



Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ \_\_\_\_\_

(підпис)

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2019 р.

**ЗАВДАННЯ**  
НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Кушнарьову Антону Андрійовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Математичне моделювання процесу томографічної реконструкції на основі подвійних сум Фур'є та Фейєра

затверджена наказом по університету від 31 жовтня 2019 р. № 1600 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 9 грудня 2019 р.

3. Вихідні дані до роботи тестові функції, що задані в області  $D = [0,1]^2$  з носіями у різних областях

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі \_\_\_\_\_

1. Системний аналіз проблеми математичного моделювання процесу томографічної реконструкції

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій \_\_\_\_\_

1. Актуальність теми роботи \_\_\_\_\_

2. Постановка задачі \_\_\_\_\_

3. Системний аналіз проблеми \_\_\_\_\_

4. Метод чисельного аналізу \_\_\_\_\_

5. Результати обчислювального експерименту \_\_\_\_\_

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	вересень 2019 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	жовтень – листопад 2019 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	листопад – грудень 2019 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	листопад – грудень 2019 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	грудень 2019 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	грудень 2019 р.	виконано

Дата видачі завдання 2 вересня 2019 р.

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_ проф. Литвин О.Г.  
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 83 с., 38 рис., 16 табл., 1 додаток, 12 джерел.

РЕНТГЕНІВСЬКЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ, ПОДВІЙНІ СУМИ ФУР'Є,  
ПЕРЕТВОРЕННЯ РАДОНА, КОМП'ЮТЕРНА ТОМОГРАФІЯ, ДВОВИМІРНА  
ФУНКЦІЯ.

Об'єкт дослідження – процес відтворення внутрішньої структури тіла на основі проєкційних даних, що надходять з комп'ютерного томографа.

Мета роботи – системний аналіз проблеми реконструкції зображення та розробка ефективних алгоритмів для відновлення функцій по їх проєкціям.

Методи дослідження – метод скінченних сум Фур'є та Фейєра, у якому коефіцієнти обчислюються за допомогою проєкцій.

У цій атестаційній роботі був використаний метод подвійних сум Фур'є та Фейєра для математичного моделювання процесу томографічної реконструкції.

Математичне моделювання томографічної реконструкції було здійснено за допомогою системи комп'ютерної математики Mathcad, для ілюстрації ефективності було використано суми Фур'є та Фейєра.

## ABSTRACT

Introductory note: 83 pages, 38 pictures, 16 tables, 1 application, 12 sources.

X-RAY RADIATION, DOUBLE SUMMER FOURE, RADION CONVERGENCE, COMPUTER TOMOGRAPHY, TWO-WAY FUNCTION.

Object of research – process of reproduction of the internal structure of the body on the basis of projection data coming from a computer tomograph.

Purpose of work – system analysis of the problem of image reconstruction and development of effective algorithms for the restoration of functions according to their projections.

Methods of research – Fourier and Feyer finite sum method, in which the coefficients are calculated using projections.

This diploma the method of double Fourier and Feyer sums was used for mathematical modeling of the tomographic reconstruction process

The mathematical modeling of the tomographic reconstruction was accomplished with the help of the computer mathematics system Mathcad, Fourier and Feyer sums were used to illustrate the effectiveness.

## ЗМІСТ

	С.
Вступ .....	8
1 Системний аналіз проблеми математичного моделювання процесу томографічної реконструкції .....	10
1.1 Системний аналіз проблеми реконструкції зображень .....	10
1.1.1 Вербальна модель системи .....	10
1.1.2 Морфологічний опис системи .....	10
1.1.3 Функціональна модель системи .....	11
1.1.4 Інформаційна модель системи .....	12
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми математичного моделювання процесу томографічної реконструкції .....	13
1.2.1 Модель аналізу проблеми .....	13
1.2.2 Застосування методу аналізу ієрархій .....	15
1.2.3 Аналіз отриманих результатів .....	19
1.2.4 Модель вирішення проблеми .....	19
1.2.5 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволень.....	21
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі .....	23
1.3.1 Змістовна постановка задачі .....	23
1.3.2 Формальна постановка задачі .....	25
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання .....	27
2.1 Метод реконструкції зображень з використанням скінченних сум Фур'є .....	27
2.2 Клас $R$ -функцій .....	37
2.3 Геометрична інтерпретація формул булевої алгебри .....	39
2.4 Метод реконструкції зображень з використанням сум Фейєра .....	40
2.5 Побудова тестових задач.....	45
3 Програмна реалізація .....	52
3.1 Mathcad як система комп'ютерної математики .....	52

	7
3.2 Опис програми .....	53
4 Результати обчислювального експерименту .....	55
4.1 Результати розв'язку задачі .....	55
4.2 Аналіз результатів .....	64
Висновки .....	65
Перелік джерел посилання .....	66
Додаток А .....	68

## ВСТУП

Остання чверть 20-го століття ознаменувалась появою, інтенсивним розвитком і широким впровадженням одного з видатних досягнень людства – комп'ютерної томографії. В основі комп'ютерної томографії лежать теоретичні результати німецького вченого Й. Радона, який ще на початку 20-го століття розвинув теорію перетворення функцій багатьох змінних (це перетворення тепер називається перетворенням Радона) [3]. Згідно з цим перетворенням функцію багатьох змінних можна характеризувати не тільки її значеннями у точках багатовимірного простору, але також інтегралами від цієї функції, взятими по нескінченій сукупності ліній або площин (якщо кількість змінних більше двох). На практиці інформація про функцію може бути отримана тільки у вигляді фіксованого числа вказаних інтегралів, отриманих по деякій скінченій множині ліній або поверхонь.

Тому практична реалізація ідей Й. Радона у вигляді комп'ютерних томографів [3], що використовують опромінення об'єкта рентгенівськими променями, з'явилась лише в кінці 20-го століття. За останні три десятиліття комп'ютерна томографія зробила потужні кроки у напрямку удосконалення алгоритмів, програмних засобів та апаратної реалізації. Значно зросла швидкість, точність та якість візуалізації перетинів досліджуваного тіла на екранах моніторів комп'ютерних томографів. Розвиваються нові напрямки комп'ютерної томографії, в основі яких лежать дещо інші підходи, ніж ті, що витікають безпосередньо з праць Й. Радона – магнітно-резонансна томографія, ультразвукова томографія, оптична томографія та інші види томографічного відновлення внутрішньої структури, які можуть не використовувати опромінення об'єкта рентгенівськими променями.

Метою цієї атестаційної роботи є:

- системний аналіз проблеми реконструкції зображення;
- розробка ефективних алгоритмів відновлення функцій за їх проєкціями;
- розробка програмної реалізації поставленої задачі;

– отримання результатів реконструкції зображень та їх аналіз.

Об'єкт дослідження – процес відтворення внутрішньої структури тіла на основі проєкційних даних, що надходять з комп'ютерного томографа.

Предмет дослідження – математична модель відтворення внутрішньої структури тіла за допомогою проєкційних даних, що надходять з комп'ютерного томографа, а також методи чисельної реалізації цієї математичної моделі.

Метод отримання результатів – метод скінченних сум Фур'є та Фейєра, у якому коефіцієнти обчислюються за допомогою проєкцій.

Вхідні дані – проєкційні дані, що поступають з комп'ютерного томографа, тобто інтеграли від невідомої функції, яка описує зображення, вздовж заданої системи прямих.

Очікуваний результат – отримання високої точності відтворення і підвищення швидкості обробки інформації.

# 1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТОМОГРАФІЧНОЇ РЕКОНСТРУКЦІЇ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

## 1.1 Системний аналіз проблеми математичного моделювання процесу томографічної реконструкції

### 1.1.1 Вербальна модель системи

Проблема математичного моделювання томографічної реконструкції впливає з різних наукових областей. Найбільш поширена галузь науки у якій використовується томографічна реконструкція – медицина. Тобто, одне з головних призначень є діагностика головного мозку та інших внутрішніх органів методом комп'ютерної томографії, а також лікування інших неврологічних захворювань. Тому головною метою буде отримання максимально якісного діагнозу та лікування захворювань головного мозку.

### 1.1.2 Морфологічний опис системи

Морфологічний опис системи повинен вказати, які компоненти системи будуть розглядатися. Наша система включає в себе інші дві підсистеми. Перша підсистема – це керуюча, а друга керована. У керуючу підсистему належить: міністерство охорони здоров'я, головний лікар. У керовану підсистему належить: персонал, відділ кадрів та бухгалтерія.

Модель «чорний ящик» (рис. 1.1) – один із способів морфологічного опису системи. Така модель зосереджена на зміні зовнішнього середовища та на дослідженні реакції системи [12]. Тобто усі зв'язки, внутрішній стан, а також елементи системи залишаються невідомими. Найважливішим залишається вихідний стан, який залежить від зовнішніх факторів, які діють на систему.

До факторів моделі можна віднести пацієнтів, лікарів, обладнання, ліки, а також фінансування. Тоді у якості результату, будуть виступати: результати комп'ютерної томографії, здорові пацієнти, зарплатня персоналу.



Рисунок 1.1 – Модель системи «чорний ящик»

### 1.1.3 Функціональна модель системи

Для функціонального опису системи можна використовувати графічний опис, наприклад опис за допомогою контекстних діаграм IDEF0. В цій діаграмі представляється як сукупність взаємодіючих робіт або функцій, інакше кажучи функціональних блоків.

Спочатку робиться опис системи в загалі, після описання системи проводиться розбиття її на крупні фрагменти. Цей процес називають функціональною декомпозицією, а ці діаграми, які описують кожен фрагмент і взаємодію фрагментів, називаються діаграмами декомпозиції [12]. Після декомпозиції контекстної діаграми проводиться декомпозиція кожного великого фрагменту системи на більш дрібні і так далі, до досягнення необхідного рівня подробиць опису.

На рисунку 1.2 зображена контекстна діаграма. На рисунку 1.3 зображена декомпозиція контекстної діаграми, тобто декомпозиція функціонального блоку «Отримання результатів комп'ютерної томографії».



Рисунок 1.2 – Контекстна IDEF0 діаграма

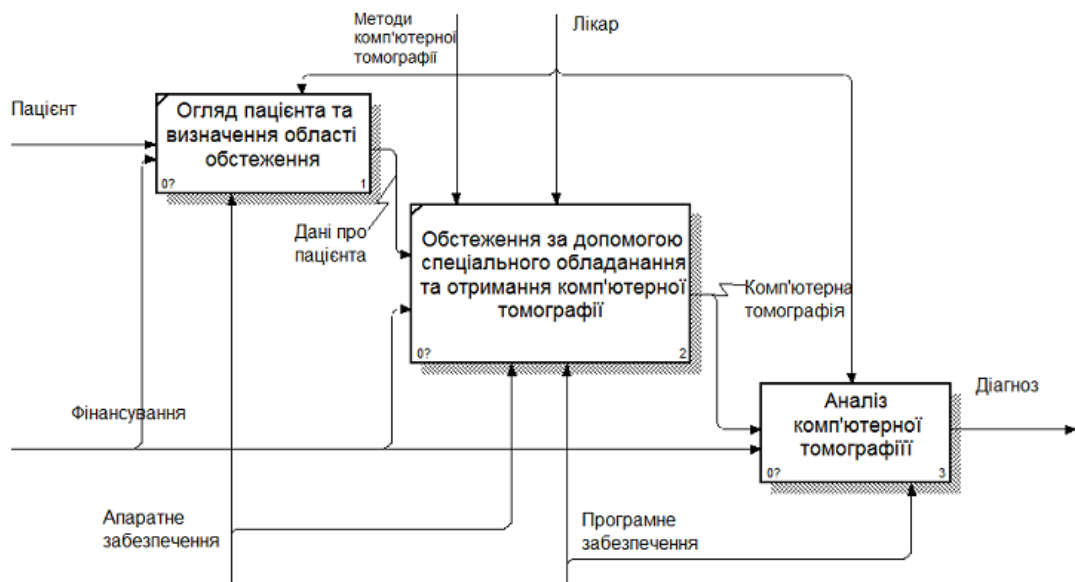


Рисунок 1.3 – Декомпозиція першого рівня функціонального блоку «Отримання результатів комп'ютерної томографії»

#### 1.1.4 Інформаційна модель

Опис інформаційної моделі повинен мати уявлення про керування, а також її організації як системи. Інформаційні системи описують різні типи систем об'єктів, у яких реалізуються різні взаємодії та взаємозв'язки між різними елементами системи.

Така модель може бути представлена графічно у вигляді DFD діаграм [12]. Інструменти методології DFD дозволяють відображати джерела і адресати даних, ідентифікувати процеси і групи даних, які зв'язують в потоку одну функцію за іншою. На рис. 1.4 та 1.5 зображені контекстна DFD діаграма та її декомпозиція відповідно.

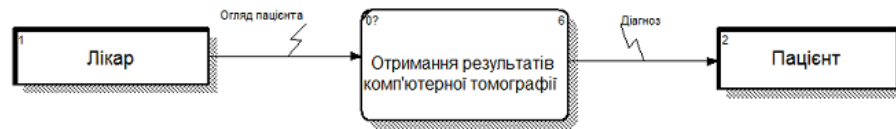


Рисунок 1.4 – Контекстна DFD діаграма

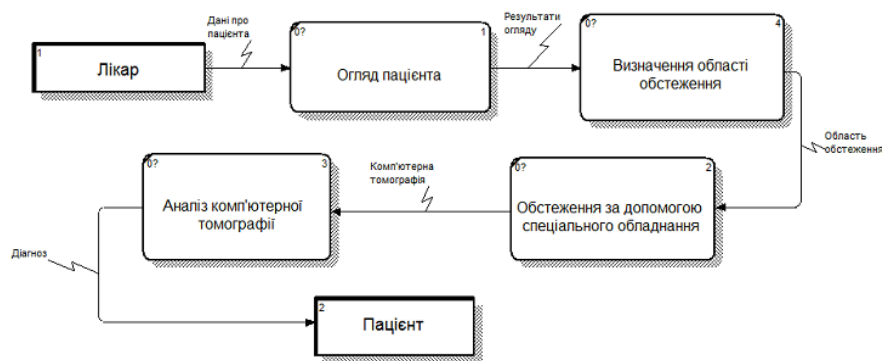


Рисунок 1.5 – Декомпозиція першого рівня DFD діаграми

Для більш детального опису моделі скористаємось методологією графічного структурного аналізу – діаграмою IDEF3 (рис. 1.6).

## 1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми математичного моделювання процесу томографічної реконструкції

### 1.2.1 Модель аналізу проблеми

Перед тим, як проводити аналіз проблеми математичного моделювання, вирішимо задачу вибору методу моделювання, скориставшись методом аналізу ієрархій.

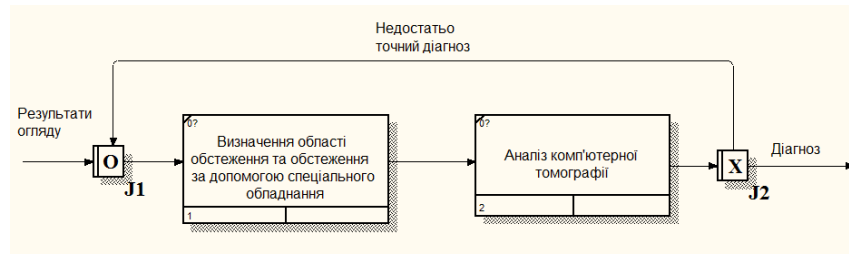


Рисунок 1.6 – Декомпозиція функціонального блоку «Реконструкція зображення» в методології IDEF3

Серед критеріїв виділимо наступні характеристики:

- точність розрахунків;
- складність методу;
- швидкість роботи методу;
- універсальність;
- витрати на додаткові розрахунки.

Серед альтернатив можна визначити наступні:

- методи перетворення;
- методи розкладання функції в ряд;
- неітераційні методи.

Таким чином, отримали структуру проблеми вибору у вигляді ієрархії, яка складається з трьох рівнів:

- рівень цілі;
- рівень порівняння критеріїв;
- рівень порівняння альтернатив.

Далі побудуємо матрицю попарних порівнянь для кожного рівня ієрархії, скориставшись відповідною шкалою Т. Сааті [12]. Ця шкала надає можливість поставити у відповідність ступеням переваги одного порівняльного об'єкта над іншим деяке число. На основі цих даних знаходяться вектори локальних пріоритетів, індекси узгодженості та відношення узгодженості. Останні два допомагають визначити міру узгодженості результатів, отриманих експертним шляхом. Допустимим вважається значення відношення узгодженості  $\leq 0,2$ . Більші значення свідчать про нелогічність суджень та спонукають до перегляду даних.

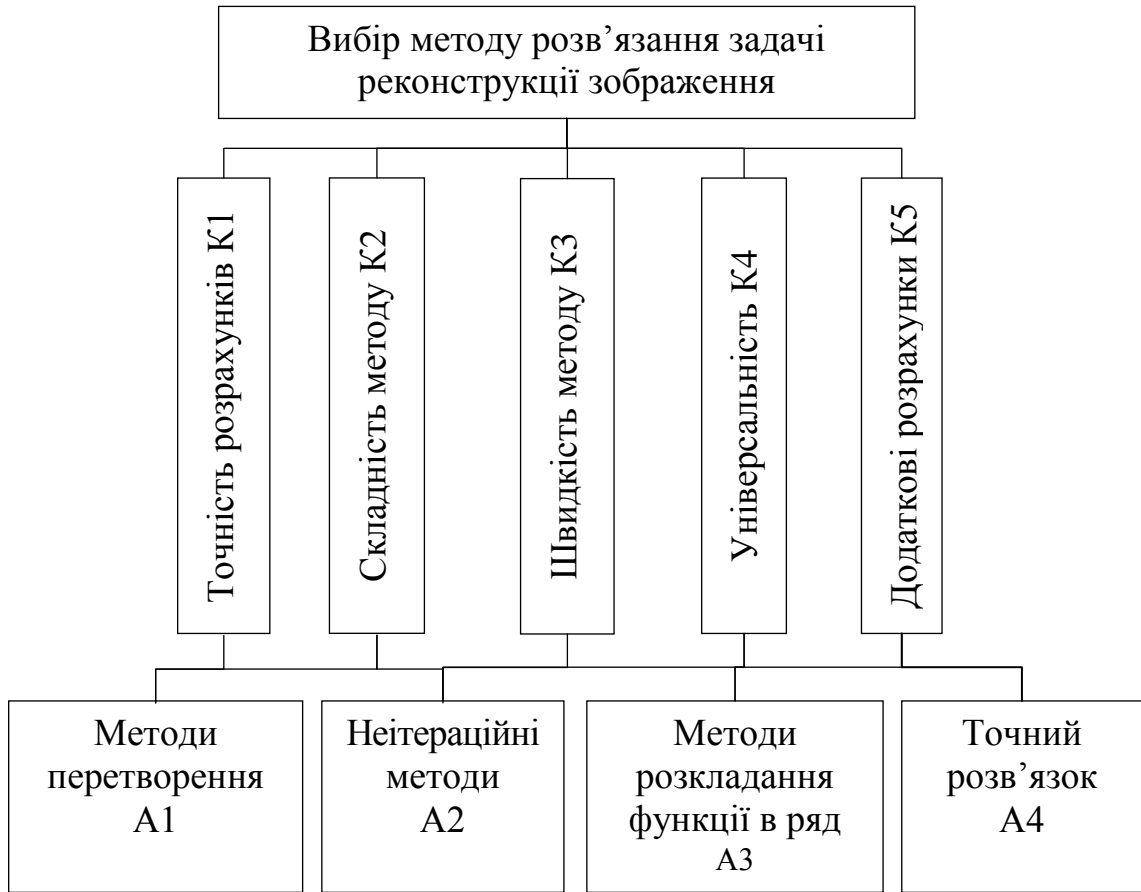


Рисунок 1.7 – Ієрархічна структура задачі вибору методу

### 1.2.2 Застосування методу аналізу ієрархій

Таблиця 1.1 – Матриця попарних порівнянь першого рівня

Номер п/п	К1	К2	К3	К4	К5	Власний вектор	Вектор пріоритетів
К1	1	3	2	5	7	2,914	0,406
К2	1/3	1	1/3	5	8	1,348	0,188
К3	1/2	3	1	4	7	2,112	0,295
К4	1/5	1/5	1/4	1	7	0,588	0,082
К5	1/7	1/8	1/7	1/7	1	0,205	0,029

$$\text{Індекс узгодженості (ІУ)} = \frac{5,461 - 5}{5 - 1} = 0,115.$$

$$\text{Відносна узгодженість (ВУ)} = \frac{0,115}{1,12} = 0,103.$$

З отриманих проміжних результатів можна зробити висновок, що матриця попарних порівнянь заповнена правильно, тобто жодне з тверджень не суперечить загальній логіці моделі, а дані узгоджені між собою на допустимому рівні. Вектор локальних пріоритетів відносно проблеми вибору набуває вигляду:

$$\vec{p}^K = (0,406; 0,188; 0,295; 0,082; 0,029).$$

Аналогічним способом необхідно провести порівняльний аналіз альтернатив відносно кожного з критеріїв. Матриці попарних порівнянь представлені у вигляді таблиць 1.2 – 1.6.

Таблиця 1.2 – Матриця попарних порівнянь першого критерію

K1	A1	A2	A3	A4	Власний вектор	Вектор пріоритетів
A1	1	1/3	1/6	1/7	0,298	0,053
A2	3	1	1/3	1/5	0,669	0,120
A3	6	3	1	1/2	1,732	0,310
A4	7	5	2	1	2,893	0,517

$$\text{Індекс узгодженості (ІУ)} = \frac{4,061 - 4}{4 - 1} = 0,02.$$

$$\text{Відносна узгодженість (ВУ)} = \frac{0,02}{0,9} = 0,022.$$

Вектор локальних пріоритетів:  $\vec{p}_1^A = (0,053; 0,12; 0,31; 0,517).$

Таблиця 1.3 – Матриця попарних порівнянь другого критерію

К2	A1	A2	A3	A4	Власний вектор	Вектор пріоритетів
A1	1	5	2	8	2,990	0,525
A2	1/2	1	1/3	6	0,795	0,140
A3	1/2	3	1	5	1,655	0,291
A4	1/8	1/6	1/5	1	0,254	0,044

$$\text{Індекс узгодженості (ІУ)} = \frac{4,157 - 4}{4 - 1} = 0,052.$$

$$\text{Відносна узгодженість (ВУ)} = \frac{0,052}{0,9} = 0,058.$$

Вектор локальних пріоритетів:  $\vec{p}_2^A = (0,525; 0,14; 0,291; 0,044)$ .

Таблиця 1.4 – Матриця попарних порівнянь третього критерію

К3	A1	A2	A3	A4	Власний вектор	Вектор пріоритетів
A1	1	5	2	7	2,893	0,525
A2	1/5	1	1/3	5	0,76	0,138
A3	1/2	3	1	4	1,565	0,284
A4	1/7	1/5	1/4	1	0,291	0,053

$$\text{Індекс узгодженості (ІУ)} = \frac{4,152 - 4}{4 - 1} = 0,051.$$

$$\text{Відносна узгодженість (ВУ)} = \frac{0,051}{0,9} = 0,056.$$

Вектор локальних пріоритетів:  $\vec{p}_3^A = (0,525; 0,138; 0,284; 0,053)$ .

Таблиця 1.5 – Матриця попарних порівнянь четвертого критерію

К4	A1	A2	A3	A4	Власний вектор	Вектор пріоритетів
A1	1	1/6	1/7	1/3	0,298	0,058
A2	6	1	1/2	2	1,565	0,307
A3	7	2	1	2	2,300	0,452
A4	3	1/2	1/2	1	0,931	0,183

$$\text{Індекс узгодженості (ІУ)} = \frac{4,064 - 4}{4 - 1} = 0,021.$$

$$\text{Відносна узгодженість (ВУ)} = \frac{0,021}{0,9} = 0,024.$$

Вектор локальних пріоритетів:  $\vec{p}_4^A = (0,058; 0,307; 0,452; 0,183)$ .

Таблиця 1.6 – Матриця попарних порівнянь п'ятого критерію

К5	A1	A2	A3	A4	Власний вектор	Вектор пріоритетів
A1	1	3	2	5	2,340	0,477
A2	1/3	1	2	4	1,278	0,319
A3	1/2	1/2	1	3	0,931	0,190
A4	1/5	1/4	1/3	1	0,359	0,074

$$\text{Індекс узгодженості (ІУ)} = \frac{4,447 - 4}{4 - 1} = 0,149.$$

$$\text{Відносна узгодженість (ВУ)} = \frac{0,149}{0,9} = 0,166.$$

Вектор локальних пріоритетів:  $\vec{p}_5^A = (0,477; 0,319; 0,19; 0,074)$ .

### 1.2.3 Аналіз отриманих результатів

На основі отриманих результатів розрахуємо вектор глобальних пріоритетів та відповідні показники.

Таблиця 1.7 – Кінцеві результати задачі вибору методу розв’язання

Критерії	К1	К2	К3	К4	К5	Вектор пріоритетів
Альтернативи						
A1	0,053	0,525	0,525	0,058	0,477	0,293
A2	0,12	0,14	0,138	0,307	0,319	0,15
A3	0,31	0,291	0,284	0,452	0,19	0,307
A4	0,517	0,044	0,053	0,183	0,074	0,25

Індекс узгодженості (IY) = 0,154.

$$\text{Відносна узгодженість (BY)} = \frac{0,154}{1,12 + 0,9} = 0,076.$$

Вектор глобальних пріоритетів:  $\vec{p} = (0,293; 0,15; 0,307; 0,25)$ .

Як бачимо з табл. 1.7 усі дані відповідають нормам узгодженості, а максимальна компонента вектора глобальних пріоритетів відповідає третій альтернативі, тобто метод за яким рекомендовано розв’язувати задачу реконструкції зображень належить до групи методів які основані на розкладанні функції в ряд.

### 1.2.4 Модель вирішення проблеми

Визначившись із методом, перейдемо до моделі аналізу вирішення проблеми математичного моделювання. Основним завданням аналізу є виділення значущих властивостей для визначеної незадоволеності системи у процесі її функціонування. В результаті отримаємо три категорії незадоволень і відповід-

ні характеристики для кожної з них:

- а) бажані властивості;
  - 1) збільшення точності результатів;
  - 2) збільшення швидкості обробки даних;
  - 3) надійність та «адекватність» розрахунків;
- б) критичні властивості;
  - 1) складність реалізації методу;
  - 2) багатofункціональність застосування;
- в) небажані властивості;
  - 1) проблеми побудови границь області моделювання;
  - 2) накопичення похибки розрахунків;
  - 3) збільшення обчислювальних витрат.

Формалізуємо проблему у вигляді структури ієрархії (рисунок 1.8), виділивши в ній три рівня:

- нульовий – ціль моделі, що задається у вигляді проблеми незадоволеності;
- перший – класифікація незадоволень;
- другий – характеристики незадоволень, що задаються у вигляді компонент проблеми.



Рисунок 1.8 – Ієрархічна структура аналізу проблеми

Таким чином, модель аналізу проблеми можна вважати описаною.

### 1.2.5 Оцінювання вектора пріоритетів незадовольень

Для продовження аналізу проблеми, зокрема оцінювання глобального вектора пріоритетів, необхідно побудувати матрицю попарних порівнянь першого рівня, а також і кожної виділеної властивості. Усі матричні дані порівнянь першого рівня та всіх властивостей наведені у відповідних таблицях 1.8 – 1.11.

Таблиця 1.8 – Матриця попарних порівнянь першого рівня

Номер п/п	Бажані властивості	Критичні властивості	Небажані властивості	Власний вектор	Вектор пріоритетів
Бажані	1	5	3	2,466	0,631
Критичні	1/5	1	1/4	0,368	0,094
Небажані	1/3	4	1	1,075	0,275

Таблиця 1.9 – Матриця попарних порівнянь бажаних властивостей

Бажані властивості	Точність	Швидкість	Надійність	Власний вектор	Вектор пріоритетів
Точність	1	2	5	2,154	0,57
Швидкість	1/2	1	4	1,26	0,333
Надійність	1/5	1/4	1	0,368	0,097

Таблиця 1.10 – Матриця попарних порівнянь критичних властивостей

Критичні властивості	Складність	Багато-функціональність	Власний вектор	Вектор пріоритетів
Програмні витрати	1	1/4	0,5	0,2
Апаратні витрати	4	1	2	0,37

Таблиця 1.11 – Матриця попарних порівнянь небажаних властивостей

Небажані властивості	Границі	Похибка	Витрати	Власний вектор	Вектор пріоритетів
Швидкість отримання даних	1	4	1/6	0,322	0,075
Універсальність	1/4	1	1/5	1,077	0,252
Кількість даних	6	5	1	2,885	0,673

Далі у таблиці 1.12 та на рисунку 1.9 приведені значення глобальних пріоритетів властивостей.

Таблиця 1.12 – Вектор глобальних пріоритетів

Точність роботи методу	0,570
Швидкість роботи методу	0,330
Апаратні витрати	0,370
Програмні витрати	0,190
Швидкість отримання даних	0,075
Кількість необхідних даних	0,673
Надійність	0,097
Універсальність методу	0,252

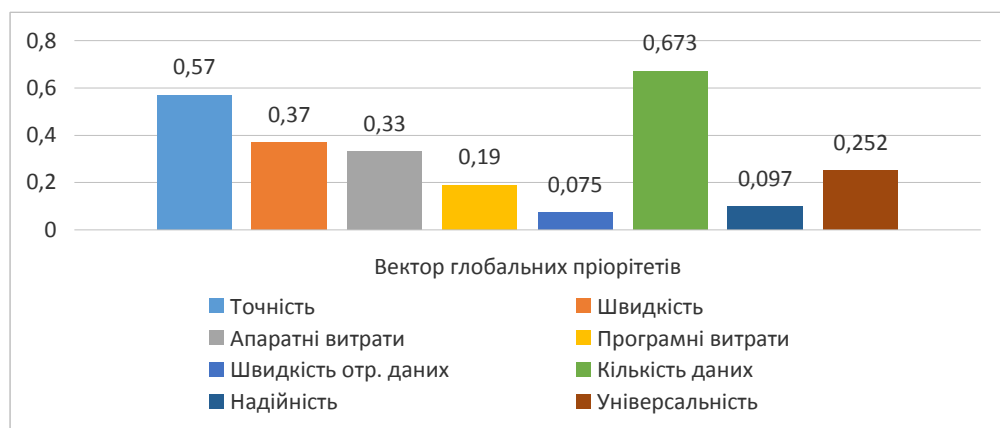


Рисунок 1.9 – Діаграма глобальних пріоритетів

На основі результатів, отриманих у вигляді стовпчастої діаграми властивостей методу, зробимо висновок, що найвпливовішою трійкою властивостей є збільшення отримання кількості даних, збільшення швидкості обробки даних та збільшення точності результатів. У зв'язку із цим зазначимо, що основна увага вирішення поставленої проблеми буде зосереджена на першій трійці властивостей. Оскільки більша доля припадає на бажані властивості, то і зусилля відповідною мірою будуть направлені на покращення цих показників.

### 1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

#### 1.3.1 Змістовна постановка задачі

Обчислювальна томографія є палким прикладом розвитку нового наукового напрямку, проникаючого майже в усі області науки та техніки, де застосовуються або можуть буди застосовані які-небудь види випромінювання [3, 4].

Апарат томографії дає можливість отримувати більш якісну інформацію, у порівнянні з уже відомими методами в різних областях науки та техніки: медицині, мікроскопії, океанології, спектроскопії і таке інше. Існують різні види томографії, які вже достатньо розвинені:

- рентгенівська;
- ядерно-магнітна;
- оптична;
- електронно-парамагнітнорезонансна;
- ядерно-магнітнорезонансна.

Усі ці види томографії по своїм властивостям можна розділити на два великих класи: трансмісійну обчислювальну томографію (ТОТ) та емісійну обчислювальну томографію (ЕОТ). У першому виді томографії зовнішнє випромінювання зондує пасивний (невипромінюючий) об'єкт, частково поглинаючись у ньому. В ЕОТ активний об'єкт являє собою просторовий розподіл джерел ви-

промінювання, при цьому виходячи вздовж якого-небудь напрямку випромінювання є суперпозицією випромінювання усіх джерел, які лежать на лінії проєктування. Крім цього, за способом формування вихідних даних відрізняють паралельні та віялові проєкції, а геометрію підрозділяють на кругову (повну і неповну) та планарну.

Всі ці перераховані способи дозволяють отримувати інформацію об досліджуваних об'єктах більш високої розмірності та кращої. Але основними методами отримання томографічних даних є ті, що базуються на фізичному процесі послаблення випромінювання у речовинах.

Розглянемо задачу відновлення двовимірного розподілу коефіцієнта послаблення випромінювання  $\mu(x, y)$  (рисунок 1.10) [3]. Процес вимірювання виглядає наступним чином. Джерело випромінювання, формуючи «олівцевий» пучок, проходить вздовж об'єкта. Синхронно з джерелом з іншої сторони об'єкта рухається детектор випромінювання. Набір відліків, отриманий таким чином, визначає одномірну функцію, так звану проєкція. Після цього система «Джерело-Детектор» повертається відносно об'єкта на деякий кут та знімає новий набір відліків, визначаючи наступну проєкцію.

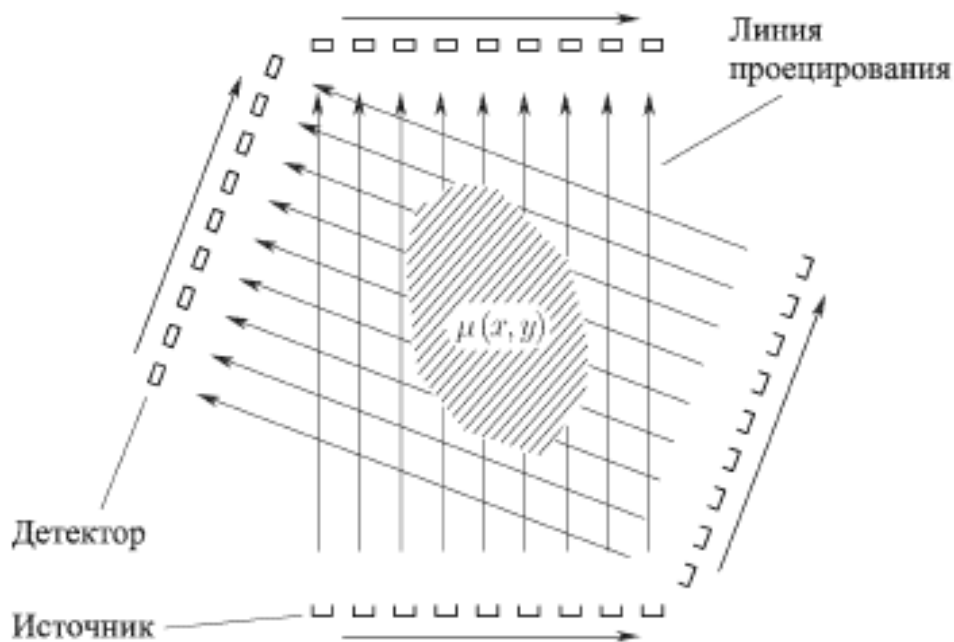


Рисунок 1.10 – Кругова геометрія вимірювань з паралельними проєкціями

Такі виміри повторюються, доки система «Джерело-Детектор» не повернеться на кут  $2\pi$ . Строго кажучи, достатньо повернути на кут  $\pi$ , так як після цього результати вимірювань почнуть повторюватися. По отриманому набору одномірних проєкцій необхідно відновити двомірний розподіл  $\mu(x, y)$ . Оскільки система «Джерело-Детектор» обертається навколо об'єкта, таку схему вимірювань називають круговою геометрією вимірювань, а так як для отримання наступного відліку в проєкції пучок зміщується паралельно попередньому положенню, проєкції називають паралельними.

### 1.3.2 Формальна постановка задачі

Для математичного опису зв'язку проєкцій з шуканим розподілом  $\mu(x, y)$  наряду з нерухомою системою координат  $(x, y)$  введемо обертаючу систему координат  $(\xi, \zeta)$  (рисунок 1.11) [3].

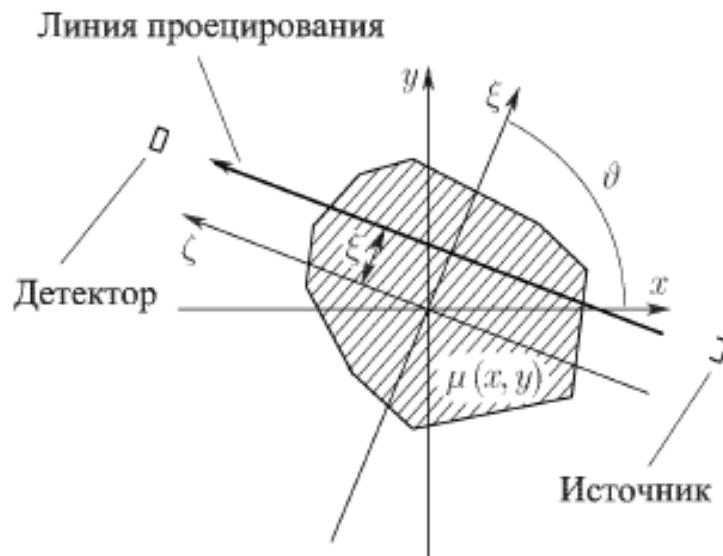


Рисунок 1.11 – Нерухома системою координат  $(x, y)$  та обертаюча  $(\xi, \zeta)$

$$\begin{cases} x = \xi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta, \\ y = \xi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \\ \zeta = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta. \end{cases}$$

Позначимо через  $\mu_g(\xi, \zeta)$  розподіл лінійного коефіцієнту послаблення у системі координат  $(\xi, \zeta)$ , повернуту відносно нерухомої системи координат  $(x, y)$  на кут  $\vartheta$ :

$$\mu_g(\xi, \zeta) = \mu(\xi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta, \xi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta).$$

Для інтенсивності  $I(\xi, \zeta)$  випромінювання, пройшовши крізь об'єкт вздовж осі  $\zeta$ , отримаємо

$$I(\xi, \zeta) = I_0 \exp\left\{-\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_g(\xi, \zeta) d\zeta\right\}.$$

При цьому було враховано, що за межами об'єкта  $\mu(x, y) \equiv 0$ . Проекцією  $p(\xi, \zeta)$ , називають таку величину

$$p(\xi, \zeta) = -\ln \frac{I(\xi, \zeta)}{I_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_g(\xi, \zeta) d\zeta.$$

Таким чином, ми отримаємо наступний вираз для проекції:

$$\begin{aligned} p(\xi, \zeta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_g(\xi, \zeta) d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x(\xi, \zeta, \vartheta), y(\xi, \zeta, \vartheta)) d\zeta = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta, \xi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta) d\zeta. \end{aligned}$$

Таке співвідношення називається перетворенням Радона двовимірної функції  $\mu(x, y)$ .

## 2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

### 2.1 Метод реконструкції зображень з використанням скінченних сум Фур'є

Нехай треба дослідити щільність  $f(x, y)$  всередині деякого тіла на площині  $Oxy$  методами рентгенівської комп'ютерної томографії, використовуючи задані проекційні дані, що згідно з (1.5) являють собою лінійні інтеграли

$$\int_{L_k} f(x, y) dl = \gamma_k, \quad k = 1, \dots, M, \quad (2.1)$$

вздовж заданої системи прямих  $L_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ , що перетинають тіло. Як було сказано раніше, ці проекції можна отримати шляхом вимірювання інтенсивностей рентгенівського проміню вздовж відповідних прямих на виході з джерела рентгенівського випромінювання і після проходження через тіло. Згідно з [1], наближення для функції  $f(x, y)$  шукається у вигляді скінченної суми Фур'є

$$f(x, y) \approx S_{N,N}(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N F_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)}, \quad (2.2)$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулою

$$F_{k,l} = \iint_D f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy. \quad (2.3)$$

Для обчислення матриці коефіцієнтів (2.3), де  $k = -N, \dots, N$ ,  $l = -N, \dots, N$ , окремо розглядаються різні випадки співвідношень між  $k$  та  $l$ , а саме коли:

- $k \geq l$ ;
- $k < l$ ;

$$-k \geq l \geq 1;$$

$$-1 \leq k < l;$$

Далі робиться заміна змінних

$$lx + ky = t, \quad kx - ly = v, \quad (2.4)$$

$$x = \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}, \quad y = \frac{kt - lv}{k^2 + l^2}. \quad (2.5)$$

Таким чином, коли  $k > l$  або  $k < l$  область інтегрування  $D = [0,1] \times [0,1]$  розіб'ється на три підобласті  $D_1, D_2, D_3$ . А у випадку коли  $k = l$  область  $D$  розіб'ється на дві підобласті  $D_1$  та  $D_3$ . Ці випадки відображені на рисунку 2.1.

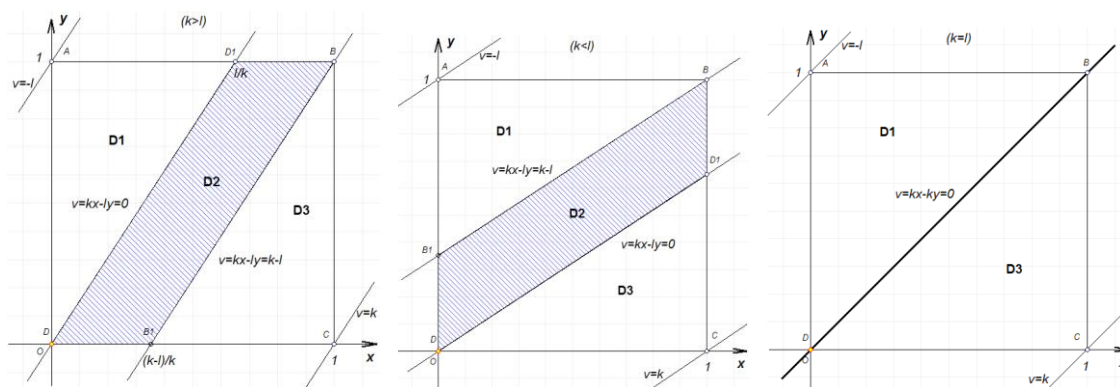


Рисунок 2.1 – Розбиття області  $D$  на підобласті

Розглянемо детальніше випадок, коли  $k > l > 0$ .

В цьому випадку області  $D_1, D_2, D_3$  та області  $D_1, D_2, D_3$  (для змінних  $t, v$ ) можна записати як

$$D_1 := \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq 1; 0 \leq x \leq \frac{ly}{k} \right\},$$

$$D_1 = \left\{ (v, t) : -l \leq v \leq 0; -\frac{kv}{l} \leq t \leq \frac{k^2 + l^2 + lv}{k} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq 1; kx - ly \geq 0; kx - ly \leq k - l \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (v, t) : 0 \leq v \leq k - l; \frac{lv}{k} \leq t \leq \frac{k^2 + l^2 + lv}{k} \right\},$$

$$D_3 = \left\{ (x, y) : kx - ly \geq k - l; kx - ly \leq k; 0 \leq y \leq \frac{kx - kl + l}{l} \right\},$$

$$D_3 = \left\{ (v, t) : k - l \leq v \leq k; \frac{lv}{k} \leq t \leq \frac{k^2 + l^2 - kv}{l} \right\}.$$

Таким чином, для коефіцієнтів Фур'є (2.3) можна написати

$$F_{k,l} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy = I_1 + I_2 + I_3,$$

де

$$I_1 = \iint_{D_1} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy,$$

$$I_2 = \iint_{D_2} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy,$$

$$I_3 = \iint_{D_3} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy.$$

Далі напишемо формули для обчислення інтегралів  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ , враховуючи зроблені заміни змінних (2.4), (2.5) та розрахувавши значення якобіану

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{k}{k^2 + l^2} & \frac{-l}{k^2 + l^2} \\ \frac{l}{k^2 + l^2} & \frac{k}{k^2 + l^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{k^2 + l^2},$$

$$I_1 = \frac{1}{k^2 + l^2} \int_{-l}^0 e^{-i2\pi v} dv \left[ \int_{\frac{kv}{l}}^{\frac{k^2 + l^2 + lv}{k}} f\left(\frac{kv + lt}{k^2 + l^2}, \frac{kt - lv}{k^2 + l^2}\right) dt \right] = \quad (2.6)$$

$$\left| \begin{array}{l} \phi_1(v) = \int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt \\ = \left. \begin{array}{l} v = z(k-l); \quad dv = (k-l)dz; \\ v = 0 \Rightarrow z = 0; \quad v = k-l \Rightarrow z = 1 \end{array} \right\} = \frac{k-l}{k^2+l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi z(k-l)} \phi_1(z) dz. \end{array} \right.$$

Далі у формулі (2.6) зробимо заміну

$$v = -lz, \quad dv = -ldz, \quad v = 0 \Rightarrow z = 0, \quad v = -l \Rightarrow z = 1.$$

Отримаємо

$$I_1 = \frac{l}{k^2+l^2} \int_0^1 \phi_1(z(-l)) e^{-i2\pi z(-l)} dz = \left| \phi_1(z(-l)) = \phi_1(z) \right| = \frac{l}{k^2+l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi z(-l)} \phi_1(z) dz. \quad (2.7)$$

Аналогічно напишемо формули для інтегралів  $I_2$  та  $I_3$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{k^2+l^2} \int_0^{k-l} e^{-i2\pi v} dv \left[ \int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt \right] = \\ &= \left. \begin{array}{l} \phi_2(v) = \int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt \\ = \left. \begin{array}{l} v = z(k-l); \quad dv = (k-l)dz; \\ v = 0 \Rightarrow z = 0; \quad v = k-l \Rightarrow z = 1 \end{array} \right\} = \frac{k-l}{k^2+l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi z(k-l)} \phi_2(z) dz \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{k^2 + l^2} \int_{k-l}^k e^{-i2\pi v} dv \left[ \int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2-kv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt \right] = \\
&= \left. \begin{aligned}
\phi_3(v) &= \int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2-kv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt \\
v = k-l + zl; \quad dv &= ldz; \\
v = k-l \Rightarrow z = 0; \quad v = k &\Rightarrow z = 1
\end{aligned} \right| = \frac{l}{k^2 + l^2} \int_0^1 \phi_3(k-l+zl) e^{-i2\pi(k-l+zl)} dz = \\
&= \frac{l}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi(k-l+zl)} \phi_3(z) dz.
\end{aligned}$$

Аналогічно можна записати формули для інтегралів  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  при інших співвідношеннях між  $k$  та  $l$ :

а) при  $k \geq l$

$$CF_{k,l} = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$I_1 = l \int_0^1 \frac{F_1(zl) e^{-i2\pi zl}}{k^2 + l^2} dz, \quad F_1(t) = \int_{\frac{l}{k}}^{\frac{k}{l}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv, \quad (2.7)$$

$$I_2 = \frac{k-l}{k^2+l^2} \int_0^1 F_2(l+z(k-l)) e^{-i2\pi[l+z(k-l)]} dz, \quad F_2(t) = \int_{\frac{l}{k}}^{\frac{k^2+l^2-lt}{k}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv,$$

$$I_3 = l \int_0^1 \frac{F_3(k+zl) e^{-i2\pi(k+zl)}}{k^2+l^2} dz, \quad F_3(t) = \int_{\frac{1}{l}[-k^2-l^2+kt]}^{\frac{1}{k}[k^2+l^2-lt]} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv;$$

б) при  $k < l$

$$CF_{k,l} = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$I_1 = \frac{k}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi kz} G_1(kz) dz, \quad G_1(t) = \int_{\frac{lt}{k}}^{\frac{kt}{l}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv,$$

$$I_2 = \frac{l-k}{k^2+l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi(k+z(l-k))} G_2(k+z(l-k)) dz, \quad G_2(t) = \int_{\frac{-k^2-l^2+kt}{l}}^{\frac{kt}{l}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv,$$

$$I_3 = \frac{k}{k^2+l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi(l+kz)} G_3(l+kz) dz, \quad G_3(t) = \int_{\frac{-k^2-l^2+kt}{l}}^{\frac{k^2+l^2-t}{k}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv;$$

в) при  $k \geq l \geq 1$

$$CF_{k,-l} = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$I_1 = \frac{l}{k^2+l^2} \int_0^1 \phi_1(z(-l)) e^{-i2\pi z(l)} dz, \quad \phi_1(v) = \int_{\frac{kv}{l}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt,$$

$$I_2 = \frac{k-l}{k^2+l^2} \int_0^1 \phi_2(z(k-l)) e^{-i2\pi z(k-l)} dz, \quad \phi_2(v) = \int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt,$$

$$I_3 = \frac{l}{k^2+l^2} \int_0^1 \phi_3(k-l+zl) e^{-i2\pi(k-l+zl)} dz, \quad \phi_3(v) = \int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2+kv}{l}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt;$$

г) при  $1 \leq k < l$

$$I_1 = \frac{k}{k^2+l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi(kz-l)} \omega_1(kz-l) dz, \quad \omega_1(v) = \int_{\frac{kv}{l}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt,$$

$$I_2 = \frac{l-k}{k^2+l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi z(k-l)} \omega_2[z(k-l)] dz, \quad \omega_2(v) = \int_{\frac{kv}{l}}^{\frac{k^2+l^2-kv}{l}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt,$$

$$I_3 = \frac{k}{k^2+l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi kz} \omega_3(kz) dz, \quad \omega_3(v) = \int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2-kv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt.$$

Для значень  $k, l$  що задовольняють умови  $k, l \leq -1$  виконується рівність:

$$CF_{-k,-l} = \overline{CF_{k,l}}; \quad CF_{-k,l} = \overline{CF_{k,-l}}, \quad \overline{\alpha + i\beta} := \alpha - i\beta.$$

Таким чином, отримали формули для розрахунку коефіцієнтів Фур'є (2.3). Отримані формули дають точні значення коефіцієнтів Фур'є за умови того, що функції  $F_i, G_i, \phi_i, \omega_i, i = \overline{1,3}$  відомі для кожного значення аргументів. Але оскільки для кожного значення цих аргументів ці функції чисельно дорівнюють відповідним проєкціям, які поступають з томографа, то вони можуть бути відомі лише для дискретного набору значень відповідного аргумента. [1,2]

Далі буде розглянуто отримання формул для розрахунку інтегралів з врахуванням проєкційних даних на основі використання кусково-сталих функцій на прикладі інтеграла (2.7), цей інтеграл заміняємо на суму інтегралів, використовуючи властивість адитивності інтегралів. З цією цілю відрізок  $[0,1]$  розбиваємо на  $M$  частинних відрізків точками  $z_1, z_2, \dots, z_{M-1}$ , тобто точками  $z_q, q = \overline{0, M-1}$ .

Повторимо формули (2.7) і проведемо вказану процедуру.

$$I_1 = l \int_0^1 \frac{F_1(zl) e^{-i2\pi zl} dz}{k^2 + l^2}, \quad F_1(t) = \int_{-\frac{l}{k}}^{\frac{k}{l}t} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv. \quad (2.7)$$

Тоді (2.7) буде мати вигляд

$$I_1 = \frac{l}{k^2 + l^2} \sum_{q=0}^{M-1} \int_{z_q}^{z_{q+1}} e^{-i2\pi zl} F_1(k, l, l \cdot z) dz. \quad (2.8)$$

Функцію  $F_1(k, l, zl)$  замінюємо на кусково-сталу функцію

$$F_1(k, l, zl) \approx \sum_{q=1}^{M-1} F_1\left(k, l, l \cdot \frac{z_q + z_{q+1}}{2}\right) \cdot H_q(z), \quad (2.9)$$

де

$$H_q(z) = \begin{cases} 1, & z \in [z_q; z_{q+1}], \\ 0, & z \notin [z_q; z_{q+1}]. \end{cases}$$

Формула (2.9) означає, що по кожному відрізьку  $[z_q; z_{q+1}]$  функція  $F_1(k, l, zl)$  замінюється значенням цієї функції в середній точці відрізка  $[z_q; z_{q+1}]$ . Тоді після винесення константи, інтеграл  $I_1$  отримає вид

$$I_1 = \frac{l}{k^2 + l^2} \sum_{q=0}^{M-1} F_1\left(k, l, l \cdot \frac{z_q + z_{q+1}}{2}\right) \int_{z_q}^{z_{q+1}} e^{-i2\pi zl} dz. \quad (2.10)$$

Далі обчислюємо інтеграл

$$\int_{z_q}^{z_{q+1}} e^{-i2\pi zl} dz = \frac{1}{-i2\pi l} e^{-i2\pi zl} \Big|_{z_q}^{z_{q+1}} = -\frac{1}{i2\pi l} \left( e^{-i2\pi z_{q+1}l} - e^{-i2\pi z_q l} \right) = \left| \begin{array}{l} z_q = \frac{q}{M} \\ z_{q+1} = \frac{q+1}{M} \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{i2\pi l} \left( e^{-i2\pi \frac{q+1}{M} l} - e^{-i2\pi \frac{q}{M} l} \right) = -\frac{1}{i2\pi l} e^{-i2\pi \frac{q}{M} l} \left( e^{-i2\pi \frac{q}{M} l} - 1 \right) = \frac{e^{-i2\pi \frac{l}{M}} - 1}{-i2\pi l} e^{-i2\pi \frac{q}{M} l}, \\
&\int_{z_q}^{z_{q+1}} e^{-i2\pi z l} dz = \frac{e^{-i2\pi \frac{l}{M}} - 1}{-i2\pi l} e^{-i2\pi \frac{q}{M} l}. \tag{2.11}
\end{aligned}$$

Підставимо (2.11) в (2.10)

$$I_1 = \frac{l}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi \frac{l}{M}} - 1}{-i2\pi l} \cdot \sum_{q=0}^{M-1} F_1 \left( k, l, l \cdot \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) \cdot e^{-i2\pi \frac{q}{M} l}.$$

Відмітимо, що

$$\frac{z_q + z_{q+1}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{q}{M} + \frac{q+1}{M} \right) = \frac{2q+1}{2M} = \frac{q+0.5}{M}.$$

Таким чином,

$$I_1 = \frac{l}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi \frac{l}{M}} - 1}{-i2\pi l} \sum_{q=0}^{M-1} F_1 \left( k, l, l \cdot \frac{q+0.5}{M} \right) \cdot e^{-i2\pi \frac{q}{M} l}. \tag{2.12}$$

Аналогічним чином підраховуються інші інтеграли

$$I_2 = \frac{k-l}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi \frac{(k-l)}{M}} - 1}{-i2\pi (k-l)} \sum_{q=0}^{M-1} F_2 \left( k, l, l + \frac{q+0.5}{M} (k-l) \right) \cdot e^{-i2\pi \frac{q}{M} (k-l)}, \tag{2.13}$$

$$I_3 = \frac{l}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi \frac{l}{M}} - 1}{-i2\pi l} \sum_{q=0}^{M-1} F_3 \left( k, l, l \cdot \frac{q+0.5}{M} + k \right) \cdot e^{-i2\pi \frac{q}{M} l}. \tag{2.14}$$

У випадку коли  $k > l$

$$I_1 = \frac{k}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi\frac{k}{M}} - 1}{-i2\pi k} \sum_{q=0}^{M-1} G_1 \left( k, l, k \cdot \frac{q+0.5}{M} \right) \cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}k}, \quad (2.15)$$

$$I_2 = \frac{l-k}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi\frac{(l-k)}{M}} - 1}{-i2\pi(l-k)} \sum_{q=0}^{M-1} G_2 \left( k, l, k + \frac{q+0.5}{M} \cdot (l-k) \right) \cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}(l-k)}, \quad (2.16)$$

$$I_3 = \frac{k}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi\frac{k}{M}} - 1}{-i2\pi k} \sum_{q=0}^{M-1} G_3 \left( k, l, l + k \cdot \frac{q+0.5}{M} \right) \cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}k}. \quad (2.17)$$

Для коефіцієнтів  $F_{k,-l} = I_1 + I_2 + I_3$ ,  $k > 0$ ,  $l > 0$  аналогічним чином отримуються формули для інтегралів  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ .

Коли  $k \geq l \geq 1$

$$I_1 = \frac{l}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi\frac{-l}{M}} - 1}{-i2\pi(-l)} \sum_{q=0}^{M-1} \phi_1 \left( k, l, -l \cdot \frac{q+0.5}{M} \right) \cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}(-l)}, \quad (2.18)$$

$$I_2 = \frac{k-l}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi\frac{(k-l)}{M}} - 1}{-i2\pi(k-l)} \sum_{q=0}^{M-1} \phi_2 \left( k, l, l + \frac{q+0.5}{M} (k-l) \right) \cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}(k-l)}, \quad (2.19)$$

$$I_3 = \frac{l}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi\frac{l}{M}} - 1}{-i2\pi l} \sum_{q=0}^{M-1} \phi_3 \left( k, l, k - l + l \cdot \frac{q+0.5}{M} \right) \cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}l}. \quad (2.20)$$

Коли  $1 \leq k \leq l$

$$I_1 = \frac{k}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi\frac{k}{M}} - 1}{-i2\pi k} \sum_{q=0}^{M-1} \omega_1 \left( k, l, k \cdot \frac{q+0.5}{M} - 1 \right) \cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}k}, \quad (2.21)$$

$$I_2 = \frac{k-l}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi\frac{(k-l)}{M}} - 1}{-i2\pi(k-l)} \sum_{q=0}^{M-1} \omega_2 \left( k, l, k + \frac{q+0.5}{M} \cdot (k-l) \right) \cdot e^{-i2\pi\frac{q}{M}(k-l)}, \quad (2.22)$$

$$I_3 = \frac{k}{k^2 + l^2} \cdot \frac{e^{-i2\pi \frac{k}{M}} - 1}{-i2\pi k} \sum_{q=0}^{M-1} \omega_3 \left( k, l, k \cdot \frac{q+0.5}{M} \right) \cdot e^{-i2\pi \frac{q}{M} k}. \quad (2.23)$$

## 2.2 Клас $R$ -функцій

При виконанні операції над звичайними дійсними змінними необхідно враховувати їх знаки. Знак змінної величини можна розглядати як двійкову змінну. Будемо вважати, що знаку «плюс» відповідає значення дійсності, а знаку «мінус» – значення хибності. Тоді виконання операцій над дійсними величинами будуть відповідати деякі операції над двійковими величинами.

Припустимо, що нуль завжди забезпечений якимось знаком  $i$ , в зв'язку з цим, відноситься до більшості додатних або від'ємних чисел. Тоді належність величини  $x$  до одного з цих класів будемо визначати за допомогою предиката  $S(x)$  який вводиться таким чином:

$$S(x) \rightarrow (x \geq +0) = 1,$$

$$S(x) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign}(x)), (x \neq 0).$$

Нехай  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  є функція, визначена повсюди в просторі  $\Upsilon = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Назвемо функцію  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$   $R$ -функцією, якщо в кожній з областей  $(H_j)(j = 1, 2, \dots, 2^n)$  вона зберігає постійний знак, тобто  $S[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = F_i = \text{const}$ , де  $F_i$  є двійкова величина одна й та сама для всіх точок області  $(H_j)$ . Так як кожному набору двійкових змінних відповідає певна область  $(H_j)$ , а, отже, і величина  $F_j$ , то отримаємо певну булеву функцію  $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$  таку, при якій виконується рівність:

$$S[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = F[S(x_1), S(x_2), \dots, S(x_n)]$$

Виконання умови наведеної вище є необхідним і достатнім для того, щоб функція  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  була  $R$ -функцією [7].

Формула, яка вказана вище кожної  $R$ -функції  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ставить у відповідність визначену булеву функцію  $Y = F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Існує нескінченна множина різних  $R$ -функцій, яким відповідає одна і та сама булева функція. Так як в різних булевих функціях  $n$  аргументів всього  $q = 2^{2^n}$ , то множина усіх  $R$ -функцій розбивається на  $q$  підмножин, так званими гілками класу  $\mathfrak{R}$ .

Розглянемо наступні  $R$ -функції:

$$z_1 = \frac{1}{2}[x + y - \sqrt{x^2 - 2\alpha xy + y^2}],$$

$$z_2 = \frac{1}{2}[x + y + \sqrt{x^2 - 2\alpha xy + y^2}], -1 < \alpha \leq 1.$$

Щоб встановити до яких гілок ці функції відносяться, визначимо знаки цих функцій в кожній з чвертей. Нескладно показати, що функція  $z_1$  додатна лише тоді, коли додатні обидва аргументи, відповідно, вона відповідає кон'юнкції  $X_1 \wedge X_2$ . Функція  $z_2$  додатна, якщо додатній хоча б один з її аргументів, і від'ємна, якщо обидва аргументи від'ємні. Відповідно, функція  $z_2$  відповідає диз'юнкції  $X_1 \vee X_2$ .

Операцію  $x \wedge_\alpha y \equiv \frac{1}{2}[x + y - \sqrt{x^2 - 2\alpha xy + y^2}]$  називається  $R$ -кон'юнкцією, а операцію  $x \vee_\alpha y \equiv \frac{1}{2}[x + y + \sqrt{x^2 - 2\alpha xy + y^2}]$  називається  $R$ -диз'юнкцією [7].

### 2.3 Геометрична інтерпретація формул булевої алгебри.

Нехай  $(D)$  є область на площині  $xOy$ , визначається нерівністю  $z = f(x, y) \geq 0$ , де  $f(x, y)$  – всюди визначена і неперервна функція. Вводимо двійкову змінну  $(D)$  за допомогою предиката  $D = D[f(x, y)] = [f(x, y) \geq 0]$ . Значенню дійсності двійкової змінної  $(D)$  відповідає належності точки  $M(x, y)$  області  $(D)$ , а значення хибності – неналежність її області  $(D)$ . Нехай  $(D_1)$  і  $(D_2)$  є області, визначаються нерівностями,  $f_1(x, y) \geq 0$  и  $f_2(x, y) \geq 0$  відповідно. Розглянемо наступну теорему.

Теорема [7]. Якщо  $z = \varphi_1(u, v)$  є  $R$ -функція, відповідає операції кон'юнкції  $U \wedge V$ , то область  $(D)$ , визначається нерівністю

$$\psi_1(x, y) \equiv \varphi_1[f_1(x, y), f_2(x, y)] \geq 0,$$

є перетин областей  $D_1$  и  $D_2$ .

Доведення. Так як функція  $\varphi_1(u, v)$  є  $R$ -функцією, відповідна кон'юнкції, то, має місце наступні перетворення:

$$\begin{aligned} S\{\varphi_1[f_1(x, y); f_2(x, y)]\} &= S[f_1(x, y)] \wedge S[f_2(x, y)] = \\ &= [f_1(x, y) \geq 0] \wedge [f_2(x, y) \geq 0] = D_1 \wedge D_2. \end{aligned}$$

Що и потребувалося довести.

Теорема [7]. Якщо області  $D_1$  і  $D_2$  визначаються відповідно нерівностями  $f_1(x, y) \geq 0$  та  $f_2(x, y) \geq 0$ , функція  $z = \varphi_2(u, v)$  є  $R$ -функція, відповідає диз'юнкції  $U \vee V$  то область  $D$ , представляє собою об'єднання областей  $D_1$ ,  $D_2$ , визначається нерівністю  $\psi_2(x, y) \equiv \varphi_2[f_1(x, y); f_2(x, y)] \geq 0$ .

Розглянемо приклад для наочного пояснення розглянутих теорем. Нехай область  $D_1$  є полоса, яка визначається нерівністю  $a^2 - x^2 \geq 0$ , а область  $D_2$  – полоса, яка визначається нерівністю  $b^2 - y^2 \geq 0$  (рис. 3.3).

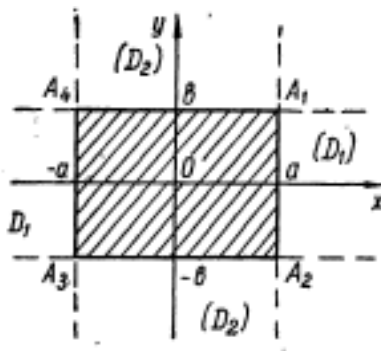


Рисунок 2.2 – Области  $D_1$ ,  $D_2$

Скористаємося  $R$ -кон'юнкцією. Тоді нерівність  $(a^2 - x^2) \wedge_{\alpha} (b^2 - y^2) \geq 0$  визначає прямокутник  $A_1A_2A_3A_4$ . Тут рівність досягається лиш на межі прямокутника  $A_1A_2A_3A_4$ , тому рівняння  $a^2 + b^2 - x^2 - y^2 - |a^2 - b^2 - x^2 + y^2| = 0$ , є рівняння того прямокутника. Таким чином, за допомогою операції  $R$ -кон'юнкції [7] було отримано аналітичний вираз для прямокутника.

#### 2.4 Метод реконструкції зображень з використанням сум Фейєра

Найбільшу цікавість містить в собі поведінка ряду Фур'є поблизу точок розриву. Як було показано Д. У. Гіббсом, ряд Фур'є не завжди представляє функцію з належною точністю [6]. Це пов'язане з так званим ефектом Гіббса [9]. Найкраще цей ефект можна побачити на прикладі розривної функції

$$f(t) = \text{sign}(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ +1, & 0 < t < \pi. \end{cases}$$

Графік функції  $f(t)$  наведений на рисунку 2.3. Функцію  $f(t)$  можна представити у виді

$$f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t),$$

де

$$S_N(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}.$$

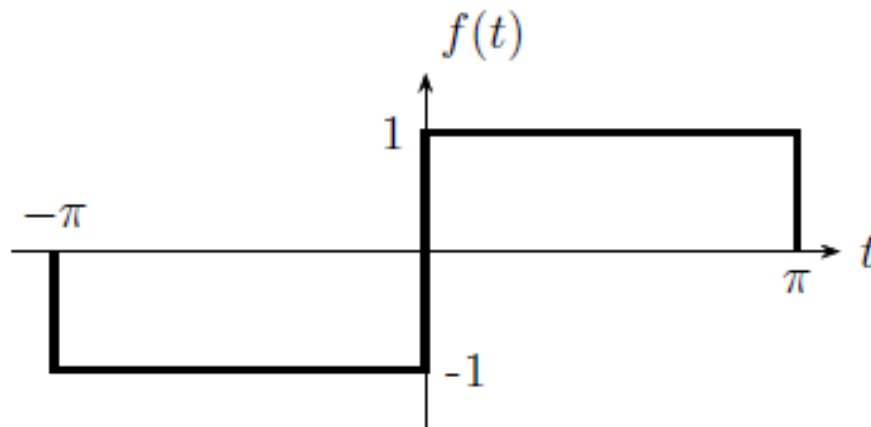


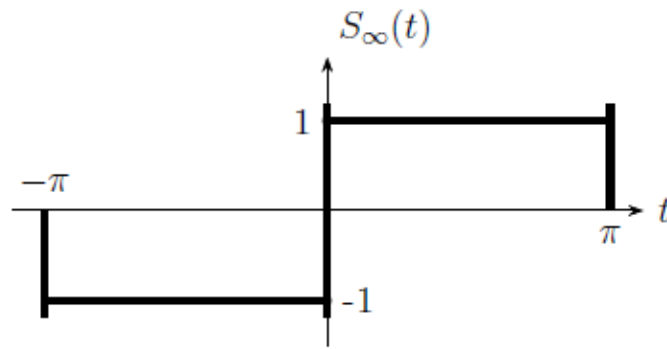
Рисунок 2.3 – Графік функції  $f(t)$

Можна показати [3], що

$$\max \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t) \right\} = \frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi) \approx 1,17898,$$

де  $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$  – інтегральний синус.

Таким чином, сума нескінченного ряду Фур'є функції  $f(x)$  проходячи через точки розриву робить скачки, приблизно на 17,9% більші, ніж скачки самої функції. Графік цієї суми зображений на рисунку 2.4.

Рисунок 2.4 – Графік суми ряду Фур'є  $S_\infty(t)$ 

Але можна показати [9], що явище Гіббса встановлене ним на окремому прикладі тригонометричного розкладу, має місце і в загальному випадку.

Таким чином, виникає необхідність у вирішенні проблем пов'язаних з цим явищем. Як відомо скінченна сума ряду Фур'є може бути представлена у вигляді

$$S_N(x) = S_N(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_N(t) dt,$$

де  $D_N(t)$  – так зване ядро Діріхле,

$$D_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nt = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad t \in [-\pi, \pi], \quad N = 1, 2, \dots$$

Розглянемо середні арифметичні частинних сум ряду Фур'є

$$\sigma_N(x) = \sigma_N(f, x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n(f, x), \quad N = 0, 1, \dots,$$

вони, на відміну від частинних сум  $S_N$ , завжди рівномірно збігаються до  $f(x)$ ,

у випадку  $f \in C(-\pi, \pi)$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ . А в загальному випадку

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Середні  $\sigma_N(f, x)$  називаються середніми Фейєра. При цьому для кожної функції  $f \in L_1(-\pi, \pi)$

$$\sigma_N(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_N(t) dt,$$

де  $K_N(t)$  – ядро Фейєра

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(t) = \frac{2}{N+1} \left[ \frac{\sin \frac{1}{2}(N+1)t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right]^2, \quad N = 0, 1, \dots$$

Відзначимо, що при  $N = 0, 1, \dots$  виконуються наступні умови:

$$K_N(t) \geq 0, \quad t \in [-\pi, \pi], \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) dt = 1. \quad (2.25)$$

Із (2.24), (2.25) випливає, що для  $f \in C(-\pi, \pi)$  і  $x \in [-\pi, \pi]$

$$|\sigma_N(f, x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)| K_N(t) dt \leq \|f\|_{C(-\pi, \pi)}, \quad N = 0, 1, \dots$$

Якщо ж  $f \in L^p(-\pi, \pi)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , то в силу нерівності Гельдера

$$|\sigma_N(f, x)| = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_N^{\frac{1}{p}}(t) K_N^{\frac{1}{q}}(t) dt \right| \leq \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)|^p |K_N(t)| dt \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \pi^{\frac{1}{q}},$$

а отже,

$$\begin{aligned} \|\sigma_N(f, \cdot)\|_p^p &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)|^p |K_N(t)| dt dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_N(t)| \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)|^p dx dt \leq \\ &\leq \|f\|_p^p \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_N(t)| dt = \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Тобто  $\|\sigma_N(f, \cdot)\|_p \leq \|f\|_p$ . Аналогічні твердження справедливі також для функцій  $f$  двох і більше змінних [8]. Демонстрації того, що використання сум Фейєра дозволяє позбутися ефекту Гіббса наведено в [9].

Таким чином на основі методу розглянутому у розділі 2.1 отримали метод, який на відміну від частинних сум Фур'є

$$SF(x, y, N) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N F_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)}, \quad F_{k,l} = \iint_D f(u, v) e^{-i2\pi(ku+lv)} dudv, \quad (2.26)$$

використовує аналогічні суми Фейєра для функцій двох змінних, які визначаються так:

$$\begin{aligned} SFE(x, y, N) &= \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \left(1 - \frac{|l|}{N+1}\right) F_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)}, \quad (2.27) \\ F_{k,l} &= \iint_D f(u, v) e^{-i2\pi(ku+lv)} dudv. \end{aligned}$$

Використання сум Фейера (2.27) дозволить позбутися ефекту Гіббса [9], що в свою чергу дозволить отримати більш адекватні результати при реконструкції зображень. Найяскравіші демонстрація цього факту очікуються при відновленні розривних функцій.

Також важливим є зауваження що стосується області застосування методів реконструкції зображень, а саме – комп'ютерної томографії. Отримання інформації про внутрішній розподіл тканин полягає у відшукуванні функції щільностей по проекційним даним у заданій області. Тому найчастіше відновлювані функції будуть мати розриви першого роду вздовж ліній, що будуть являти собою границі переходу від однієї речовини (рідини, тканини, тощо) у іншу. Навіть для однорідних об'єктів, при реконструкції у заданій області в результаті відновлення отримаємо розривну функцію з розривом першого роду вздовж лінії контуру об'єкта, так як ця крива розмежує зовнішнє середовище і сам об'єкта.

## 2.5 Побудова тестових задач

Задача 1. Задання області  $D$  у вигляді  $F(x, y) \geq 0$  для випадку, коли область  $D$  – рівносторонній трикутник, вписаний в круг з радіусом  $r$  (частинний випадок. Без паралельного перенесення та повороту системи координат).

Розглядається задача відновлення функції  $f(x, y)$ , заданій в квадраті  $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$  з носієм в області  $D \subset Q$ , що є рівностороннім трикутником, вписаним в круг з центром  $O(0,0)$ , радіусом  $r, r < 1$ . В зв'язку с цим виникає задача визначити область  $D$  нерівністю  $F(x, y) \geq 0$ . Така задача вирішується за допомогою  $R$ -функцій [7] і наводиться нижче як допоміжна задача.

Дано:  $r$  – радіус кола, з центром на початку координат. Область  $D = \Delta_{M_1 M_2 M_3}$  – рівносторонній трикутник вписаний в круг. Потрібно визначити область  $D$  нерівністю  $F(x, y) \geq 0$ .

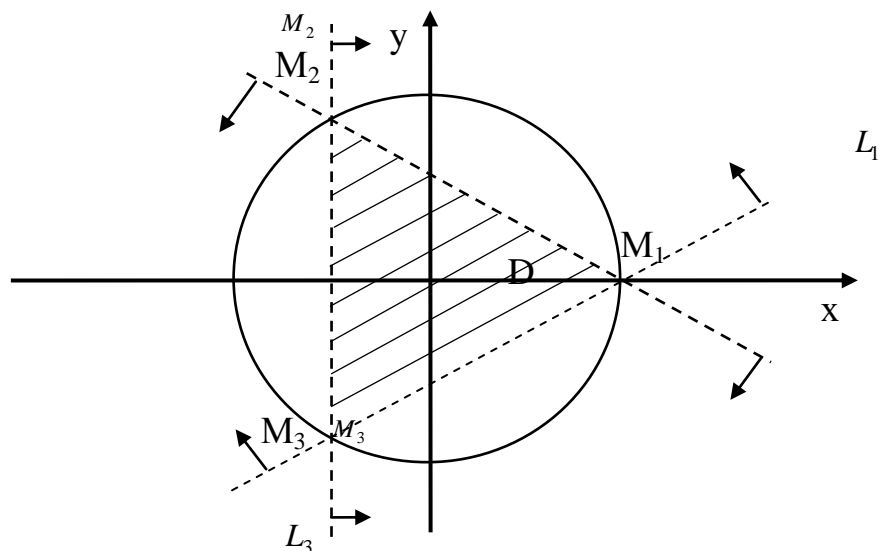


Рисунок 2.5 – Графічне подання області D

Розв'язання. Задамо вершини трикутника  $M_1(r,0), M_2(-0.5r, 0.5r\sqrt{3}), M_3(-0.5r, -0.5r\sqrt{3})$ . Задання вершин трикутника пов'язано з заданням тільки одного параметра  $r$ .

Визначимо прямі, відповідаючи відріzkам  $M_3M_1, M_1M_2, M_2M_3$  відповідно  $L_1, L_2, L_3$ . Запишемо рівняння цих прямих в вигляді  $Ax + By + C = 0$ , скориставшись рівняннями прямих, які проходять через дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

В результаті отримаємо:

$$L_1 : -\sqrt{3}x + 3y + r\sqrt{3} = 0,$$

$$L_2 : -\sqrt{3}x - 3y + r\sqrt{3} = 0,$$

$$L_3 : x + 0,5r = 0.$$

Тоді нерівності:

$$f_1 = \sqrt{3}x + 3y + r\sqrt{3} \geq 0,$$

$$f_2 = -\sqrt{3}x - 3y + r\sqrt{3} \geq 0,$$

$$f_3 = x + 0,5r \geq 0,$$

визначають півплощини  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  такі, що область  $D = D_1 \wedge D_2 \wedge D_3$ ,  $D = \Delta_{M_1 M_2 M_3}$ , знак  $\wedge$  визначає логічну операцію кон'юнкції.

Згідно теорії  $R$ -функції [7], нерівність

$$F(x, y) = f_1 \wedge_\alpha f_2 \wedge_\alpha f_3 \geq 0$$

визначає область  $D$ .

Тут операція  $\wedge_\alpha$  – операція  $R$ -кон'юнкції [7].

$$f_1 \wedge_\alpha f_2 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2 - 2\alpha f_1 f_2}).$$

При  $\alpha = 1$  формула приймає вигляд:

$$f_1 \wedge_1 f_2 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|).$$

Враховуючи вказану систему нерівностей, що визначаючих область  $D$ , вдалося отримати запис нерівності  $F(x, y) \geq 0$  в явному вигляді, де функція  $F(x, y)$  подана у вигляді єдиного аналітичного виразу. Цей самий процес реалізовано програмно с використанням операції  $R$ -кон'юнкції.

Наводимо процес отримання нерівності  $F(x, y) \geq 0$ .

Крок 1.  $F_1(x, y) = f_1 \wedge_1 f_2$ .

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 &= -2\sqrt{3}x + 2r\sqrt{3}, \\ f_1 - f_2 &= 6y, \\ f_1 \wedge_1 f_2 &= \frac{1}{2}(-2\sqrt{3}x + 2r\sqrt{3} - |6y|), \\ F_1(x, y) = f_1 \wedge f_2 &= -\sqrt{3}x + r\sqrt{3} - |3y|, \\ f_3 &= x + 0,5r. \end{aligned}$$

Крок 2.  $F(x, y) = F_1 \wedge_1 f_3$ ,

$$\begin{aligned}
 F_1 + f_3 &= -\sqrt{3}x + r\sqrt{3} - |3y| + x + 0,5r = (1 - \sqrt{3})x + (\sqrt{3} + 0,5)r - |3y|, \\
 F_1 - f_3 &= -(\sqrt{3} + 1)x + (\sqrt{3} - 0,5)r - |3y|, \\
 F(x, y) &= F_1 \wedge_1 f_3 = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ (1 - \sqrt{3})x + (\sqrt{3} + 0,5)r - |3y| - \left| -(\sqrt{3} + 1)x + (\sqrt{3} - 0,5)r - |3y| \right| \right] \geq 0.
 \end{aligned}$$

Задача 2. Задання області  $D$  у вигляді  $F(x, y) \geq 0$  для випадку, коли область  $D$  – рівносторонній трикутник, вписаний в круг з радіусом  $r$  (загальний випадок. Довільне розташування трикутника з урахуванням паралельного перенесення та повороту).

Розглядається задача відновлення функції  $f(x, y)$ , заданій в квадраті  $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$  з носієм в області  $D \subset Q$ , що є рівностороннім трикутником, вписаним в круг з центром  $O(0, 0)$ , радіусом  $r$ ,  $r < 1$ . В зв'язку з цим виникає задача визначити область  $D$  нерівністю  $F(x, y) \geq 0$ . Така задача вирішується за допомогою  $R$ -функцій [7] і наводиться нижче як допоміжна задача.

Дано:  $r$  – радіус кола, з центром на початку координат. Область  $D = \Delta_{M_1 M_2 M_3}$  – рівносторонній трикутник, вписаний в круг. Потрібно визначити область  $D$  нерівністю  $F(x, y) \geq 0$ .

Розв'язання. Задамо вершини трикутника:

$$\begin{aligned}
 &M_1(r \cdot \cos \alpha, r \cdot \sin \alpha), \\
 &M_2\left(r \cdot \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right), r \cdot \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)\right), \\
 &M_3\left(r \cdot \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right), r \cdot \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right)\right).
 \end{aligned}$$

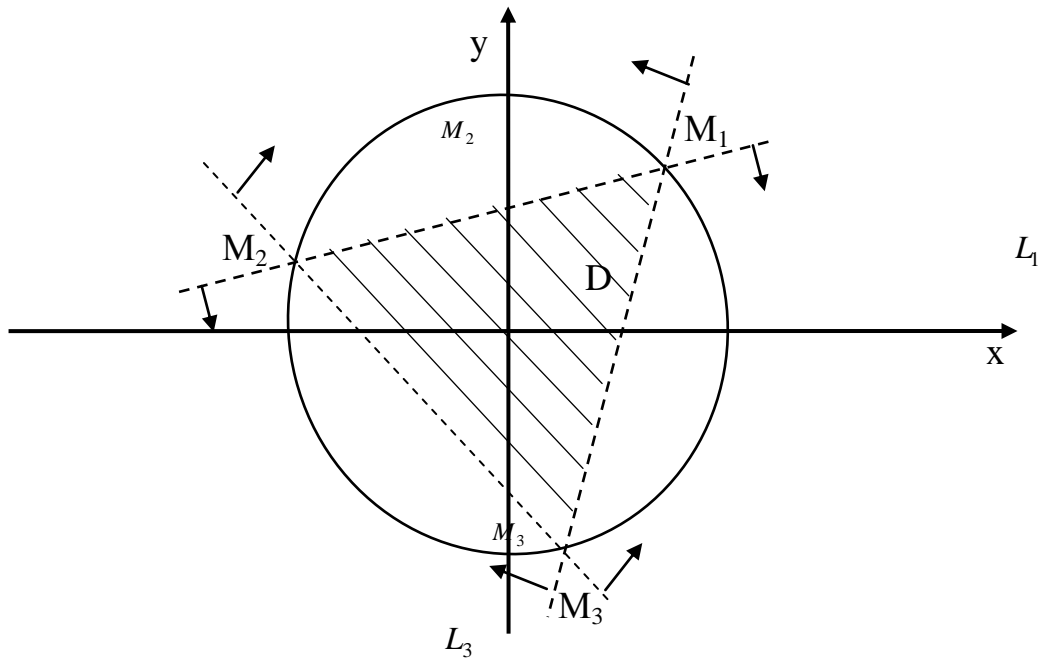


Рисунок 2.6 – Графічне подання області D

Задання вершин трикутника пов'язано з заданням двох параметрів  $r$  та  $\alpha$ . Визначимо прямі, відповідаючи відрізкам  $M_3M_1$ ,  $M_1M_2$ ,  $M_2M_3$  відповідно  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ . Запишемо рівняння цих прямих в вигляді  $Ax + By + C = 0$ , скориставшись рівняннями прямих, які проходять через дві точки:  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ .

В результаті отримаємо:

$$L_1 : ((y - y_0)(x_2 - x_1) - (x - x_0)(y_2 - y_1)) - (y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)) = 0,$$

$$L_2 : ((y - y_0)(x_3 - x_2) - (x - x_0)(y_3 - y_2)) - (y_2(x_3 - x_2) - x_2(y_3 - y_2)) = 0,$$

$$L_3 : ((y - y_0)(x_1 - x_3) - (x - x_0)(y_1 - y_3)) - (y_3(x_1 - x_3) - x_3(y_1 - y_3)) = 0.$$

Тут  $(x_0, y_0)$  – центр круга,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  – координати вершин трикутника. Тоді нерівності:

$$f_1 = ((y - y_0)(x_2 - x_1) - (x - x_0)(y_2 - y_1)) - (y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)) \geq 0,$$

$$f_2 = ((y - y_0)(x_3 - x_2) - (x - x_0)(y_3 - y_2)) - (y_2(x_3 - x_2) - x_2(y_3 - y_2)) \geq 0,$$

$$f_3 = ((y - y_0)(x_1 - x_3) - (x - x_0)(y_1 - y_3)) - (y_3(x_1 - x_3) - x_3(y_1 - y_3)) \geq 0,$$

визначають півплощини  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  такі, що область  $D = D_1 \wedge D_2 \wedge D_3$ ,  $D = \Delta_{M_1 M_2 M_3}$ , знак  $\wedge$  визначає логічну операцію кон'юнкції.

Згідно теорії  $R$ -функції [7], нерівність

$$F(x, y) = f_1 \wedge_{\alpha} f_2 \wedge_{\alpha} f_3 \geq 0$$

визначає область  $D$ .

Процес отримання нерівності  $F(x, y) \geq 0$ .

а)  $F_1(x, y) = f_1 \wedge_1 f_2$ ;

б)  $F(x, y) = F_1 \wedge_1 f_3$ ,

Задача 3. Задання області  $D$  у вигляді  $F(x, y) \geq 0$  для випадку об'єднання скінченної кількості трикутників (випадок чотирьох трикутників, область типу «бант»). Для побудови функції, заданої в області, що є об'єднанням чотирьох трикутників, використовуємо викладки наведені в тестовій задачі 2 цього пункту. Будуємо функції  $F_1(x, y)$ ,  $F_2(x, y)$ ,  $F_3(x, y)$ ,  $F_4(x, y)$ .

Функція  $F(x, y)$  подається в вигляді:

$$F(x, y) = F_1(x, y) + F_2(x, y) + F_3(x, y) + F_4(x, y).$$

При програмній реалізації центри трикутників були взяті  $(0,7;0,7)$ ,  $(0,3;0,7)$ ,  $(0,3;0,3)$ ,  $(0,7;0,3)$ , а кути  $\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + \pi$ ,  $\alpha_2 = -\frac{\pi}{4}$ ,  $\alpha_3 = \frac{\pi}{4}$ ,  $\alpha_4 = -\frac{\pi}{4} - \pi$  відповідно.

Задача 4. Задання області  $D$  у вигляді  $F(x, y) \geq 0$  для випадку коли область  $D$  є «трикутник кільцем».

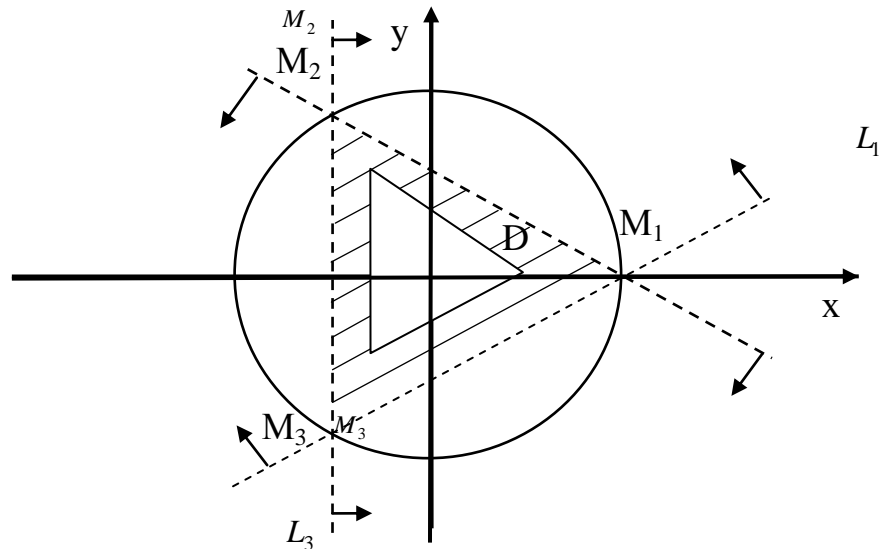


Рисунок 2.7 – Графічне подання області D

Розв'язок. Будуємо нерівність  $F_1(x, y) \geq 0$ , що задає внутрішню частину більшого трикутника. Потім будуємо нерівність  $F_2(x, y) \geq 0$ , що задає зовнішню частину малого трикутника. Нерівність  $F_1(x, y) \geq 0$  будується як в задачі 2 цього пункту, а нерівність  $F_2(x, y) \geq 0$ , будуємо як для зовнішнього малого трикутника, таким чином:

$$F_2(x, y) = (-f_1(x, y)) \vee_1 (-f_2(x, y)) \vee_1 (-f_3(x, y)),$$

де  $-f_1(x, y) \geq 0$ ,  $-f_2(x, y) \geq 0$ ,  $-f_3(x, y) \geq 0$  задаються як в задачі 2 цього пункту.

В результаті

$$F(x, y) = F_1(x, y) \wedge_1 F_2(x, y).$$

Таким чином, в задачах 1 – 4 визначено задання областей, які розташовані в квадраті. В цих областях будуть задані тестові функції  $f(x, y)$ , які вибирались неперервними та розривними. Побудовані області є носіями функції  $f(x, y)$ . Вони задані в квадраті. Тестові функції наведено в розділі 4.

## 3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

### 3.1 Mathcad як система комп'ютерної математики

Mathcad – це популярна система комп'ютерної математики, призначена для автоматизації вирішення масових математичних задач в самих різних областях науки, техніки та освіти [11].

Mathcad має простий для використання інтерфейс користувача. Для введення формул і даних можна використовувати як клавіатуру, так і спеціальні панелі інструментів. Робота здійснюється в межах робочого листа, на якому рівняння і вирази відображаються графічно, на противагу текстової записи в мовах програмування або в деяких аналогічних системах комп'ютерної алгебри, наприклад Wolfram Mathematica. При створенні документів використовується принцип WYSIWYG (What You See Is What You Get – «що бачиш, те й отримуєш»).

Mathcad містить сотні операторів і вбудованих функцій для вирішення різних технічних завдань. Програма дозволяє виконувати чисельні і символні обчислення, проводити операції з скалярними величинами, векторами і матрицями, автоматично переводити одні одиниці вимірювання в інші [11].

Серед можливостей Mathcad можна виділити наступні:

- розв'язання диференціальних рівнянь, в тому числі і чисельними методами;
- побудова двовимірних і тривимірних графіків функцій (в різних системах координат, контурні, векторні і так далі);
- використання грецького алфавіту як в рівняннях, так і в тексті;
- виконання обчислень в символному режимі;
- виконання операцій з векторами і матрицями;
- символний розв'язок систем рівнянь;
- апроксимація кривих;
- виконання підпрограм;
- пошук коренів многочленів і функцій;

- проведення статистичних розрахунків і робота з розподілом ймовірностей;
- пошук власних чисел і векторів;
- обчислення з одиницями вимірювання.

Якщо врахувати усе вище перераховане, то можна сказати, що Mathcad повністю підходить для програмної реалізації метода, який був описаний у розділі 2. Так як дана робота стосується теми математичного моделювання томографічної реконструкції, то найбільш важливою вимогою є можливість графічного відображення даних у різних проекціях.

В даній роботі серед версій програми була обрана версія Mathcad 15.

### 3.2 Опис програми

Вхідні дані програми:

- тестова функція  $f(x, y)$  задана на області  $D = [0,1]^2$ ;
- $N$  – число, що обмежує верхній та нижні індекси у сумі Фур'є (2.2);
- $n$  – число, яке задає кількість частинних відрізків, на які розбивається відрізок  $[0,1]$  при підрахунку інтегралів (2.12) – (2.23). Число  $M$  задається формулою  $M = 2^{n+1}$ .

Для можливості порівняння похибок, вхідні функції нормуються таким чином, щоб вони приймали максимальне значення яке дорівнює 1.

В програмі розраховуються наближені значення коефіцієнтів Фур'є  $F_{k,l} = I_1 + I_2 + I_3$  згідно з формулами (2.12) – (2.23) та окремо розраховуються  $F_{0,0}$ ,  $F_{k,0}$ ,  $F_{0,l}$ .

Для візуалізації і можливості порівняння результатів у програмі використовуються суми Фур'є та Фейєра (2.26), (2.27):

$$SF(x, y, N) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N F_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)}.$$

$$SFE(x, y, N) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \left(1 - \frac{|l|}{N+1}\right) F_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)}$$

Точність відновлення оцінюється за допомогою порівняння отриманих результатів з точним значенням функції, шляхом розрахунку похибок. Для порівняння розглядаються максимальна по модулю (3.1), середньоквадратична (3.2) та середня абсолютна (3.3) похибки [3]:

$$E = \max_{i \in [1, n]} |x_i - \tilde{x}_i|, \quad (3.1)$$

$$D = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2)$$

$$R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{x}_i|. \quad (3.3)$$

Як прийнято при розгляданні задач комп'ютерної томографії, результати представляються у вигляді трьох графіків (відновленої функції, ліній рівня та напівтоновим зображенням), а також у аналітичному вигляді

Графічні ілюстрації результатів приведені для сум Фур'є та Фейєра.

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

### 4.1 Результати розв'язку задачі

Серед вхідних функцій двох змінних будемо розглядати функції класів  $C^k(D)$  та класу  $K(D)$  – класу розривних в області  $D$  функцій з розривами на деяких лініях, де  $D = [0,1]^2$ . Для кожної функції будемо брати  $N$  рівним 8, 16.  $k$  візьмемо рівним 1.

Задача 1. Відновлення функції, заданої у трикутнику, що подається нерівністю, введеною у пункті 2.5 (задача 1)

$$f_1(x, y) = \begin{cases} -\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - r^2}{r^2}, & \text{якщо } F(x, y) \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } F(x, y) < 0. \end{cases}$$

при  $x_0 = y_0 = 0,5$ .  $r = 0,4$ . Результати обчислювань представлені у таблиці 4.1 та на рисунках 4.1 – 4.5.

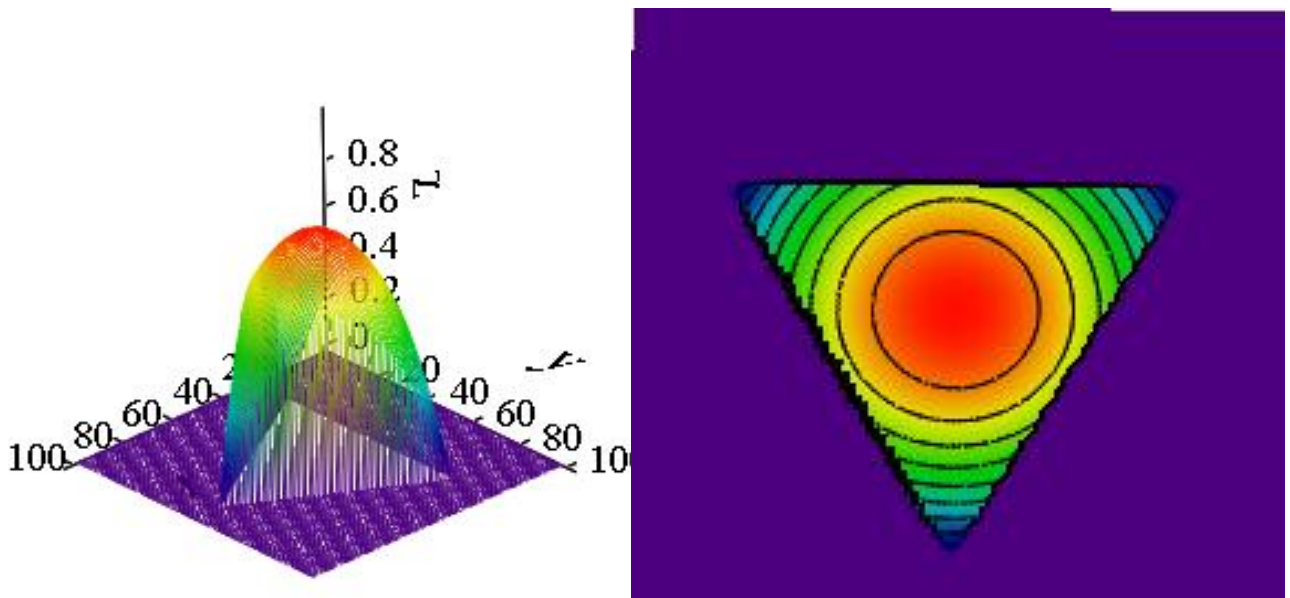


Рисунок 4.1 – Зображення заданої функції та її ліній рівня

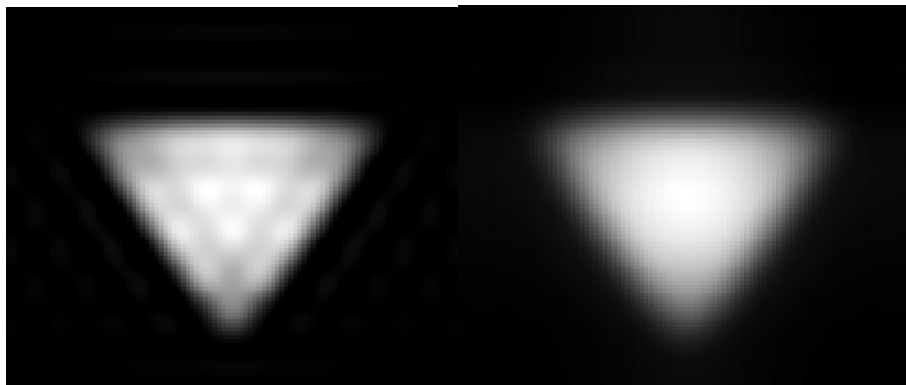


Рисунок 4.2 – Напівтонове зображення, отримане при відновленні  $f_1(x, y)$  з використанням сум Фур'є та Фейєра при  $N = 8$

Таблиця 4.1 – Порівняння похибок при відновленні функції  $f_1(x, y)$

	N	Максимальна відносна	Середньоквадратична	Середня абсолютна	Час роботи (сек)
Фур'є	8	0,378	0,056	0,023	63
	16	0,367	0,041	0,014	600
Фейєра	8	0,383	0,095	0,06	63
	16	0,81	0,067	0,037	600

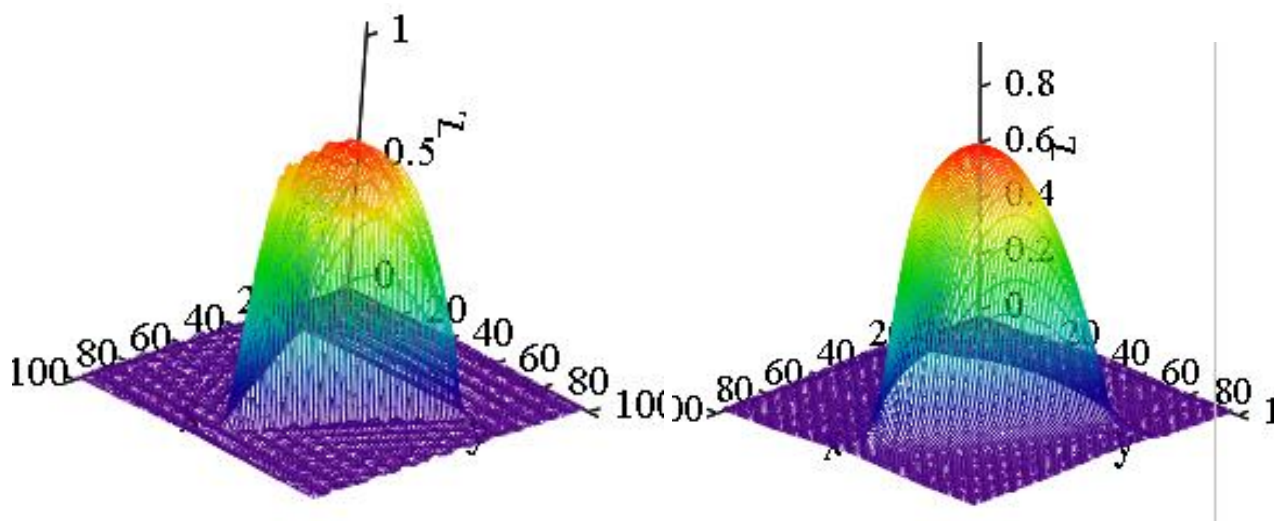


Рисунок 4.3 – Графік функції, отриманий при відновленні  $f_1(x, y)$  з використанням сум Фур'є та Фейєра при  $N = 16$

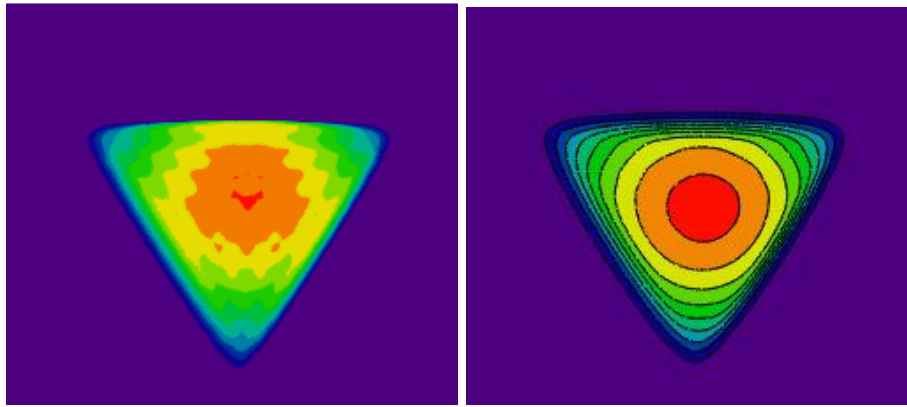


Рисунок 4.4 – Графік ліній рівня відтвореної функції, отриманий при відновленні  $f_1(x, y)$  з використанням сум Фур'є та Фейєра при  $N = 16$

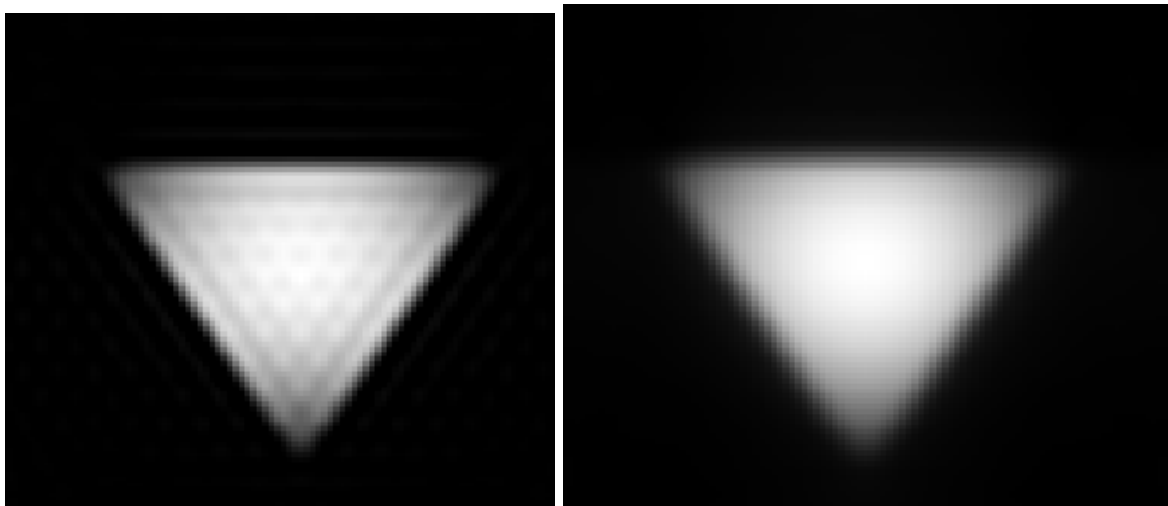


Рисунок 4.5 – Напівтонове зображення, отримане при відновленні  $f_1(x, y)$  з використанням сум Фур'є та Фейєра при  $N = 16$

Задача 2. Відновлення функції, заданої у трикутнику довільного розташування, що подається нерівністю, введеною у пункті 2.5 (задача 2)

$$f_2(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } F(x, y) \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } F(x, y) < 0. \end{cases}$$

при  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi$ ,  $x_0 = y_0 = 0,7$ ,  $r = 0,25$ . Результати обчислювань представлені у таблиці 4.2 та на рисунках 4.6 – 4.10.

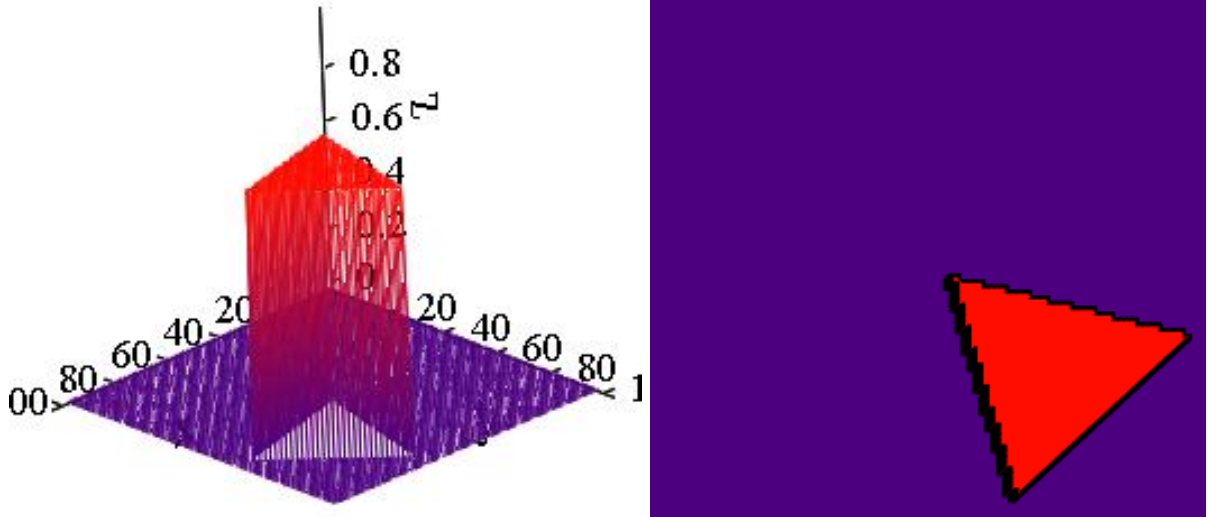


Рисунок 4.6 – Зображення заданої функції та її ліній рівня

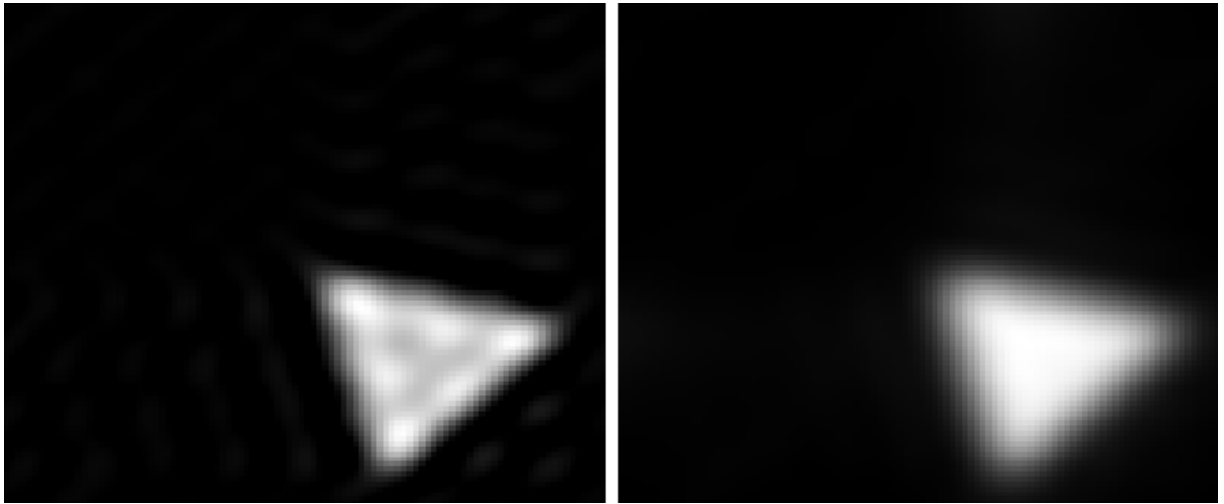


Рисунок 4.7 – Напівтонове зображення, отримане при відновленні  $f_2(x, y)$  з використанням сум Фур'є та Фейєра при  $N = 8$

Таблиця 4.2 – Порівняння похибок при відновленні функції  $f_2(x, y)$

	N	Максимальна відносна	Середньоквадратична	Середня абсолютна	Час роботи (сек)
Фур'є	8	0,816	0,081	0,027	126
	16	0,765	0,059	0,018	835
Фейєра	8	0,858	0,123	0,052	126
	16	0,861	0,091	0,034	835

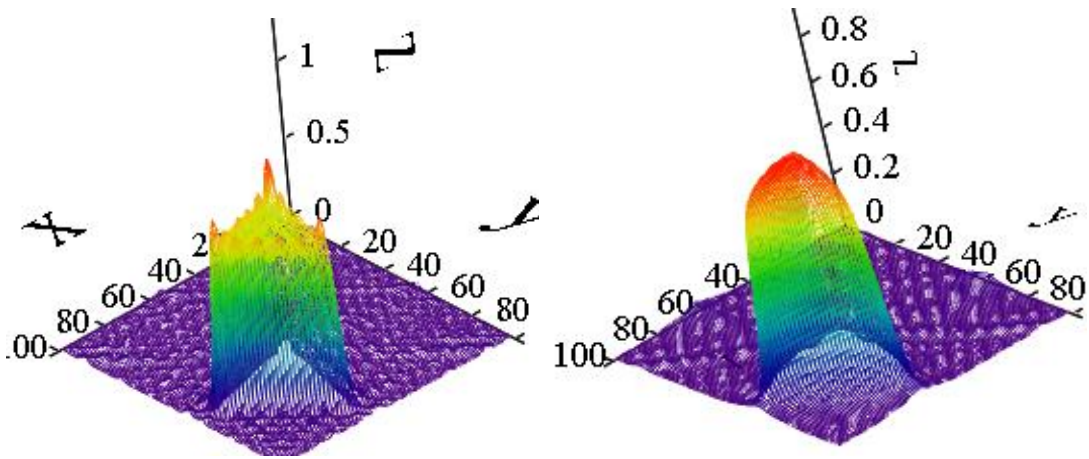


Рисунок 4.8 – Графік функції, отриманий при відновленні  $f_2(x, y)$  з використанням сум Фур'є та Фейєра при  $N = 16$

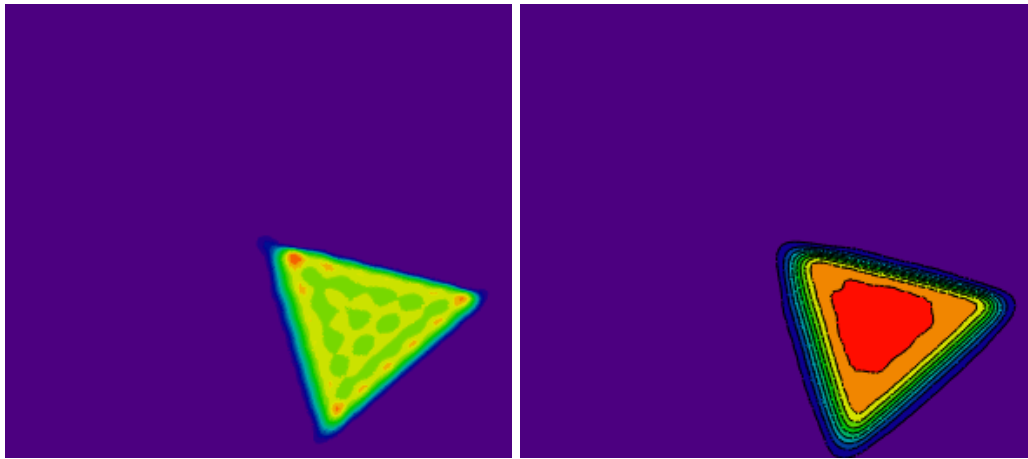


Рисунок 4.9 – Графік ліній рівня відтвореної функції, отриманий при відновленні  $f_2(x, y)$  з використанням сум Фур'є та Фейєра при  $N = 16$

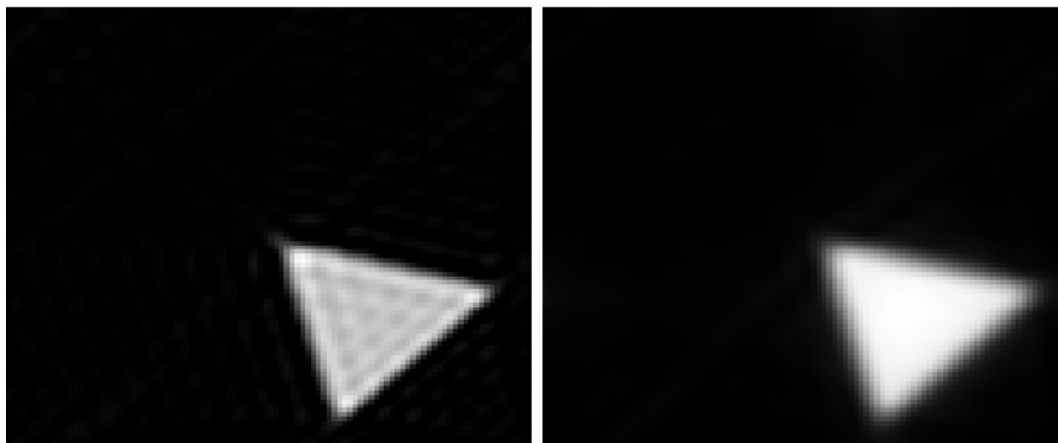


Рисунок 4.10 – Напівтонове зображення, отримане при відновленні  $f_2(x, y)$  з використанням сум Фур'є та Фейєра при  $N = 16$

Задача 3. Відновлення функції, заданої у об'єднанні чотирьох трикутників, що подається нерівністю, введеною у пункті 2.5 (задача 3)

$$f_3(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } F(x, y) \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } F(x, y) < 0. \end{cases}$$

Центри трикутників взяти такими  $(0,7;0,7)$ ,  $(0,3;0,7)$ ,  $(0,3;0,3)$ ,  $(0,7;0,3)$ , а кути  $\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + \pi$ ,  $\alpha_2 = -\frac{\pi}{4}$ ,  $\alpha_3 = \frac{\pi}{4}$ ,  $\alpha_4 = -\frac{\pi}{4} - \pi$  відповідно.

Результати обчислювань представлені у таблиці 4.3 та на рис. 4.11 – 4.15.

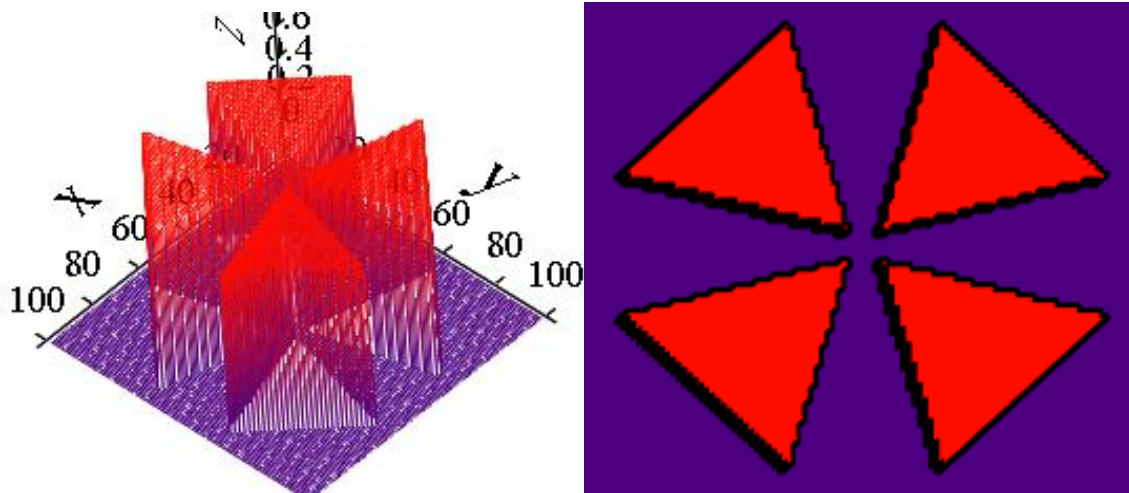


Рисунок 4.11 – Зображення заданої функції та її ліній рівня

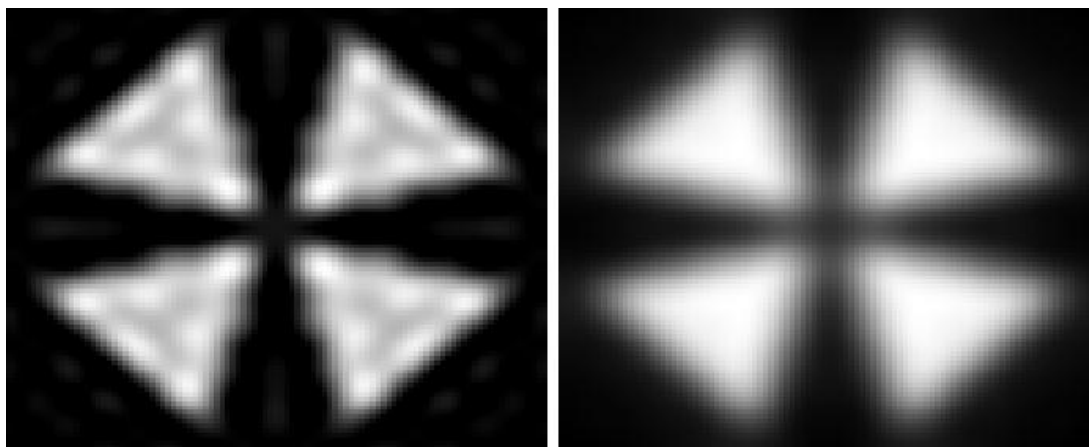


Рисунок 4.12 – Напівтонове зображення, отримане при відновленні  $f_3(x, y)$  з використанням сум Фур'є та Фейєра при  $N = 8$

Таблиця 4.3 – Порівняння похибок при відновленні функції  $f_3(x, y)$ 

	N	Максимальна відносна	Середньо-квдратична	Середня абсолютна	Час роботи (сек)
Фур'є	8	0,86	0,161	0,089	923
	16	0,777	0,115	0,054	1544
Фейєра	8	0,774	0,242	0,186	923
	16	0,824	0,18	0,121	1544

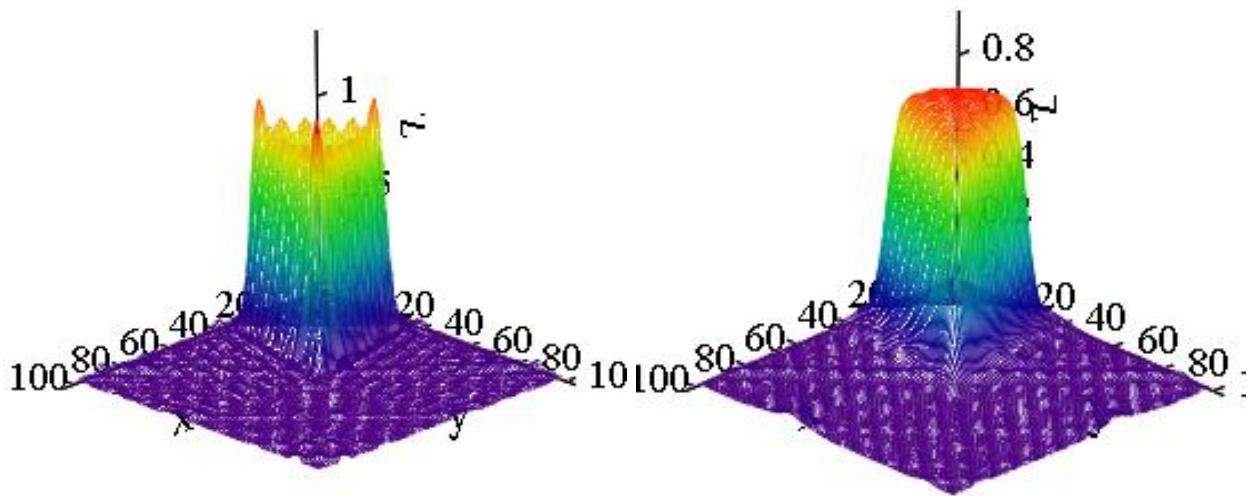
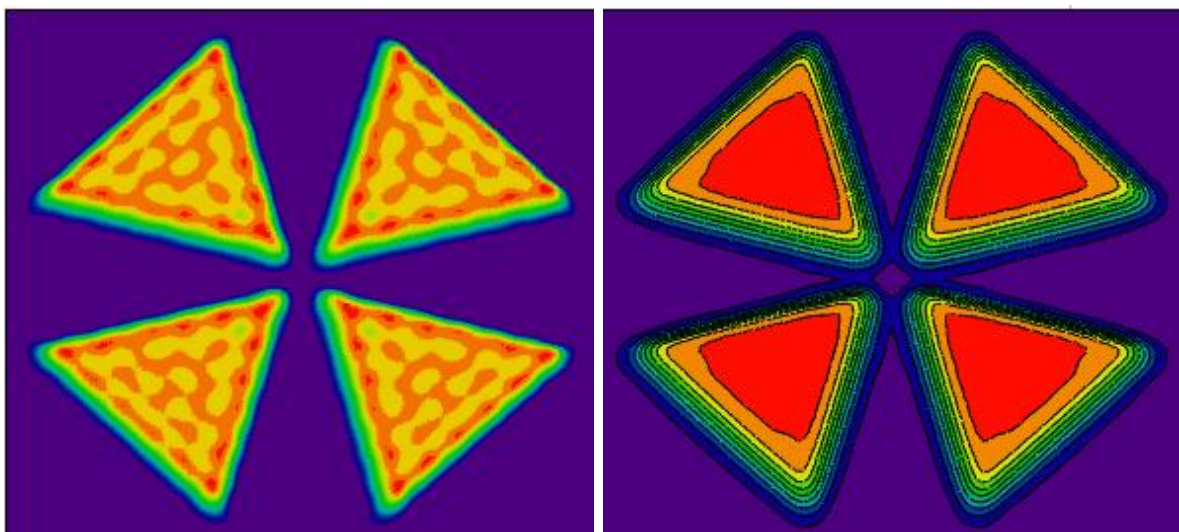
Рисунок 4.13 – Графік функції, отриманий при відновленні  $f_3(x, y)$ з використанням сум Фур'є та Фейєра при  $N = 16$ 

Рисунок 4.14 – Графік ліній рівня відтвореної функції, отриманий при віднов-

ленні  $f_3(x, y)$  з використанням сум Фур'є та Фейєра при  $N = 16$

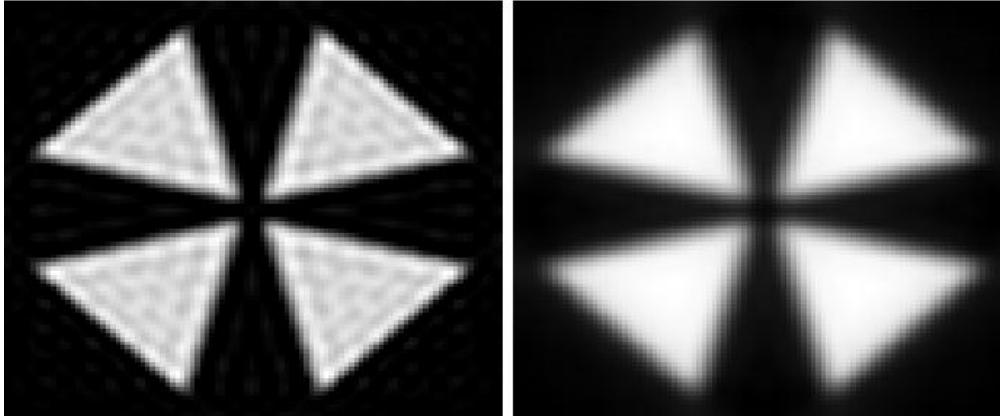


Рисунок 4.15 – Напівтонове зображення, отримане при відновленні  $f_3(x, y)$  з використанням сум Фур'є та Фейєра при  $N = 16$

Задача 4. Відновлення функції, заданої у «трикутному кільці», що подається нерівністю, введеною у пункті 2.5 (задача 4)

$$f_4(x, y) = \begin{cases} \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (r_1 + r_2)^2}{(r_1 + r_2)^2}, & \text{якщо } F(x, y) \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } F(x, y) < 0, \end{cases}$$

при  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi$ ,  $x_0 = 0,5$ ,  $y_0 = 0,5$ ,  $r_1 = r_2 = 0,2$ . Результати обчислювань представлені у таблиці 4.4 та на рисунках 4.16 – 4.20.

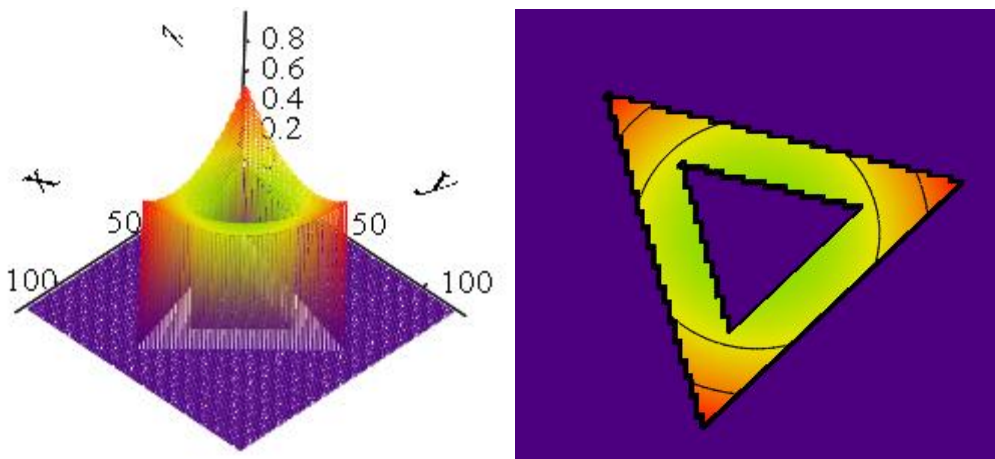


Рисунок 4.16 – Зображення заданої функції та її ліній рівня

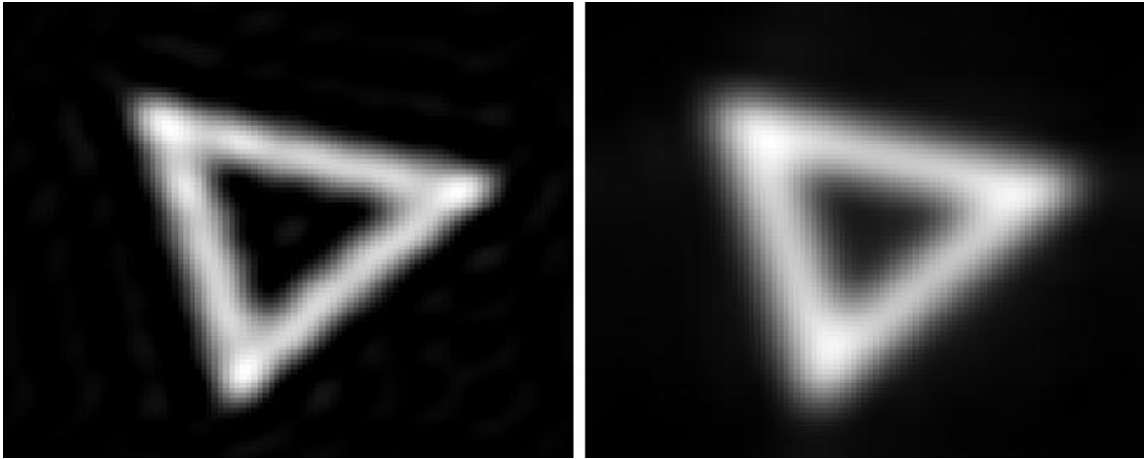


Рисунок 4.17 – Напівтонове зображення, отримане при відновленні  $f_4(x, y)$  з використанням сум Фур'є та Фейєра при  $N = 8$

Таблиця 4.4 – Порівняння похибок при відновленні функції  $g_2(x, y)$

	N	Максимальна відносна	Середньоквадратична	Середня абсолютна	Час роботи (сек)
Фур'є	8	0,777	0,099	0,044	208
	16	0,733	0,072	0,028	600
Фейєра	8	0,831	0,152	0,09	208
	16	0,817	0,113	0,059	600

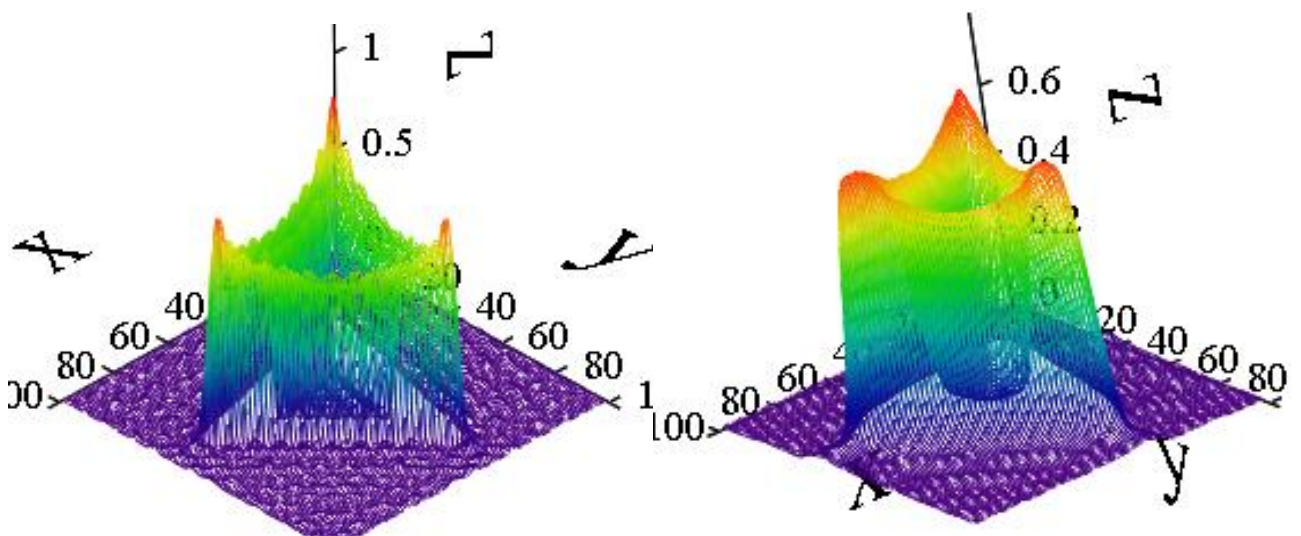


Рисунок 4.18 – Графік функції, отриманий при відновленні  $f_4(x, y)$  з використанням сум Фур'є та Фейєра при  $N = 16$

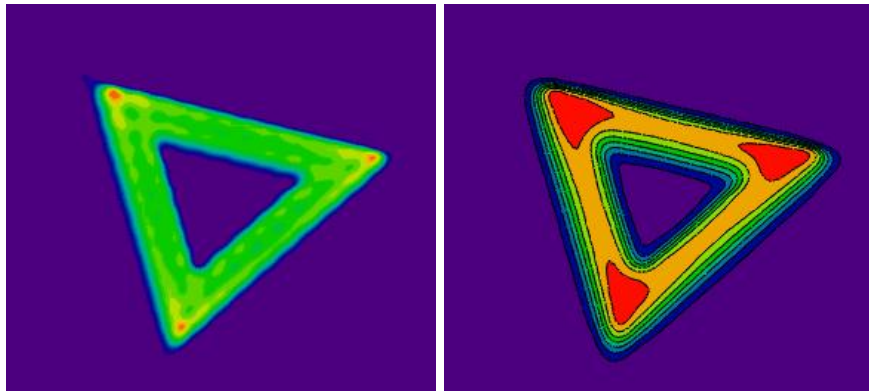


Рисунок 4.19 – Графік ліній рівня відтвореної функції, отриманий при відновленні  $f_4(x, y)$  з використанням сум Фур'є та Фейєра при  $N = 16$

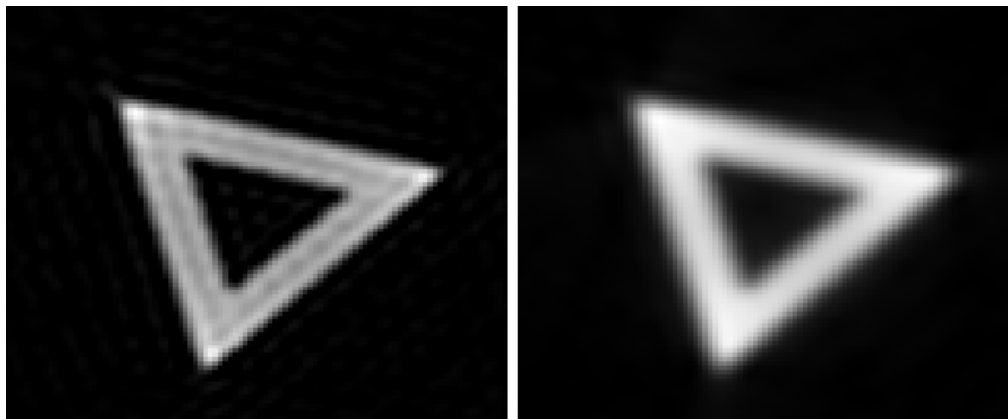


Рисунок 4.20 – Напівтонове зображення, отримане при відновленні  $f_4(x, y)$  з використанням сум Фур'є та Фейєра при  $N = 16$

## 4.2 Аналіз результатів

Якщо звернути увагу на наші результати, то можна сказати, що від верхнього та нижнього індексу суми Фур'є та Фейєра, тобто від числа  $N$  залежить час роботи методу. Але при цьому збільшується якість зображення, це видно зі значень похибок, які стають меншими, при збільшенні  $N$ .

## ВИСНОВКИ

В даній роботі була поставлена і розглянута задача комп'ютерної томографії, а саме проблема томографічної реконструкції зображення з використанням подвійних сум Фур'є та Фейєра. У роботі було розглянуто запропонований О. М. Литвином метод [1], який полягає у відображенні відтворюваної двовимірної функції у вигляді скінченної суми ряду Фур'є та Фейєра.

Програмна реалізація методу була виконана в системі комп'ютерної математики Mathcad 15. Для більш ефективної демонстрації методу було використано подвійні суми Фур'є та Фейєра. Усі дані та результати були представлені в аналітичному виді, ілюструвались графічно у вигляді графіка відновленої функції, ліній рівня, а також напівтоновим зображенням, що прийнято при розгляданні задач комп'ютерної томографії.

Внаслідок можна зробити висновок що запропонований метод томографічної реконструкції зображень з використанням скінченних сум Фур'є та Фейєра дає більш чіткі зображення ніж з використанням скінченних сум Фур'є та Фейєра у випадку коли число верхнього та нижнього індексу, тобто  $N$  було більше, хоча це відзначалося на часі роботи програми.

**ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ**

1. Литвин О. М. Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії // Системний аналіз, управління і інформаційні технології: Вісник Харківського держ. політех. ун-ту. 2000. Вип. 125. С. 27–35.
2. Литвин О. М., Кулик С. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням вейвлетів // Проблеми машинобудування. 2008. Т. 11, №2. С. 56–65.
3. Терещенко С. А. Методы вычислительной томографии. Москва : ФЗМАТЛИТ, 2004. 320 с.
4. Троицкий И. Н. Статистическая теория томографии. Москва : Радио и связь, 1989. 240 с.
5. Білобородов А.А., Кушнар'ов А.А. Знаходження коефіцієнтів Фур'є з урахуванням проєкційних даних при математичному моделюванні процесу томографічної реконструкції // 21-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка та молодь у ХХІ столітті» : збірник матеріалів форуму (м. Харків, 17-19 квітня 2017 р.). Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2017. С. 66–67.
6. Литвин О. М., Литвин О. Г. Реконструкція зображення із використанням скінченних сум Фур'є та Фейера // Матеріали 7-ої Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю (Полтава, 10-12 березня, ІСН). Полтава : ПУЕТ, 2016. С. 186–189.
7. Рвачев В. Л. Геометрические приложения алгебры и логики. Киев : Наукова думка, 1964. 260с.
8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. Москва :Наука, 1966. 655 с.
9. Явление Гиббса [Електронний ресурс] // В.С. Булыгин. 2012. URL : [https://mipt.ru/education/chair/physics/S\\_III/Method\\_3/G\\_t\\_an/BulyginGibbs.pdf](https://mipt.ru/education/chair/physics/S_III/Method_3/G_t_an/BulyginGibbs.pdf) (дата звернення 21.11.2019).
10. Иллюстрации к теме «Ряды Фурье» [Електронний ресурс] // А. А.

Лодкин. 2004. URL : <http://www.math.spbu.ru/analysis/tutorial/fs.pdf> (дата звер-  
нения 21.11.2019).

11. Гурский Д. А., Турбина Е. С. Вычисления в Mathcad 12. Санкт-  
Петербург : Питер, 2006. 544 с.

12. Лямец В. И, Тевяшев А.Д. Системный анализ. Вводной курс. 2-е изд.,  
перероб. и допол. Харьков : ХНУРЭ, 2004. 448 с.