління, H∞-управління, ЛМН-синтез, μ-синтез та інші. Фінансовий аналіз: GARCH Toolbox, Fixed-Income Toolbox, Financial Time Series Toolbox, Financial Derivatives Toolbox, Financial Toolbox, Datafeed Toolbox - набори функцій, що дозволяють швидко та ефективно збирати, обробляти та передавати різну фінансову інформацію. Аналіз та синтез географічних карт, включаючи тривимірні: Mapping Toolbox. Збір та аналіз експериментальних даних: Data Acquisition Toolbox, Image Acquisition Toolbox, Instrument Control Toolbox, Link for Code Composer Studio – набори функцій, що дозволяють зберігати та обробляти дані, отримані в ході експериментів, у тому числі в реальному часі. Підтримується широкий спектр наукового та інженерного вимірювального обладнання. Візуалізація та подання даних: Virtual Reality Toolbox – дозволяє створювати інтерактивні світи та візуалізувати наукову інформацію за допомогою технологій віртуальної реальності та мови VRML. Засоби розробки: MATLAB Builder for COM, MATLAB Builder for Excel, MATLAB Compiler, Filter Design HDL Coder – набори функцій, що дозволяють створювати незалежні програми із середовища MATLAB. Взаємодія із зовнішніми програмними продуктами: MATLAB Report Generator, Excel Link, Database Toolbox, MATLAB Web Server, Link for ModelSim - набори функцій,

що дозволяють зберігати дані у різних видів таким чином, щоб інші програми могли з ними працювати. Бази даних Database Toolbox — інструменти роботи з базами даних. Наукові та математичні пакети: Bioinformatics Toolbox, Curve Fitting Toolbox, Fixed-Point Toolbox, Fuzzy Logic Toolbox, Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox, OPC Toolbox, Optimization Toolbox, Partial Differential Equation Toolbox, Spline Toolbox, Stati Toolbox математичних функцій, що дозволяють вирішувати широкий спектр наукових та інженерних завдань, включаючи розробку генетичних алгоритмів, розв'язання задач у приватних похідних, цілісні проблеми, оптимізацію систем та інші. Нейронні мережі: Neural Network Toolbox – інструменти для синтезу та аналіз нейронних мереж. Символьні обчислення: Symbolic Math Toolbox – інструменти для символьних обчислень із можливістю взаємодії із символьним процесором програми Maple.

## 3.2 Опис програми

Програма виконана з використанням можливостей пакету Matlab, який дозволяє створювати програмні продукти у формі електронних документів. При відкритті програми перед користувачем з’являється вікно, в якому показано меню можливостей програми. В кожному із пунктів меню є комірки, які дозволяють редагувати параметри величин, які використовуються при розв’язанні даної задачі.

В першому пункті програми записуємо основні параметри снаряда, чисельно за допомогою методу Рунге-Кутти вирішуємо систему звичайних диференціальних рівнянь, що визначає траєкторію польоту снаряда, будуємо зону ураження та приводимо графічні результати. В другому пункті – моделюємо траєкторію польоту снаряда в атмосфері для випадків: без урахування опору повітря, при лінійній залежності сили опору від швидкості снаряда, при квадратичній залежності сили опору від швидкості снаряда та різних кутів піднесення. В третьому пункті вирішуємо задачу про «зустріч».

# 4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

## 4.1 Побудова зон ураження та безпеки

Побудова зон ураження та безпеки була проведена для 23-мм зенітної самохідної установки ЗСУ-23-4 «Шилка».

Рисунок 4.1 – ЗСУ-23-4 «Шилка»

Основним озброєнням ЗСУ-23-4 є 43-мм зброя АЗП-23 «Амур».

Рисунок 4.2 – 23-мм снаряд, що входить до боєкомплекту ЗСУ-23-4

Таблиця 4.1 – Основні параметри

| | | |
|---|---|---|
| Калібр гармат, мм | | 23 |
| Маса снаряда, кг | | 0,19 |
| Початкова швидкість снаряда, м/с | | 950 |
| Розміри зони ураження, км | – по дальності | 0-2,5 |
| | – по висоті | 0-1,5 |
| Кути наведення | – по вертикалі | от -4° до +85° |
| | – по горизонту | 360° |

Для визначення зони ураження повітряних цілей розраховувалися траєкторії польоту некерованого снаряда при кутах підвищення від 45° до 85° з кроком 1°. Система звичайних диференціальних рівнянь, що визначає траєкторію польоту некерованого снаряда в атмосфері Землі з урахуванням опору повітря, вирішувалася чисельно шляхом Рунге-Кутти 4-го порядку. Параметри задачі наведено у табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Параметри задачі

| | |
|---|---|
| Маса снаряда, кг | 0,19 |
| Калібр снаряда, м | $23 \cdot 10^{-3}$ |
| Початкова швидкість снаряда, м/с | 950 |
| Коефіцієнт опору форми снаряда | 0,47 |
| Щільність повітря $\rho$, кг/м$^3$ | 1,225 |
| Залежність сили опору повітря від швидкості снаряда | Квадратична: $F_{conp} = kV^2$ |
| Азимут | 0° |
| Кут місця | 45°…85° |

Результати розрахунків графічно представлені нижче на рис. 4.3 – 4.6.

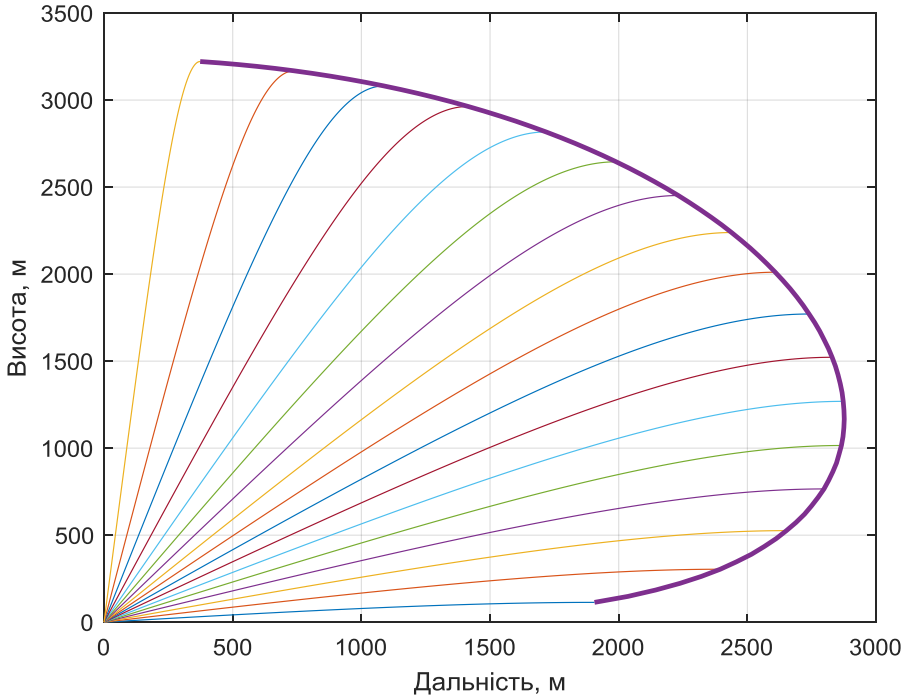


Рисунок 4.3 – Зона ураження ЗСУ-23-4 при стрільбі по повітряним цілям снарядами з пчатковою швидкістю 950 м/с та масою 0,19 кг, результати розрахунків у площині *XOY*

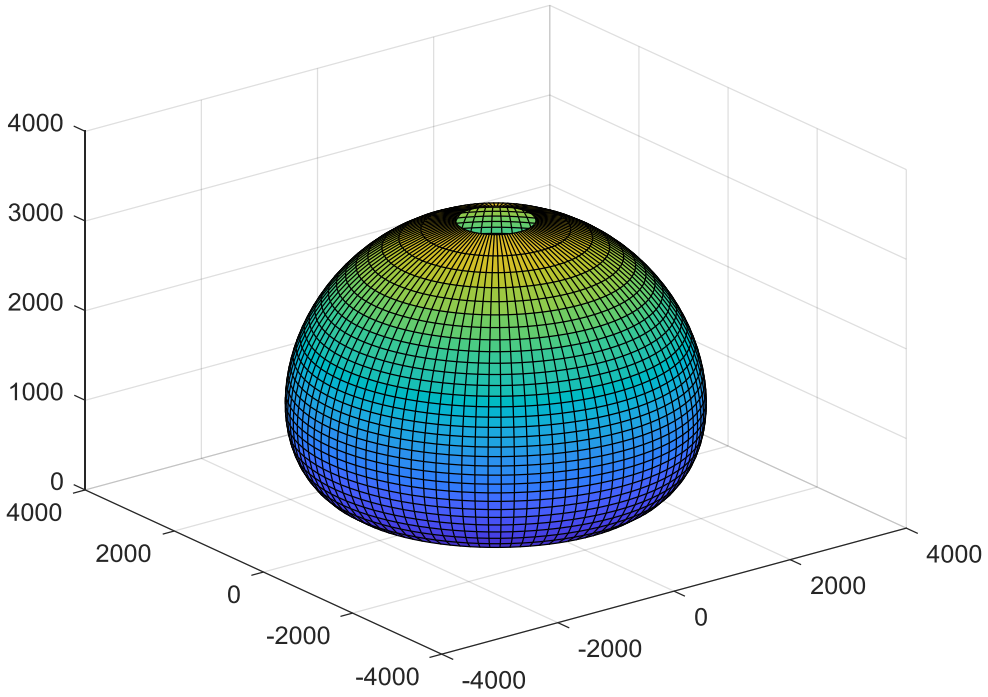


Рисунок 4.4 – 3D-візуалізація зони ураження ЗСУ-23-4 при стрільбі по повітряним цілям

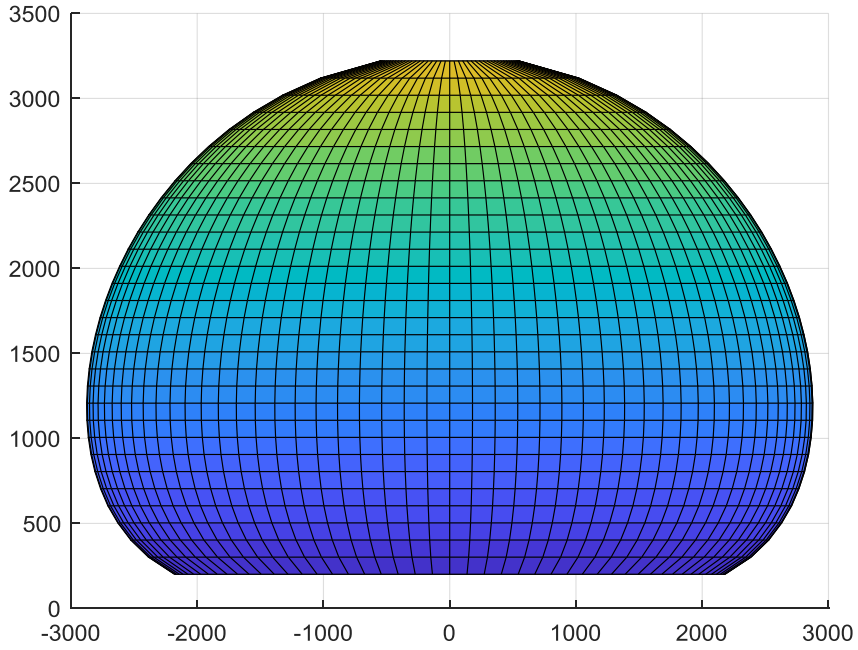


Рисунок 4.5 – проекція 3D поверхні на площину *XOY*

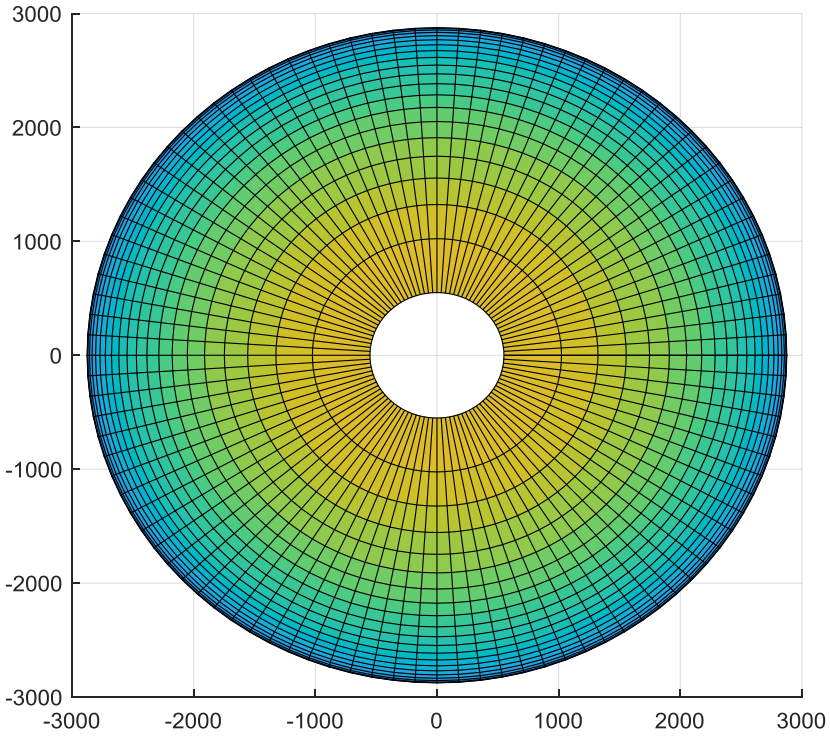


Рисунок 4.6 – проекція 3D поверхні на площину *XOZ*

На рис. 4.7 показані повні траєкторії польоту некерованого 23-мм снаряда ЗСУ-23-4 в атмосфері Землі, якими визначається межа зони безпеки (рис.4.8).

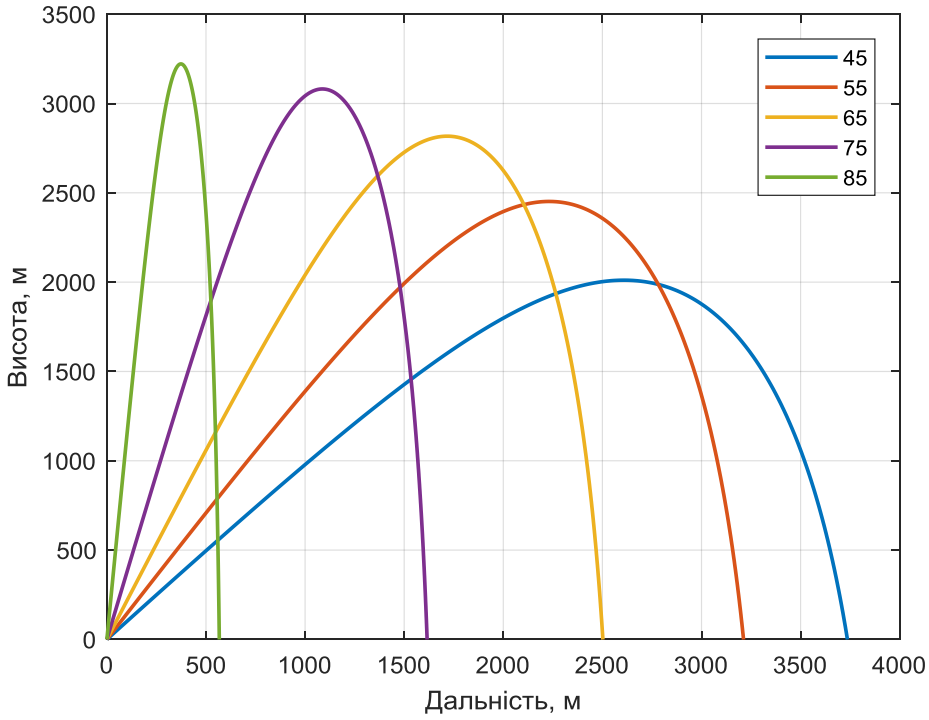


Рисунок 4.7 – Траєкторії польоту некерованого 23 мм снаряда ЗСУ-23-4 в атмосфері Землі

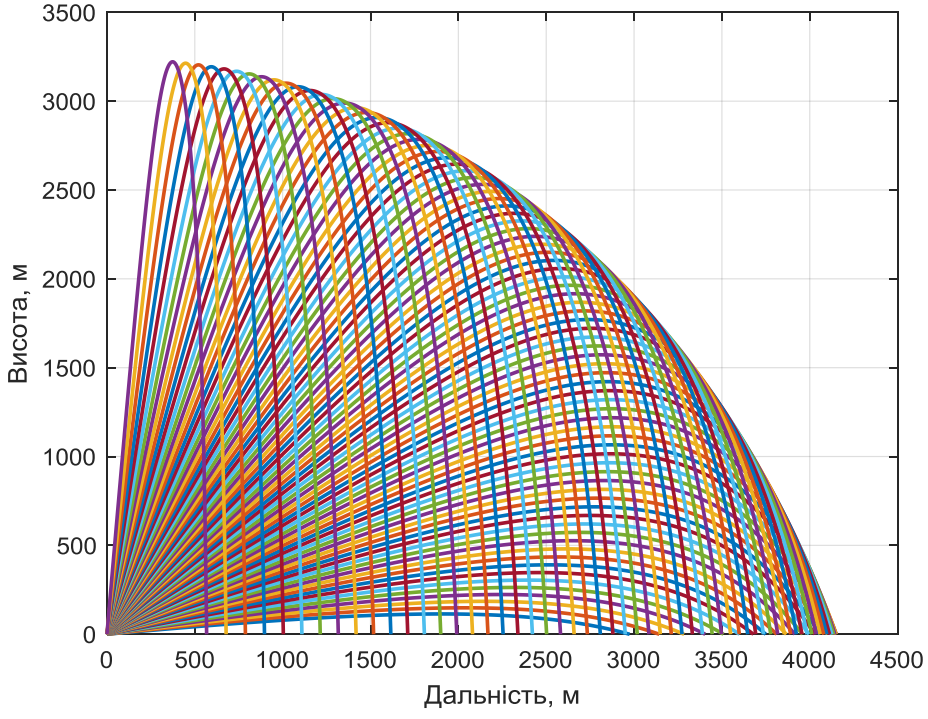


Рисунок 4.8 – Кордон зони безпеки ЗСУ-23-4 при стрільбі по повітряним цілям снарядами з початковою швидкістю 950 м/с та масою 0,19 кг у площині *XOY*

4.2 Моделювання траєкторії польоту артилерійського снаряда в атмосфері

Для випадку, коли $F_S = 0$ використовувалася формула (параболічна теорія, рух у порожнечі під дією сили тяжіння):

$$y = x \cdot tg\beta - \frac{g}{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos^2 \beta} \cdot x^2.$$

Для випадку лінійної залежності сили опору повітря від швидкості снаряда ($F_S = kV$) використовувалася формула:

$$y = \left( tg\beta + \frac{m\,g}{kV_0 \cos\beta} \right) \cdot x + \frac{m^2}{k^2} \cdot g \cdot \ln\left( 1 - \frac{k\,x}{mV_0 \cos\beta} \right).$$

Для випадку квадратичної залежності сили опору повітря від швидкості снаряда ($F_S = kV^2$) використовувалися формули:

$$y = \frac{m}{k} \ln\left[ \cos\left( \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \frac{e^{\frac{kx}{m}} - 1}{V_0 \cos\beta} \right) + \sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot V_0 \cdot \sin\beta \cdot \sin\left( \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \frac{e^{\frac{kx}{m}} - 1}{V_0 \cos\beta} \right) \right]$$

$$y = \frac{m}{k} \cdot \ln\left| \cos\left[ arctg\left( \sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot V_0 \cdot \sin\beta \right) - \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \frac{1}{V_0 \cdot \cos\beta} \cdot \left( e^{\frac{kx}{m}} - 1 \right) \right] \right| -$$

$$- \frac{m}{k} \cdot \ln\left| \cos\left[ arctg\left( \sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot V_0 \cdot \sin\beta \right) \right] \right|$$

Результати чисельного розв'язання системи диференціальних рівнянь з допомогою методом Рунге-Кутти 4-го порядку повністю збігаються з розрахунковими даними, отриманими за формулами.

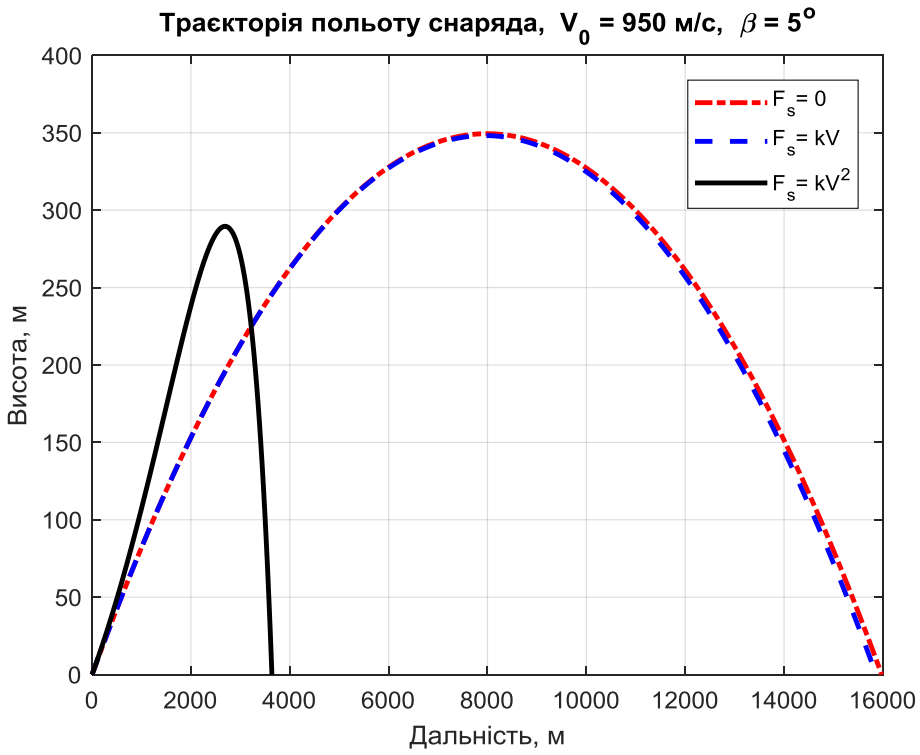


Рисунок 4.9 – Траєкторія польоту снаряда в атмосфері при $\beta = 5^{\circ}$

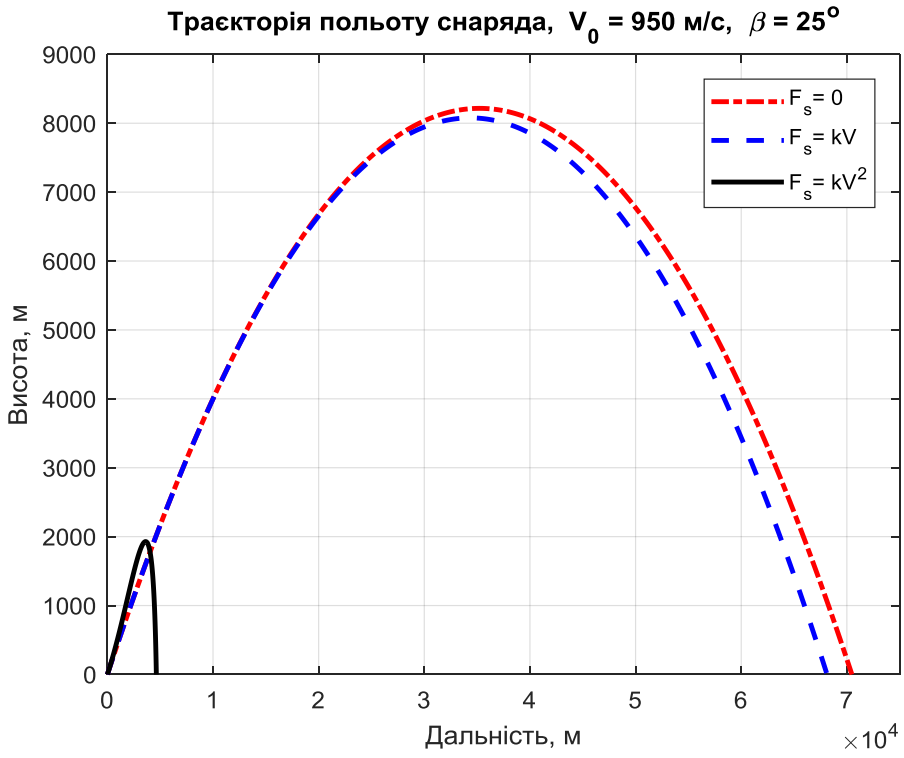


Рисунок 4.10 – Траєкторія польоту снаряда в атмосфері при $\beta = 25^{\circ}$

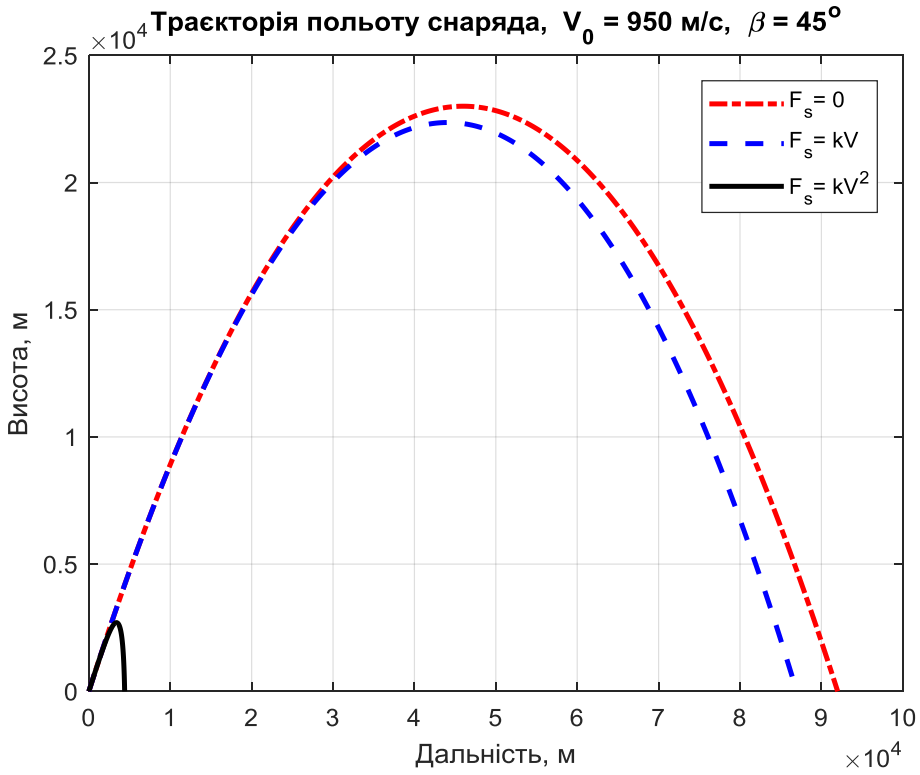


Рисунок 4.11 – Траєкторія польоту снаряда в атмосфері при $\beta = 45^{\circ}$

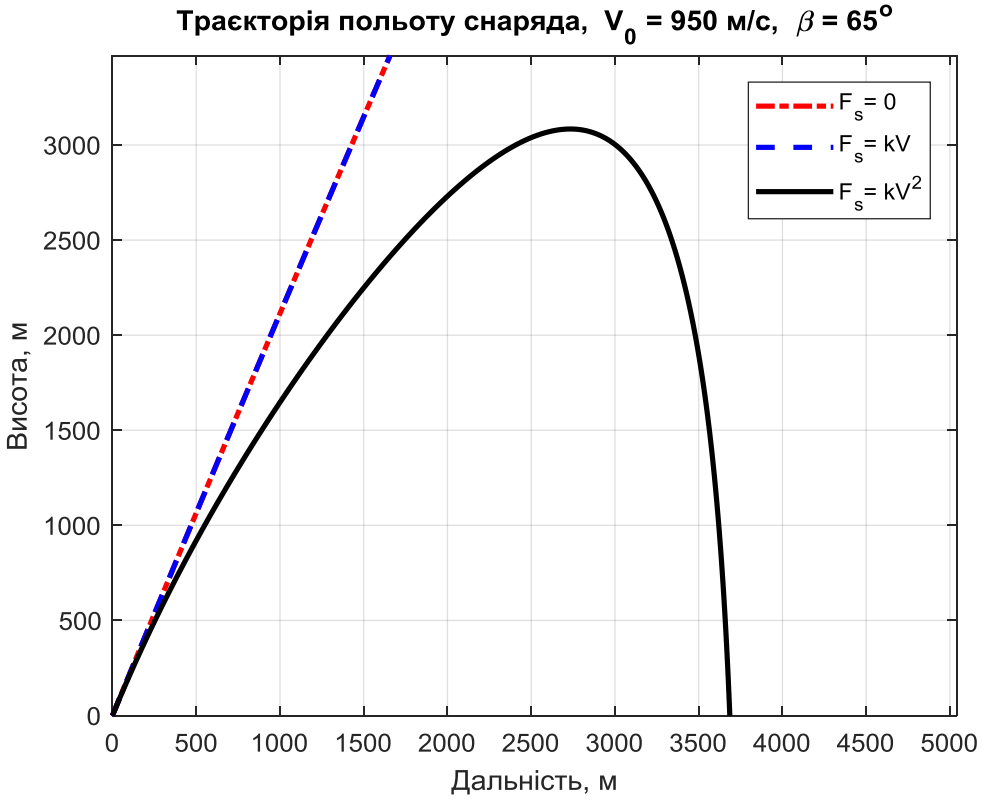


Рисунок 4.12 – Траєкторія польоту снаряда в атмосфері при $\beta = 65^{\circ}$

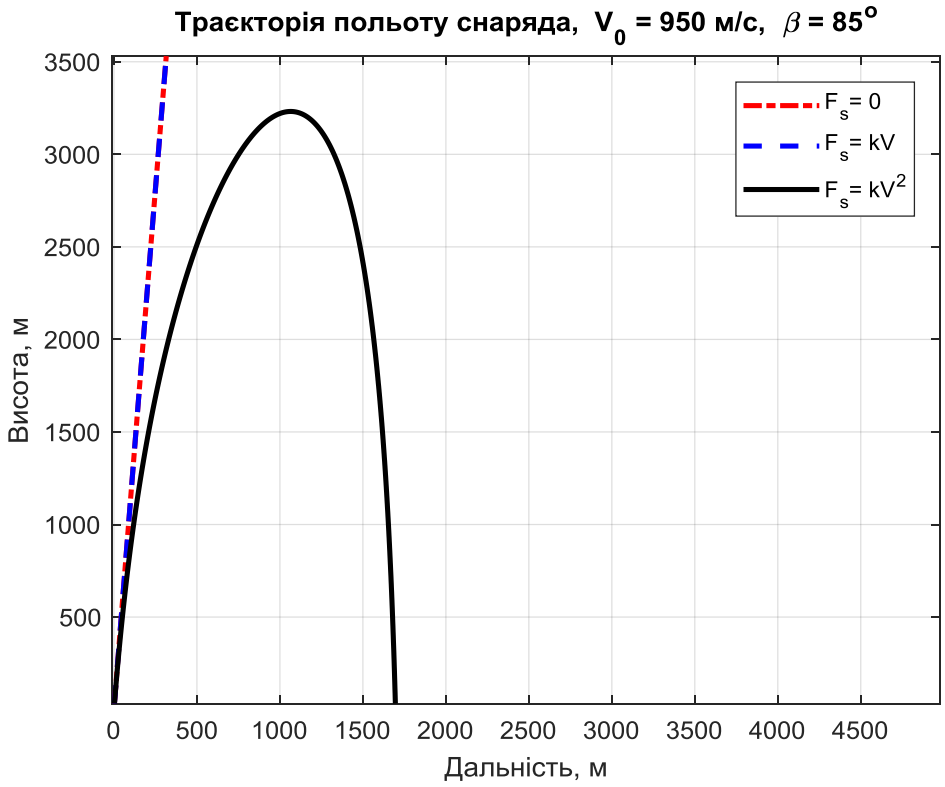


Рисунок 4.13 – Траєкторія польоту снаряда в атмосфері при $\beta = 85^{\circ}$

## 4.3 Результати розв'язання задачі про «зустріч»

Таблиця 4.3 – Дані для задачі

| Координати об'єкту, м | | Кут візування об'єкта $\beta$, ° | Кут піднесення (прицілювання) $\beta^*$, ° | Час зустрічі, с |
|---|---|---|---|---|
| X_vis | Y_vis | | | |
| 131.233 | 1500 | 85 | 86.929 | 2.688 |
| 401.924 | 1500 | 75 | 79.837 | 2.728 |
| 699.462 | 1500 | 65 | 71.028 | 2.845 |
| 1.0503e+03 | 1500 | 55 | 59.909 | 3.125 |
| 1.5000e+03 | 1500 | 45 | 46.220 | 3.797 |

Інформація для Шилки. Квадратична залежність сили опору повітря від швидкості. Розрахунок часу від моменту пострілу до моменту зустрічі за формулою:

$$t = \frac{m}{kV_0 \cos\beta^*}\left(e^{kx/m} - 1\right).$$

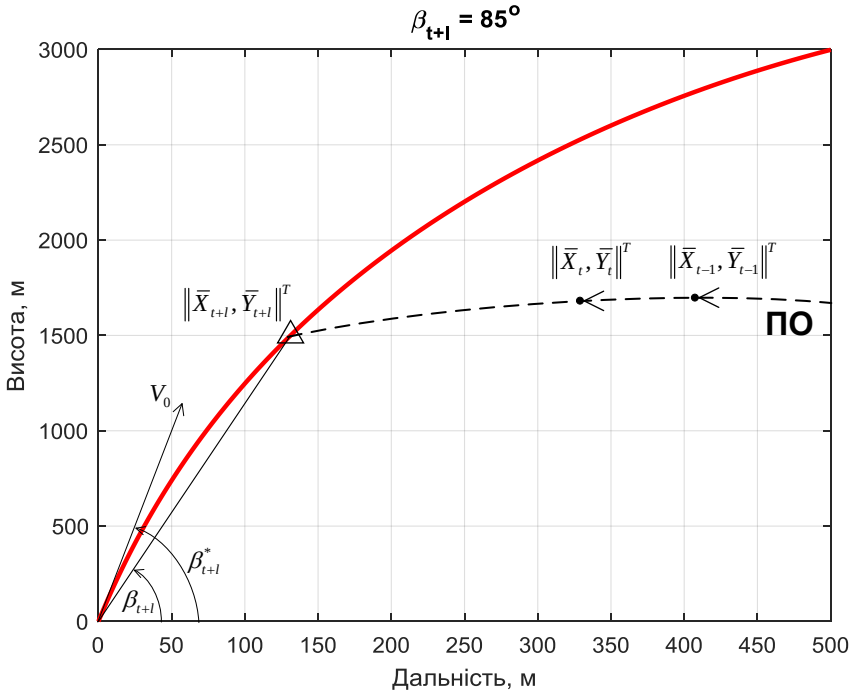


Рисунок 4.14 – Зустріч снаряда з ПО при $\beta = 85^\circ$

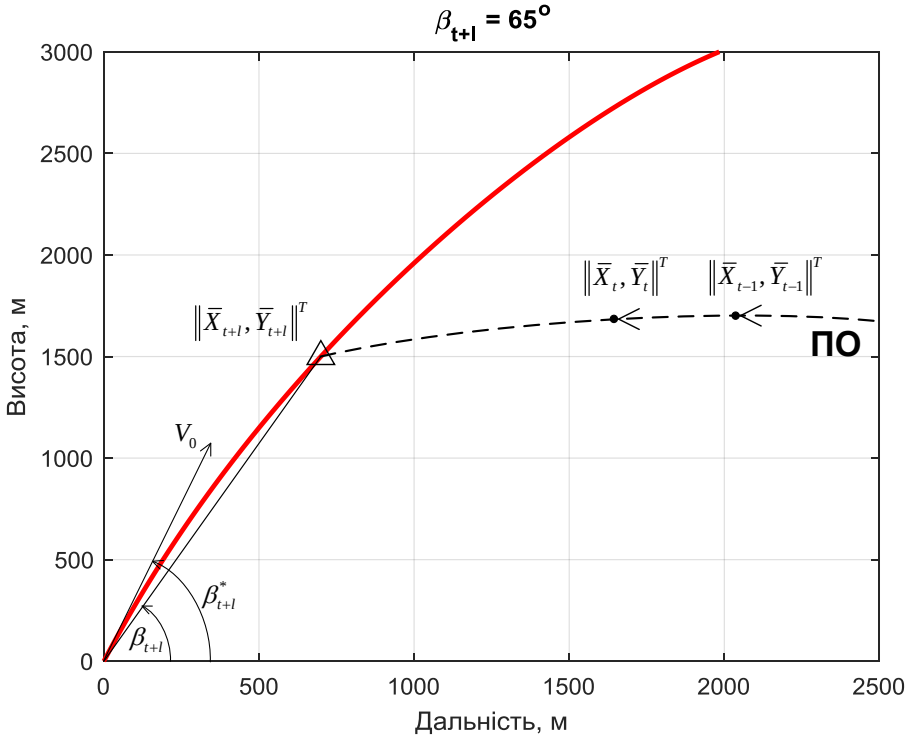


Рисунок 4.15 – Зустріч снаряда з ПО при $\beta = 65^\circ$

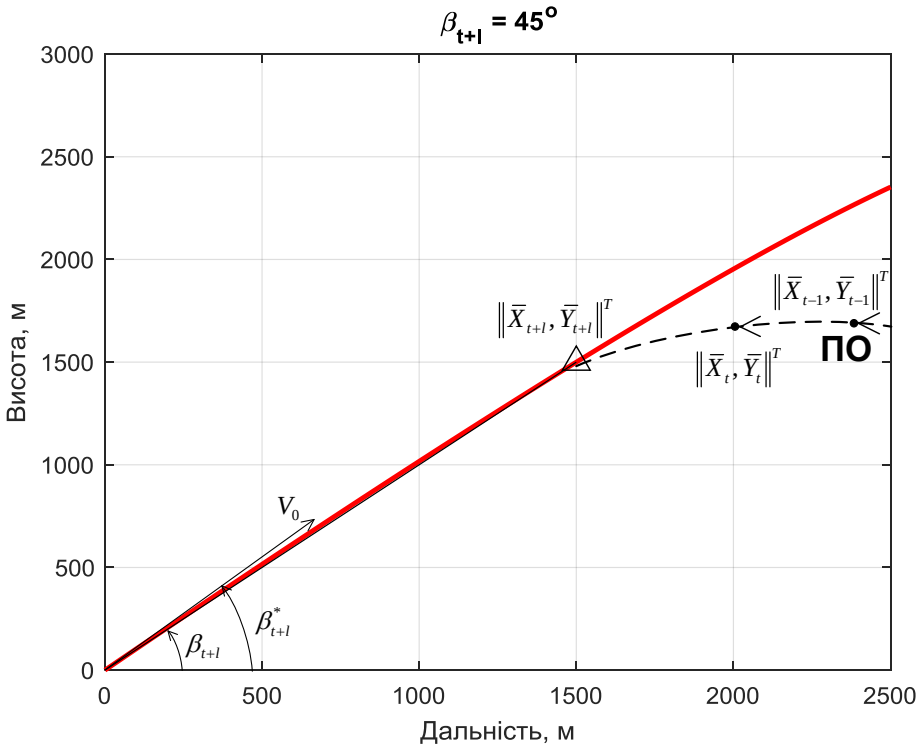


Рисунок 4.16 – Зустріч снаряда з ПО при $\beta = 45^\circ$

# ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі розроблено математичне та програмне забезпечення, що дозволяє підвищити точність розв'язання задачі про «зустріч», точніше визначати межі області розсіювання та зони безпеки при стрільбі з урахуванням рельєфу місцевості, розраховувати траєкторії снаряду при стрільбі.

Виконано усі поставлені задачі для досягнення мети кваліфікаційної роботи, а саме:

– вибрано та обґрунтовано стартові системи координат для побудови математичної моделі;

– розглянуто математичну модель просторового руху снаряда без урахування опору повітря;

– розглянуто математична модель просторового руху снаряда при лінійній залежності сили опору від швидкості руху;

– розглянуто математичну модель просторового руху снаряда при квадратичній залежності сили опору від швидкості руху;

– побудовано межі зони ураження та зони безпеки для конкретного типа ЗУПО;

– побудовано еліпсоїд розсіювання артилерійського снаряда ствольної зенітної артилерії;

– здійснено структуризацію метода розв’язання задачі про «зустріч»;

– здійснено програмну реалізацію математичної моделі задачі про «зустріч»;

– оцінено ефективність математичної моделі та метода її розв’язання.

# ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Правдин В. М., Шанин А. П. Баллистика неуправляемых летательных аппаратов. Снежинск : РФЯЦ-ВНИИТФ, 1999. 496с.

2. Карманов Д. Д., Лепіхін Т. А., Жабко Н. А. Про деякі задачі зовнішньої балістики // Сучасні інформаційні технології та ІТ-освіта. 2017. № 2. С. 75–80.

3. Дмитриевский А. А., Лысенко Л. Н. Внешняя баллистика. Москва : МАИ, 2005. 608 с.

4. Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков. Москва : МГУ, 1978. 575 с.

5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Москва : Наука, 1976. 584 с.

6. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2. Москва : Наука, 1985. 560 с.

7. Толпегин О. А. Экспериментальная баллистика. Санкт-Петербург : БГТУ, 2015. 208 с.

8. Леушин А. М., Нигматуллин Р. Р., Прошин Ю. Н. Теоретическая физика. Механика (практический курс). Задачник. Казань : Казан. ун-т, 2015. 250 с.

9. Коновалов А. А., Николаев Ю. В. Внешняя баллистика. Москва : ЦНИИ информации, 1979. 228 с.

10. Маевский Н. В. Курс внешней баллистики. Санкт-Петербург : Тип. импер. акад. наук., 1870. 772 с.

11. Вентцель Д. А., Шапиро Я. М. Внешняя баллистика. Москва : Государственное издательство обороонной промышленности, 1939. 251 с.

12. Окунев Б. Н. Основная задача внешней баллистики. Москва : ОНТИ, 1934. 524 с.

13. Степанов В. П. Внешняя баллистика. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2011. 542 с.

14. Шапиро Я. М. Внешняя баллистика: учебник. Москва : Государственное издательство оборонной промышленности, 1946. 408 с.

15. Ревинская О. Г. Основы программирования в MatLab. Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2016. 208 с.

16. Таранчук В. Б. Основные функции систем компьютерной алгебры. Минск : БГУ, 2013. 59с.

17. Акритас А. Основы компьютерной алгебры с приложениями. Москва : Мир, 1994. 544 с.

18. Гуськов А. В., Милевский К. Е., Сотенко А. В. Внешняя баллистика. Новосибирск : НГТУ, 2017. 188 с.

19. Артиллерийское оружие ВМФ / Косарев В. В., Пушин В. Г., Пономарев А. И. [и др.]. Санкт-Петербург : СПбГЭТУ ЛЭТИ, 2003. 43 с.

20. Основы проектирования информационно управляющих систем летальных аппаратов / Мубаракшин Р. В., Оркин Б. Д., Саблин И. П., Шингирий М. Москва : МАИ. 1999. 432 с.

21. Амельянчик А. И., Горбач Н. И. К вопросу о движении артиллерийского снаряда. Минск : БНТУ, 2009. 260 с.

22. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. Москва : Наука, 1981. 480 с.

23. Тевяшев А. Д., Колядин А. В. Методи та алгоритми посекторного сканування в оптико-електронних станціях кругового моніторингу повітряного простору // Матеріали 8-ї міжнародної науково-технічної конференції «Інформаційні системи та технології-2019. 2019. С. 140–142.