

## РОЗПОДІЛЕННЯ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ МІЖ ЦИЛІНДРИЧНИМИ ЕЛЕКТРОДАМИ СКЛАДНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ

Дослідження та моделювання фізичних процесів реальних об'єктів вимагають у залежності від деталізації опису процесу уточнення або додаткового опису окремих складових частин, що розглядаються.

У багатьох задачах вакуумної електроніки при дослідженні фізичних процесів, що мають місце в електронних приладах, постає необхідність визначення розподілення електричних полів у міжелектродному просторі, як основного чинника.

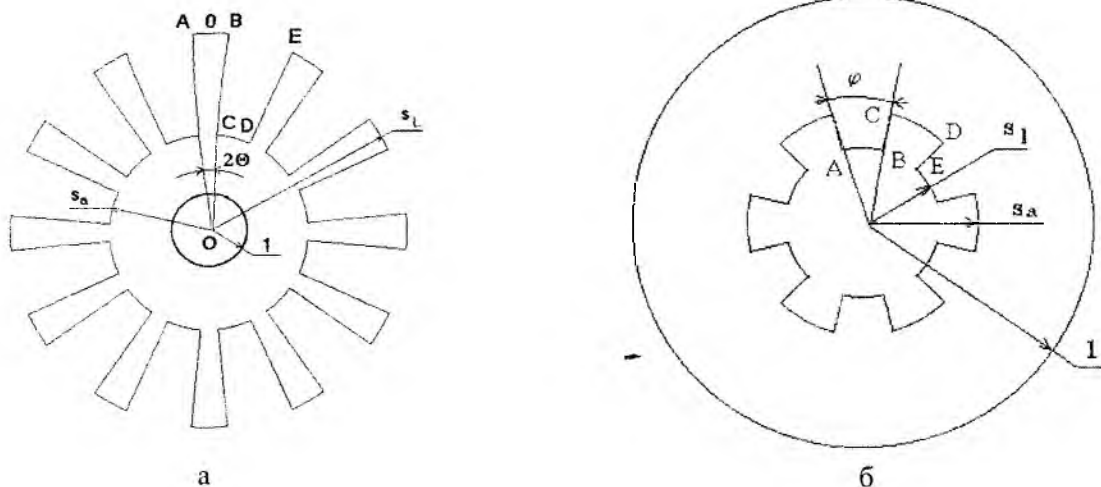
На першій стадії теоретичних досліджень фізичних процесів у таких приладах необхідно визначити ті початкові та межові умови, під впливом яких відбувається робота приладу. Однією з таких умов є розподілення електростатичного потенціалу у міжелектродному просторі.

Здебільшого конфігурація електродів таких приладів не є циліндричною, а має більш складну форму.

Методиці визначення розподілення електростатичного потенціалу між електродами складної конфігурації й присвячено цю статтю.

### Формулювання задачі

Конфігурація систем зі схрещеними полями, котрі є базовими для приладів М-типу, має один з електродів, що називається сповільнюючою системою, просторово-періодичної форми по азимуту (див. рис.).



Для таких конфігурацій простору взаємодії необхідно знайти розподілення електростатичного потенціалу за умови, що між електродами існує різниця потенціалів  $U_0$ .

Розподілення потенціалу у таких системах визначається розв'язком рівняння Лапласа, що записано у циліндричних координатах [1 — 3]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0$$

Для узагальнення системи на будь-які розміри доцільніше перейти до безрозмірних координат. Тоді матимемо:

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial U}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (1)$$

де  $s = r/r_c$ .

Таким чином, необхідно здобути розв'язок рівняння (1) за таких межових умов:

1.  $U(l) = 0$ ;
2.  $U(l) = U_a$ ,

де  $\Gamma$  — поверхня анодного блоку.

### Побудова розв'язку рівняння Лапласа за складних межових умов

Для розв'язання рівняння (1) використаємо метод розділення змінних.

Отже, загальний розв'язок рівняння (1) з застосуванням методу розділення змінних має вигляд:

$$u(s, \varphi) = A_0 \ln s + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n s^n + D_n s^{-n}) (A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi). \quad (3)$$

Періодом анодної сповільнюючої системи зі схрещеними полями, як наведено на рис., є кут АОЕ, або у кутовому обчисленні  $2\pi/N$ , де  $N$  - кількість резонаторів анодної системи. Тоді вираз (3) матиме вигляд:

$$u(s, \varphi) = A_0 \ln s + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n s^n + D_n s^{-n}) (A_n \sin Nn\varphi + B_n \cos Nn\varphi) \quad (4)$$

через те, що  $2\pi / \frac{2\pi}{N} = N$ .

Для знаходження конкретного вигляду виразу (4) необхідно застосувати межові умови.

#### 1. Межові умови на катоді $u(l, \varphi) = \vartheta$

Через це  $C_n + D_n = 0$ , звідси  $D_n = -C_n$ . Після визначення коефіцієнту  $D_n$ , розв'язок (2) матиме вигляд

$$u(s, \varphi) = A_0 \ln s + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (s^{Nn} - s^{-Nn}) (A_n \sin Nn\varphi + B_n \cos Nn\varphi). \quad (5)$$

#### 2. Межові умови на аноді

Дуга АВ

$$\begin{aligned} s &= s_L \\ -\theta &\leq \varphi \leq \theta \end{aligned}$$

$$u(s, \varphi) = A_0 \ln s_L + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (s_L^{Nn} - s_L^{-Nn}) (A_n \sin Nn\varphi + B_n \cos Nn\varphi)$$

Відрізок ВС

$$\begin{aligned} s_a &\leq s \leq s_L \\ \varphi &= \theta \end{aligned}$$

$$u(s, \varphi) = A_0 \ln s + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (s^{Nn} - s^{-Nn}) (A_n \sin Nn\theta + B_n \cos Nn\theta)$$

Дуга CD

$$\begin{aligned} s &= s_a \\ \theta &\leq \varphi \leq 2\pi/N - \theta \end{aligned}$$

$$u(s, \varphi) \Big|_{\substack{s_a \leq s \leq s_L \\ \varphi = \theta}} = A_0 \ln s_a + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (s_a^{Nn} - s_a^{-Nn}) (A_n \sin Nn\varphi + B_n \cos Nn\varphi) = U_a$$

Відрізок DE

$$\begin{aligned} s_a &\leq s \leq s_L \\ \varphi &= 2\pi/N - \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(s, \varphi) \Big|_{\substack{s_a \leq s \leq s_L \\ \varphi = \theta}} &= A_0 \ln s + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (s^{Nn} - s^{-Nn}) [A_n \sin Nn(\frac{2\pi}{N} - \theta) + B_n \cos Nn(\frac{2\pi}{N} - \theta)] = \\ &= A_0 \ln s + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (s^{Nn} - s^{-Nn}) (-A_n \sin Nn\theta + B_n \cos Nn\theta) = U_a \end{aligned}$$

Порівняємо умови 3 та 5

$$\begin{aligned} A_0 \ln s + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (s^{Nn} - s^{-Nn}) (A_n \sin Nn\theta + B_n \cos Nn\theta) = \\ = A_0 \ln s + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (s^{Nn} - s^{-Nn}) (-A_n \sin Nn\theta + B_n \cos Nn\theta) \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n (s^{Nn} - s^{-Nn}) \sin Nn\theta = 0.$$

Позначимо  $F_n = A_n C_n \sin Nn\theta$ , тоді  $\sum_{n=1}^{\infty} F_n (s^{Nn} - s^{-Nn}) = 0$ , або  $\sum_{n=1}^{\infty} F_n s^{Nn} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n s^{-Nn}$

Для будь-якого фіксованого  $s$  це рівняння виконуватиметься за  $F_n = 0$ . Таким чином, остаточно маємо:

$$u(s, \varphi) = A_0 \ln s + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (s^{Nn} - s^{-Nn}) \cos Nn\varphi \quad (6)$$

Отже, залишилися визначити коефіцієнти  $A_0$  та  $A_n$ .

### Визначення коефіцієнтів у розв'язанні рівняння Лапласа

Визначити коефіцієнти у виразі (6) можна за допомогою кількох методів: розвинення виразу (6) у ряд Фур'є, варіаційних методів, методу Л.В. Конторовича, методу Треффца, методів Ритца та Гальоркіна, методу сіток тощо.

Для визначення коефіцієнтів  $A_n$  розвинемо вираз (6) у ряд Фур'є. При визначенні коефіцієнтів ряду Фур'є зауважимо, що вираз (6) є парною функцією, тоді коефіцієнти ряду Фур'є визначаються як [4]:

$$a_m = \frac{N}{\pi} \int_{-\theta}^{\frac{2\pi}{N}-\theta} u(s, \varphi) \cos Nm\varphi d\varphi.$$

1. Розвинемо ліву частину виразу (6):

$$a_0 = \frac{N}{\pi} \int_{-\theta}^{\frac{2\pi}{N}-\theta} U_a d\varphi = 2U_a, \quad a_m = \frac{N}{\pi} U_a \int_{-\theta}^{\frac{2\pi}{N}-\theta} \cos Nm\varphi d\varphi = 0.$$

2. Розвинемо перший доданок правої частини

$$a_0 = \frac{N}{\pi} \left[ \int_{-\theta}^{\theta} A_0 \ln s d\varphi + \int_{\theta}^{\frac{2\pi}{N}-\theta} A_0 \ln s d\varphi \right] = \frac{2A_0}{\pi} \left[ \pi \ln s_a + \theta N \ln \frac{s_L}{s_a} \right],$$

$$a_m = \frac{NA_0}{\pi} \left[ \ln s_L \int_{-\theta}^{\theta} \cos Nm\varphi d\varphi + \ln s_a \int_{\theta}^{\frac{2\pi}{N}-\theta} \cos Nm\varphi d\varphi \right] = \frac{2A_0}{\pi m} \ln \frac{s_L}{s_a} \sin Nm\theta$$

3. Розвинемо другий доданок правої частини:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{N}{\pi} \left[ \int_{-\theta}^{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (s_L^{Nn} - s_L^{-Nn}) \cos Nn\varphi d\varphi + \int_{\theta}^{\frac{2\pi}{N}-\theta} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (s_a^{Nn} - s_a^{-Nn}) \cos Nn\varphi d\varphi \right] = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\pi n} (s_L^{Nn} - s_L^{-Nn} - s_a^{Nn} + s_a^{-Nn}) \sin Nn\theta \end{aligned}$$

За  $m = n$

$$a_n = \frac{N}{\pi} \left[ \int_{-\theta}^{\theta} A_n (s_L^{Nn} - s_L^{-Nn}) \cos Nn\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{2\pi}{N} - \theta} A_n (s_a^{Nn} - s_a^{-Nn}) \cos Nn\varphi d\varphi \right] =$$

$$= \frac{A_n}{\pi n} \left\{ (s_L^{Nn} - s_L^{-Nn}) \left( Nn\theta + \frac{\sin 2Nn\theta}{2} \right) + (s_a^{Nn} - s_a^{-Nn}) \left[ (\pi - N\theta)n - \frac{\sin 2Nn\theta}{2} \right] \right\}$$

За  $m \neq n$

$$a_m = \frac{N}{\pi} \left[ \int_{-\theta}^{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (s_L^{Nn} - s_L^{-Nn}) \cos Nn\varphi \cos Nm\varphi d\varphi + \int_{\theta}^{\frac{2\pi}{N} - \theta} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (s_a^{Nn} - s_a^{-Nn}) \cos Nn\varphi \cos Nm\varphi d\varphi \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (s_L^{Nn} - s_L^{-Nn} - s_a^{Nn} + s_a^{-Nn}) \left[ \frac{\sin(n-m)N\theta}{n-m} + \frac{\sin(n+m)N\theta}{n+m} \right]$$

Для перевірки правильності обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є припустимо, що  $s_a = s_L$ , тоді

1.  $a_0 = 2U_a$ ;  $a_m = 0$
2.  $a_0 = 2A_0 \ln s_a$ ;  $a_m = 0$
3.  $a_0 = 0$ ;  $a_m = A_m$  ( $m = n$ );  $a_m = 0$  ( $m \neq n$ )

$$2U_a = 2A_0 \ln s_a + 0 + 0 + \dots$$

$$0 = 0 + F_1 + 0 + \dots$$

$$0 = 0 + 0 + F_2 + \dots$$

$$F_n = 0$$

Звідси  $A_0 = U_a / \ln s_a$ , що збігається з розв'язком для магнетронного діода. Отже, за допомогою розвинення виразу (6) у ряд Фур'є й наступного розв'язання системи лінійних рівнянь, можна визначити коефіцієнти  $A_i$ , котрі для кількох конструкцій системи зведено в таблицю 1.

Таблиця 1

$A_i$	Кількість резонаторів			
	6	8	10	12
$A_0$	1,3970	1,394914304	1,457679883	1,529610919
$A_1$	$-8,0426 \cdot 10^{-4}$	$-3,2502 \cdot 10^{-5}$	$-3,7739 \cdot 10^{-7}$	$-2,6837 \cdot 10^{-7}$
$A_2$	$-1,5532 \cdot 10^{-7}$	$-4,0461 \cdot 10^{-9}$	$-7,9148 \cdot 10^{-12}$	$-6,6736 \cdot 10^{-13}$
$A_3$	$5,3288 \cdot 10^{-10}$	$-4,5171 \cdot 10^{-13}$	$-1,3896 \cdot 10^{-16}$	$-1,0385 \cdot 10^{-18}$
$A_4$	$4,5091 \cdot 10^{-13}$	$-3,4569 \cdot 10^{-18}$	$-2,4607 \cdot 10^{-21}$	$-4,7322 \cdot 10^{-25}$
$A_5$	$-6,4604 \cdot 10^{-16}$	$8,5250 \cdot 10^{-21}$	$-4,4089 \cdot 10^{-26}$	$9,1518 \cdot 10^{-31}$
$A_6$	$-1,0623 \cdot 10^{-18}$	$1,6079 \cdot 10^{-24}$	$-7,9871 \cdot 10^{-31}$	$4,1252 \cdot 10^{-36}$
$A_7$	$4,2498 \cdot 10^{-22}$	$1,8997 \cdot 10^{-28}$	$-1,4616 \cdot 10^{-35}$	$8,7933 \cdot 10^{-42}$

У ряді випадків застосування методу Треффтца призводить до простіших обчислень у порівнянні з застосуванням методів Ритца та Гальоркіна, оскільки за методом в Треффтца обчислюються лише інтеграли по межі області, а не по самій області.

Для визначення коефіцієнтів виразу (6) скористаємося методом Треффтца. Метод Треффтца є дещо протилежним щодо методів Ритца та Гальоркіна. В останніх методах розв'язок задачі шукають

у вигляді лінійної комбінації функцій, котрі задовольняють диференційному рівнянню, але не задовольняють межовим умовам.

Невизначені коефіцієнти, що входять до розв'язку задачі, за методом Треффтца визначаються таким чином, аби найточніше виконувалися межові умови; у методах Ритца та Гальоркіна невизначені коефіцієнти визначаються з умови найточнішого розв'язання диференційного рівняння задачі.

Методика знаходження коефіцієнтів за використанням цього метода була детально розглянута у [2, 3]. Тут ми лише наведемо результати обчислення коефіцієнтів рівняння (6), що отримано за методом Треффтца (табл. 2).

Таблиця 2

$A_i$	Кількість резонаторів			
	6	8	10	12
$A_0$	1,405925351	1,392418228	1,291912133	1,198669303
$A_1$	$-8,8195 \cdot 10^{-4}$	$-3,0827 \cdot 10^{-4}$	$-2,4145 \cdot 10^{-5}$	$-1,6387 \cdot 10^{-6}$
$A_2$	$-8,525 \cdot 10^{-6}$	$1,2561 \cdot 10^{-7}$	$8,5429 \cdot 10^{-10}$	$5,1289 \cdot 10^{-12}$
$A_3$	$6,4414 \cdot 10^{-8}$	$-4,0666 \cdot 10^{-11}$	$-2,3037 \cdot 10^{-14}$	$-1,3124 \cdot 10^{-17}$
$A_4$	$-2,4055 \cdot 10^{-10}$	$9,7948 \cdot 10^{-15}$	$4,4942 \cdot 10^{-19}$	$2,5999 \cdot 10^{-23}$
$A_5$	$5,7905 \cdot 10^{-13}$	$-1,7408 \cdot 10^{-18}$	$-6,1954 \cdot 10^{-24}$	$-3,8989 \cdot 10^{-29}$
$A_6$	$-9,5844 \cdot 10^{-16}$	$2,2502 \cdot 10^{-22}$	$5,6207 \cdot 10^{-29}$	$4,2132 \cdot 10^{-35}$
$A_7$	$1,102 \cdot 10^{-18}$	$-2,0354 \cdot 10^{-26}$	$-2,6915 \cdot 10^{-35}$	$-2,7632 \cdot 10^{-39}$

Порівнюючи значення коефіцієнтів у таблицях 1 та 2, можна зробити висновок, що за порядком коефіцієнти збігаються. Отже, за необхідності й коли не вимагається висока точність результатів, то можна розраховувати коефіцієнти рівняння (6) за методом Треффтца [5].

Запропоновану методику визначення розподілення електростатичного потенціалу можна застосовувати для циліндричних конструкцій зі складною конфігурацією електродів.

**Список літератури:** 1. *Morishita Y.* CAD of Microwave Tubes //Теребідзьон гаккай ші. 1978. Vol. 32. N 3. P 182-188. Яп. 2. *Нікітенко О.М.* Розподілення електростатичного потенціалу в циліндричному магнетроні // Радіотехніка. 2000. Вип. 113. С. 113-120. 3. *Нікітенко О.М.* Розподілення електростатичного потенціалу в циліндричному магнетроні оберненої конструкції // Радіотехніка. 2000. Вип. 115. С. 111-116. 4. *Толстов Г.П.* Ряды Фурье. М.: Наука, 1980. 384 с. 5. *Миролюбов Н.Н., Костенко М.В., Левинштейн М.Л., Тиходеєв Н.Н.* Методы расчета электростатических полей. М.: Высшая школа, 1963. 415 с.

Харківський державний технічний університет  
радіоелектроніки

Надійшла до редколегії 04.10 2006